Inégalités de Sobolev-Logarithmique et de Talagrand pour l'entropie libre non-microcanonique.

Yoann Dabrowski

Université Lyon 1 - Institut Camille Jordan

Rencontres Régionales d'Analyse-Probabilités
27 Septembre 2012

Plan

1. Rappels de probabilités libres.
   - Probabilités libres comme limite de matrices aléatoires
   - Etats de Gibbs libres
   - Mouvement brownien libre et EDS libres
2. Entropie (libre), inégalités de Log-Sobolev et Talagrand.
   - Rappels dans le cas classique
   - Entropie libre microcanonique (via matrices aléatoires)
   - Inégalités de Log-Sobolev and Talagrand connues pour l'entropie libre microcanonique
3. Inégalités pour l'entropie libre non-microcanonique.
   - Rappels sur l'entropie libre non-microcanonique.
   - Inégalités de Log-Sobolev libres non-microcanoniques pour états de Gibbs à potentiel convexe
   - Inégalités de Talagrand libres non-microcanoniques.

• (Wigner) Si H_N matrice aléatoire hermitienne $N \times N$ distribuée selon mesure $P(dH) = \frac{1}{Z_N} e^{-NTr(H^*H)/2} dH$ (loi GUE), alors $p.s.\ \frac{1}{N} Tr(H_N^k) \to \tau(S^k) = \int_{-2}^{2} x^k \sqrt{4 - x^2} dx/2\pi$

• On dit que S de loi semicirculaire (analogue libre des Lois Gaussiennes).

• Les probabilités libres permettent de comprendre le cas à plusieurs matrices.

• L'indépendance de modèles de matrices aléatoires unitairement invariants implique liberté de la distribution limite.

1.1 Probabilités libres et matrices aléatoires

• (Wigner) Si H_N matrice aléatoire hermitienne $N \times N$ distribuée selon mesure $P(dH) = \frac{1}{Z_N} e^{-NTr(H^*H)/2} dH$ (loi GUE), alors $p.s.\ \frac{1}{N} Tr(H_N^k) \to \tau(S^k) = \int_{-2}^{2} x^k \sqrt{4 - x^2} dx / 2\pi$

• On dit que S de loi semicirculaire (analogue libre des Lois Gaussiennes).

• Les probabilités libres permettent de comprendre le cas à plusieurs matrices.

• L'indépendance de modèles de matrices aléatoires unitairement invariants implique liberté de la distribution limite.

L'indépendance de modèles de matrices aléatoires unitairement invariants implique la liberté de la distribution limite.

- (Voiculescu) $H_{N,1}, \ldots, H_{N,n}$ GUE indépendants, leurs moments $\frac{1}{N} Tr(H_{N,i_1}^{k_1} \ldots H_{N,i_m}^{k_m}) \to \tau(S_{i_1}^{k_1} \ldots S_{i_m}^{k_m})$ *p.s.* avec $S_1, \ldots, S_n$ semicirculaires libres.
- Mouvement brownien matriciel (hermitien) a pour limite le mouvement brownien libre etc.
- $S_1, \ldots, S_n$ ont un modèle naturel dans les algèbres d'opérateurs : en particulier dans l'algèbre de von Neumann des groupes libres $\mathcal{L}(F_n)$.

1.1 Lois non-commutatives

- Une mesure μ à support compact dans $[-R, R]$ est déterminée par ses moments $\int d\mu(x)x^k$.
- Une loi non-commutative est la donnée d'une forme linéaire (dite trace) τ sur la $*$-algèbre des polynômes non-commutatifs : $\tau : \mathbb{C}\langle X_1, ..., X_n\rangle \to \mathbb{C}$ $(X_i^* = X_i)$, tel que :

$$\tau(P^* P) \geq 0 \quad \tau(1) = 1 \quad \tau(PQ) = \tau(QP) \quad \tau(X_i^{2k}) \leq R^{2k}.$$

- Un meilleur cadre est de considérer des états sur une C^*-algèbre C (algèbre stellaire d'opérateurs de $B(H)$, normiquement fermée). Trace τ remplace Proba : $L^p(C, \tau)$...
- Plus précisément, on considère donc $\mathcal{S}_R^n$ l'ensemble des états traciaux sur la C^*-algèbre produit libre universel $C([-R, R])^{*n} \supset \mathbb{C}\langle X_1, ..., X_n\rangle$.
- Ex : Pour n matrices aléatoires $(||M_i|| \leq R)$ $M = (M_1, \ldots, M_n) \in (H_N^R)^n$ de loi μ on obtient $\tau_\mu \in \mathcal{S}_R^n$:

$$\tau_\mu(P) = E_\mu(\frac{1}{N} Tr(P(M_1, ..., M_n))), \quad \forall P \in \mathbb{C}\langle X_1, ..., X_n\rangle.$$

1.1 Lois non-commutatives

- Une mesure μ à support compact dans $[-R,R]$ est déterminée par ses moments $\int d\mu(x)x^k$.
- Une loi non-commutative est la donnée d'une forme linéaire (dite trace) τ sur la $*$-algèbre des polynômes non-commutatifs : $\tau : \mathbb{C}\langle X_1,...,X_n\rangle \to \mathbb{C}$ $(X_i^* = X_i)$, tel que :

$$\tau(P^*P) \geq 0 \quad \tau(1) = 1 \quad \tau(PQ) = \tau(QP) \quad \tau(X_i^{2k}) \leq R^{2k}.$$

- Un meilleur cadre est de considérer des états sur une C^*-algèbre C (algèbre stellaire d'opérateurs de $B(H)$, normiquement fermée). Trace τ remplace Proba : $L^p(C,\tau)$...
- Plus précisément, on considère donc $\mathcal{S}_R^n$ l'ensemble des états traciaux sur la C^*-algèbre produit libre universel $C([-R,R])^{*n} \supset \mathbb{C}\langle X_1,...,X_n\rangle$.
- Ex : Pour n matrices aléatoires $(||M_i|| \leq R)$ $M = (M_1,\ldots,M_n) \in (H_N^R)^n$ de loi μ on obtient $\tau_\mu \in \mathcal{S}_R^n$:

$$\tau_\mu(P) = E_\mu(\frac{1}{N}Tr(P(M_1,...,M_n))), \quad \forall P \in \mathbb{C}\langle X_1,...,X_n\rangle.$$

1.1 Lois non-commutatives

- Une mesure μ à support compact dans $[-R, R]$ est déterminée par ses moments $\int d\mu(x)x^k$.
- Une loi non-commutative est la donnée d'une forme linéaire (dite trace) τ sur la $*$-algèbre des polynômes non-commutatifs : $\tau : \mathbb{C}\langle X_1, ..., X_n\rangle \to \mathbb{C}$ ($X_i^* = X_i$), tel que :

$$\tau(P^*P) \geq 0 \quad \tau(1) = 1 \quad \tau(PQ) = \tau(QP) \quad \tau(X_i^{2k}) \leq R^{2k}.$$

- Un meilleur cadre est de considérer des états sur une C^*-algèbre C (algèbre stellaire d'opérateurs de $B(H)$, normiquement fermée). Trace τ remplace Proba : $L^p(C, \tau)$...
- Plus précisément, on considère donc $\mathcal{S}_R^n$ l'ensemble des états traciaux sur la C^*-algèbre produit libre universel $C([-R, R])^{*n} \supset \mathbb{C}\langle X_1, ..., X_n\rangle$.
- Ex : Pour n matrices aléatoires ($||M_i|| \leq R$) $M = (M_1, \ldots, M_n) \in (H_N^R)^n$ de loi μ on obtient $\tau_\mu \in \mathcal{S}_R^n$:

$$\tau_\mu(P) = E_\mu\left(\frac{1}{N} Tr(P(M_1, ..., M_n))\right), \quad \forall P \in \mathbb{C}\langle X_1, ..., X_n\rangle.$$

- $A_1, ..., A_n$ des sous-$*$-algèbres de (C, τ) sont dites *libres* si pour tout $i_1 \neq i_2 \neq ... \neq i_k$, $a_k \in A_{i_k}$ avec $\tau(a_k) = 0$ on a :

$$\tau(a_1...a_n) = 0.$$

- Remarque, cela détermine τ sur $Alg(A_1, ..., A_n)$ en fonction de $\tau|_{A_i}$.
- Des variables semicirculaires libres $S_1, ..., S_n$ sont telles que $\tau_0(S_i^k) = \int_{-2}^{2} x^k \sqrt{4 - x^2} dx / 2\pi$ et $A_i = \mathbb{C}\langle X_i \rangle$ sont libres dans $\mathbb{C}\langle X_1, ..., X_n \rangle$.
- Cela donne $\tau_0 \in \mathcal{S}_R^n, R \geq 2$.

- $A_1, \ldots, A_n$ des sous-$*$-algèbres de (C, τ) sont dites *libres* si pour tout $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_k$, $a_k \in A_{i_k}$ avec $\tau(a_k) = 0$ on a :

$$\tau(a_1 \ldots a_n) = 0.$$

- Remarque, cela détermine τ sur $Alg(A_1, \ldots, A_n)$ en fonction de $\tau|_{A_i}$.
- Des variables semicirculaires libres $S_1, \ldots, S_n$ sont telles que $\tau_0(S_i^k) = \int_{-2}^{2} x^k \sqrt{4 - x^2} dx / 2\pi$ et $A_i = \mathbb{C}\langle X_i \rangle$ sont libres dans $\mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$.
- Cela donne $\tau_0 \in \mathcal{S}_R^n, R \geq 2$.

1.2 États de Gibbs classiques

- Cas classique: $\nu_V = \frac{1}{Z}e^{-V(x)}dLeb(x)$ est une mesure de Gibbs pour $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ potentiel convexe.
- On peut les caractériser (IPP) par

$$\nu_V(\frac{\partial}{\partial x_i}P) = \nu_V(P\frac{\partial}{\partial x_i}V).$$

- Soit $V = V^* \in \mathbb{C}\langle X_1, ..., X_n\rangle$ (ou $C([-R,R])^{*n})(A_1, ..., A_n) \mapsto Tr(V(A_1, ..., A_n)$ convexe sur $(H_R^N)^n$. Le cas libre sera limite $\tau_V(P)$ de

$$\int_{(H_R^N)^n} \frac{1}{N} Tr(P(A_1, ..., A_n)) \frac{1}{Z_V} e^{-NTr(V(A_1,...,A_n))} dLeb(A_1, ..., A_n).$$

1.2 États de Gibbs classiques

- Cas classique: $\nu_V = \frac{1}{Z} e^{-V(x)} dLeb(x)$ est une mesure de Gibbs pour $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ potentiel convexe.
- On peut les caractériser (IPP) par

$$\nu_V(\frac{\partial}{\partial x_i} P) = \nu_V(P \frac{\partial}{\partial x_i} V).$$

- Soit $V = V^* \in \mathbb{C}\langle X_1, ..., X_n\rangle$ (ou $C([-R, R])^{*n})(A_1, ..., A_n) \mapsto Tr(V(A_1, ..., A_n)$ convexe sur $(H_R^N)^n$. Le cas libre sera limite $\tau_V(P)$ de

$$\int_{(H_R^N)^n} \frac{1}{N} Tr(P(A_1, ..., A_n)) \frac{1}{Z_V} e^{-NTr(V(A_1,...,A_n))} dLeb(A_1, ..., A_n).$$

- On définit la différence divisée libre
  $\partial_i : \mathcal{C} = \mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \to \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ l'unique dérivation tel que :

$$\partial_i(X_j) = 1 \otimes 1 \delta_{i=j}$$

$$\partial_i(PQ) = P\partial_i(Q) + \partial_i(P)Q,$$

  avec $P(a \otimes b)Q = Pa \otimes bQ$.
- On définit le gradient cyclique

$$D_i V = mflip \circ \partial_i(V)$$

  avec $mflip(a \otimes b) = ba$. On peut remarquer que
  $B \mapsto Tr(D_i V(A_1, \ldots, A_n)B)$ est la différentielle de
  $A_i \to Tr(V(A_1, \ldots, A_n))$ en A_i.

- Un état τ_V est dit état de Gibbs libre (de potentiel $V = V^* \in \mathcal{C}$) si :

$$\forall i \forall P \in \mathcal{C} \quad \tau_V \otimes \tau_V(\partial_i(P)) = \tau_V(P(D_i V)).$$

- Pour $V_0 = \sum_{i=1}^n X_i^2$, τ_{V_0} est l'état des semicirculaires libres.
- Si V est localement strictement convexe [Guionnet-Shlyakhtenko] montrent qu'il existe un unique état de Gibbs libre associé à V.
- (Techniquement $\forall c > 0 \exists M_0$, ceci est valable pour tout V (c, M)-convexe $M \geq M_0$, si $\sum_i (D_i V(X) - D_i V(Y)).(X_i - Y_i) \geq c \sum_i (X_i - Y_i)^2$ pour toute variable $||X_i||, ||Y_i|| \leq M$. Ici $a.b = \frac{ab+ba}{2}$)

- Un état τ_V est dit état de Gibbs libre (de potentiel $V = V^* \in \mathcal{C}$) si :

$$\forall i \forall P \in \mathcal{C} \quad \tau_V \otimes \tau_V(\partial_i(P)) = \tau_V(P(D_i V)).$$

- Pour $V_0 = \sum_{i=1}^n X_i^2$, τ_{V_0} est l'état des semicirculaires libres.
- Si V est localement strictement convexe [Guionnet-Shlyakhtenko] montrent qu'il existe un unique état de Gibbs libre associé à V.
- (Techniquement $\forall c > 0 \exists M_0$, ceci est valable pour tout V (c, M)-convexe $M \geq M_0$, si $\sum_i (D_i V(X) - D_i V(Y)).(X_i - Y_i) \geq c \sum_i (X_i - Y_i)^2$ pour toute variable $\|X_i\|, \|Y_i\| \leq M$. Ici $a.b = \frac{ab+ba}{2}$)

1.2 États de Gibbs libres

- Un état τ_V est dit état de Gibbs libre (de potentiel $V = V^* \in \mathcal{C}$) si :

$$\forall i \forall P \in \mathcal{C} \quad \tau_V \otimes \tau_V(\partial_i(P)) = \tau_V(P(D_i V)).$$

- Pour $V_0 = \sum_{i=1}^n X_i^2$, τ_{V_0} est l'état des semicirculaires libres.
- Si V est localement strictement convexe [Guionnet-Shlyakhtenko] montrent qu'il existe un unique état de Gibbs libre associé à V.
- (Techniquement $\forall c > 0 \exists M_0$, ceci est valable pour tout V (c, M)-convexe $M \geq M_0$, si $\sum_i (D_i V(X) - D_i V(Y)).(X_i - Y_i) \geq c \sum_i (X_i - Y_i)^2$ pour toute variable $||X_i||, ||Y_i|| \leq M$. Ici $a.b = \frac{ab+ba}{2}$)

1.3 Mouvement Brownien libre

Une famille (S^i_t) (dans (M, τ) algèbre de von Neumann avec une trace) est mouvement brownien libre si :

- $S^i_0 = 0$
- Pour $t > s$, $(S^1_t - S^1_s, \ldots, S^n_t - S^n_s)$ sont des semicirculaires libres de variance $(t - s)$.
- Pour $t > s$, $Alg(S^1_t - S^1_s, \ldots, S^n_t - S^n_s)$ est libre de $\mathcal{F}_s = Alg(S^i_u, u \leq s)$.

On a une notion d'intégrale stochastique du type Ito, étendant le cas adapté étagé $U = a \otimes b1_{(s,t]}, a, b \in \mathcal{F}_s$,

$$\int U_u \# dS^i_u = a(S^i_t - S^i_s)b,$$

étendue par isométrie à $L^2_{ad}([0, T], L^2(M \otimes M, \tau \otimes \tau))$.

Une famille (S_t^i) (dans (M,τ) algèbre de von Neumann avec une trace) est mouvement brownien libre si :

- $S_0^i = 0$
- Pour $t > s$, $(S_t^1 - S_s^1, ..., S_t^n - S_s^n)$ sont des semicirculaires libres de variance $(t-s)$.
- Pour $t > s$, $Alg(S_t^1 - S_s^1, ..., S_t^n - S_s^n)$ est libre de $\mathcal{F}_s = Alg(S_u^i, u \leq s)$.

On a une notion d'intégrale stochastique du type Ito, étendant le cas adapté étagé $U = a \otimes b 1_{(s,t]}, a, b \in \mathcal{F}_s$,

$$\int U_u \# dS_u^i = a(S_t^i - S_s^i)b,$$

étendue par isométrie à $L^2_{ad}([0,T], L^2(M \otimes M, \tau \otimes \tau))$.

Soit $(X_0^1, ..., X_0^n)$ libre de (S_t^i) mouvement brownien libre.

- On sait résoudre (en un sens fort) pour $V \in \mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$:

$$X_t^i = X_0^i - \frac{1}{2}\int_0^t D_i V(X_s^1, \ldots, X_s^n) ds + S_t^i.$$

- Stationnaire si $(X_0^1, ..., X_0^n)$ de loi τ_V.
  En général, pour V (c, M)-convexe, la loi de $(X_t^1, .., X_t^n)$ tend vers τ_V.
- Cas stationnaire [D.]. On sait résoudre en un sens faible si $\xi^i = \partial_i^* 1 \otimes 1 \in L^2(W^*(X_0^1, \ldots, X_0^n), \tau)$:

$$X_t^i = X_0^i - \frac{1}{2}\int_0^t \xi_s^i ds + S_t^i.$$

Alors la loi est stationnaire :

$$\forall t \geq 0, \quad \tau|_{\mathbb{C}\langle X_0^1, \ldots, X_0^n \rangle} = \tau|_{\mathbb{C}\langle X_t^1, \ldots, X_t^n \rangle}$$

(le cas précédent d'un état de Gibbs est $\xi^i = D_i V$)

Soit $(X_0^1, \ldots, X_0^n)$ libre de (S_t^i) mouvement brownien libre.

- On sait résoudre (en un sens fort) pour $V \in \mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$:

$$X_t^i = X_0^i - \frac{1}{2}\int_0^t D_i V(X_s^1, \ldots, X_s^n) ds + S_t^i.$$

- Stationnaire si $(X_0^1, \ldots, X_0^n)$ de loi τ_V.
  En général, pour V (c, M)-convexe, la loi de $(X_t^1, .., X_t^n)$ tend vers τ_V.
- Cas stationnaire [D.]. On sait résoudre en un sens faible si $\xi^i = \partial_i^* 1 \otimes 1 \in L^2(W^*(X_0^1, \ldots, X_0^n), \tau)$:

$$X_t^i = X_0^i - \frac{1}{2}\int_0^t \xi_s^i ds + S_t^i.$$

  Alors la loi est stationnaire :

$$\forall t \geq 0, \quad \tau|_{\mathbb{C}\langle X_0^1, \ldots, X_0^n\rangle} = \tau|_{\mathbb{C}\langle X_t^1, \ldots, X_t^n\rangle}$$

  (le cas précédent d'un état de Gibbs est $\xi^i = D_i V$)

Plan

1. Rappels de probabilités libres.
   - Probabilités libres comme limite de matrices aléatoires
   - Etats de Gibbs libres
   - Mouvement brownien libre et EDS libres
2. Entropie (libre), inégalités de Log-Sobolev et Talagrand.
   - Rappels dans le cas classique
   - Entropie libre microcanonique (via matrices aléatoires)
   - Inégalités de Log-Sobolev and Talagrand connues pour l'entropie libre microcanonique
3. Inégalités pour l'entropie libre non-microcanonique.
   - Rappels sur l'entropie libre non-microcanonique.
   - Inégalités de Log-Sobolev libres non-microcanoniques pour états de Gibbs à potentiel convexe
   - Inégalités de Talagrand libres non-microcanoniques.

2.1 Rappel sur l'entopie et l'information de Fisher

- Pour μ, ν probabilités sur $\mathbb{R}^p$, l'entropie relative est définie par la formule de Shannon :

$$\mathrm{Ent}(\mu|\nu) = \begin{cases} -\int_{\mathbf{R}^p} f(x) \log f(x) d\nu(x) & \text{if } \mu(dx) = f(x) d\nu(x) \\ \\ -\infty & \text{if } \mu \not\ll \nu \end{cases}$$

- De même on définit l'information de Fisher relative :

$$\mathrm{I}(\mu|\nu) = \begin{cases} \int_{\mathbf{R}^p} |\nabla \log f(x)|^2 d\mu(x) & \text{if } \mu(dx) = f(x) d\nu(x) \\ \\ \infty & \text{if } \mu \not\ll \nu \end{cases}$$

- On appelle $\nabla \log f(x) = \nabla f(x)/f(x) = (\partial^*_{x_1} 1, ..., \partial^*_{x_n} 1)$ fonction score (cas $\nu = Leb$).
- Pour $\nu = \nu_V = \frac{1}{Z} e^{-V} dLeb(x)$ état de Gibbs de potentiel $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strictement convexe, cela devient $\nabla \log f(x) = \nabla \rho(x)/\rho(x) - \nabla V$ avec $\mu(dx) = \rho(x) dLeb(x)$. De plus $Ent(\mu|\nu_V) = Ent(\mu|Leb) - \mu(V) + C$.

2.1 Rappel sur l'inégalité de Log-Sobolev (LSI) classique

- Pour $\nu = \nu_V$ (V de hessienne plus grande que $c > 0$), on a l'inégalité de Log-Sobolev :

$$-Ent(\mu|\nu_V) \leq \frac{1}{2c} I(\mu|\nu_V).$$

- Si on considère la diffusion brownienne solution de :

$$X_t^i = X_0^i - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_{x_i} V(X_s)ds + B_t^i, \;\; \mu_0 = Law(X_0), \; \mu_t = Law(X_t)$$

(stationnaire pour ν_V). LSI est déduite de la décroissance exponentielle de l'information de Fisher [Bakry-Emery] :

$$I(\mu_t|\nu_V) \leq e^{-t/c} I(\mu_0|\nu_V).$$

(Rappel $Ent(\mu_0|\nu_V) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty I(\mu_t|\nu_V)dt$)

- Pour $\nu = \nu_V$ (V de hessienne plus grande que $c > 0$), on a l'inégalité de Log-Sobolev :

$$-Ent(\mu|\nu_V) \leq \frac{1}{2c} I(\mu|\nu_V).$$

- Si on considère la diffusion brownienne solution de :

$$X_t^i = X_0^i - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_{x_i} V(X_s) ds + B_t^i, \ \ \mu_0 = Law(X_0), \ \mu_t = Law(X_t)$$

(stationnaire pour ν_V). LSI est déduite de la décroissance exponentielle de l'information de Fisher [Bakry-Emery] :

$$I(\mu_t|\nu_V) \leq e^{-t/c} I(\mu_0|\nu_V).$$

(Rappel $Ent(\mu_0|\nu_V) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty I(\mu_t|\nu_V)dt$)

2.1 Rappel sur l'inégalité de Talagrand classique

- Rappelons la notion de distance de Wasserstein. On considère des couplages π probabilité sur $\mathbb{R}^{2n}$ avec première marginale $\pi_1 = \mu$, et deuxième marginale $\pi_2 = \nu_V$. On définit :

$$d_W(\mu, \nu_V) = \inf\{\sqrt{\int d\pi(x,y) \sum_i |x_i - y_i|^2} \mid \pi_1 = \mu,\ \pi_2 = \nu_V\}.$$

- L'inégalité de Talagrand [Otto-Villani/Bobkov-Gentil-Ledoux] s'énonce alors :

$$d_W(\mu, \nu_V) \leq \sqrt{-\frac{2}{c} Ent(\mu|\nu_V)}.$$

2.2 Cas libre

Idée 1 dans le cas libre : prendre la limite de modèles de matrices aléatoires.
Obtenir des inégalités pour l' "Entopie libre microcanonique".

2.2 Cadre pour l'Entopie libre microcanonique de Voiculescu

- Soit $\mathcal{S}_R^n$ l'ensemble des états traciaux sur la C^*-algèbre produit libre universel $C([-R,R])^{*n} \supset \mathbb{C}\langle X_1, ..., X_n\rangle$ les polynômes non-commutatifs.
- Base de la topologie *-faible :

$$V_{\epsilon,K}(\tau) = \{\sigma \in \mathcal{S}_R^n | \ \forall m \text{ monomials of degree less than } K \\ |\tau(m(X_1,\ldots,X_n)) - \sigma(m(X_1,\ldots,X_n))| < \epsilon\}$$

- Ex : Pour n matrices aléatoires ($||M_i|| \leq R$) $M = (M_1,\ldots,M_n) \in (H_N^R)^n$ de loi μ on obtient $\tau_\mu \in \mathcal{S}_R^n$:

$$\tau_\mu(P) = E_\mu(\frac{1}{N} Tr(P(M_1, ..., M_n))), \quad \forall P \in \mathbb{C}\langle X_1, ..., X_n\rangle.$$

2.2 Cadre pour l'Entopie libre microcanonique de Voiculescu

- Soit $\mathcal{S}_R^n$ l'ensemble des états traciaux sur la C^*-algèbre produit libre universel $C([-R,R])^{*n} \supset \mathbb{C}\langle X_1,...,X_n\rangle$ les polynômes non-commutatifs.
- Base de la topologie *-faible :

$$V_{\epsilon,K}(\tau) = \{\sigma \in \mathcal{S}_R^n | \ \forall m \text{ monomials of degree less than } K \\ |\tau\left(m(X_1,\ldots,X_n)\right) - \sigma\left(m(X_1,\ldots,X_n)\right)| < \epsilon\}$$

- Ex : Pour n matrices aléatoires $(||M_i|| \leq R)$ $M = (M_1,\ldots,M_n) \in (H_N^R)^n$ de loi μ on obtient $\tau_\mu \in \mathcal{S}_R^n$:

$$\tau_\mu(P) = E_\mu(\frac{1}{N}Tr(P(M_1,...,M_n))), \quad \forall P \in \mathbb{C}\langle X_1,...,X_n\rangle.$$

2.2 Cadre pour l'Entopie libre microcanonique de Voiculescu

- Soit $\mathcal{S}_R^n$ l'ensemble des états traciaux sur la C^*-algèbre produit libre universel $C([-R,R])^{*n} \supset \mathbb{C}\langle X_1,...,X_n\rangle$ les polynômes non-commutatifs.
- Base de la topologie *-faible :

$$V_{\epsilon,K}(\tau) = \{\sigma \in \mathcal{S}_R^n | \ \forall m \text{ monomials of degree less than } K \\ |\tau(m(X_1,\dots,X_n)) - \sigma(m(X_1,\dots,X_n))| < \epsilon\}$$

- Ex : Pour n matrices aléatoires ($||M_i|| \leq R$) $M = (M_1,\dots,M_n) \in (H_N^R)^n$ de loi μ on obtient $\tau_\mu \in \mathcal{S}_R^n$:

$$\tau_\mu(P) = E_\mu(\frac{1}{N} Tr(P(M_1,...,M_n))), \quad \forall P \in \mathbb{C}\langle X_1,...,X_n\rangle.$$

- **Entopie libre microcanonique** : $\tau \in \mathcal{S}_R^n$

$$\chi_R(\tau) = \lim_{K\to\infty,\epsilon\to 0} \limsup_{N\to\infty} \left(\frac{1}{N^2} \sup_{\mu:\tau_\mu \in V_{\epsilon,K}(\tau)} Ent(\mu|Leb) + \frac{n}{2}\log N \right)$$

(originellement avec contrainte $d\mu/dLeb(M) \in \{0,\lambda\}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.)

- Cas 1 variable ($\tau \simeq \mu$ mesure supportée sur $[-R,R]$) :

$$\chi_R(\mu) = \int\int \log|x-y| d\mu(x)d\mu(y) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\log(2\pi).$$

2.3 LSI libre microcanonique

- LSI libre cas $n = 1$ relatif à ν_V $(V'' \geq c)$, $\mu = p(x)dx, p \in L^3$.

$$\chi(\mu|\nu_V) := \chi(\mu) - \mu(V) - (\chi(\nu_V) - \nu_V(V))$$

$$\Phi^*(\mu|\nu_V) := \int d\mu(x)|Hp(x) - V'(x)|^2$$

$$Hp(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int \frac{x-y}{(x-y)^2 + \epsilon^2} p(y)dy$$

- LSI libre [Biane] s'énonce :

$$-\chi(\mu|\nu_V) \leq \frac{1}{2c}\Phi^*(\mu|\nu_V).$$

2.3 Inégalité de Talagrand libre microcanonique

- La distance de Wasserstein non-commutative est définie par Biane and Voiculescu pour $\tau_j \in \mathcal{S}_R^n, j \in \{0,1\}$:

$$d_W(\tau_0,\tau_1)^2 = \inf\{\tau[\sum_i (X_i - X_{n+i})^2] : \tau \in \mathcal{S}_R^{2n}\ \tau|_{\mathbb{C}\langle X_{jn+1},\dots,X_{jn+n}\rangle} = \tau_j\}$$

- Inégalité de Talagrand libre pour χ [Biane-Voiculescu n=1, Hiai-Ueda $n \geq 1$], if $V = V_1(X_1) + \dots + V_n(X_n)$, $V_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe $V_i'' \geq c$, $\tau_{V_i} \sim \nu_{V_i}, \tau_V = \tau_{V_1} * \dots * \tau_{V_n}$:

$$d_W(\tau,\tau_V) \leq \sqrt{-\frac{2}{c}\chi(\tau|\tau_V)},$$

$$\chi(\tau|\tau_V) := \chi(\tau) - \tau(V) - \chi(\tau_V) + \tau_V(V).$$

- La distance de Wasserstein non-commutative est définie par Biane and Voiculescu pour $\tau_j \in \mathcal{S}_R^n, j \in \{0,1\}$:

$$d_W(\tau_0,\tau_1)^2 = \inf\{\tau[\sum_i (X_i - X_{n+i})^2] : \tau \in \mathcal{S}_R^{2n}\ \tau|_{\mathbb{C}\langle X_{jn+1},\dots,X_{jn+n}\rangle} = \tau_j\}$$

- Inégalité de Talagrand libre pour χ [Biane-Voiculescu n=1, Hiai-Ueda $n \geq 1$], if $V = V_1(X_1) + \dots + V_n(X_n)$, $V_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe $V_i'' \geq c$,$\tau_{V_i} \sim \nu_{V_i}, \tau_V = \tau_{V_1} * \dots * \tau_{V_n}$:

$$d_W(\tau,\tau_V) \leq \sqrt{-\frac{2}{c}\chi(\tau|\tau_V)},$$

$$\chi(\tau|\tau_V) := \chi(\tau) - \tau(V) - \chi(\tau_V) + \tau_V(V).$$

2.4 Problèmes

- But : Trouver une preuve probabilistique libre (d'analyse fonctionnelle sans matrices aléatoires) des inégalités précédentes. (+ améliorations: cas non-microcanonique relatif à B)
- Méthode : Calcul stochastique libre (et pas par transport monotone libre encore embryonnaire).
- Difficulté : La preuve classique de LSI par le critère Γ_2 de Bakry-Emery utilise fortement la commutativité :
  - la formule de Shannon avec $\rho \ln(\rho)$
  - Le Carré du champ Γ associé au semigroupe $\phi_t = e^{-t\Delta}$ de la diffusion brownienne de potentiel V $(\Gamma(a,b) = 1/2(\Delta(a)b + a\Delta(b) - \Delta(ab)))$

2.4 Problèmes

- But : Trouver une preuve probabilistique libre (d'analyse fonctionnelle sans matrices aléatoires) des inégalités précédentes. (+ améliorations: cas non-microcanonique relatif à B)
- Méthode : Calcul stochastique libre (et pas par transport monotone libre encore embryonnaire).
- Difficulté : La preuve classique de LSI par le critère Γ_2 de Bakry-Emery utilise fortement la commutativité :
  - la formule de Shannon avec $\rho \ln(\rho)$
  - Le Carré du champ Γ associé au semigroupe $\phi_t = e^{-t\Delta}$ de la diffusion brownienne de potentiel V
  $(\Gamma(a, b) = 1/2(\Delta(a)b + a\Delta(b) - \Delta(ab)))$

Plan

1. Rappels de probabilités libres.
   - Probabilités libres comme limite de matrices aléatoires
   - Etats de Gibbs libres
   - Mouvement brownien libre et EDS libres
2. Entropie (libre), inégalités de Log-Sobolev et Talagrand.
   - Rappels dans le cas classique
   - Entropie libre microcanonique (via matrices aléatoires)
   - Inégalités de Log-Sobolev and Talagrand connues pour l'entropie libre microcanonique
3. Inégalités pour l'entropie libre non-microcanonique.
   - Rappels sur l'entropie libre non-microcanonique.
   - Inégalités de Log-Sobolev libres non-microcanoniques pour états de Gibbs à potentiel convexe
   - Inégalités de Talagrand libres non-microcanoniques.

- **L'entropie libre non-microcanonique** χ^* donne une formule alternative pour l'entropie libre utilisant les EDS libres et l'information de Fisher libre.
- On s'attend à ce qu'elle soit égale.
- On sait juste $\chi \leq \chi^*$ par un résultat de [Biane-Capitaine-Guionnet], même $\chi(\tau_V) = \chi^*(\tau_V)$ inconnu pour $V = V_0 + \beta W, \beta \neq 0$.
- Définition par l'analogue libre de la formule :

$$Ent(\mu_0|\nu_V) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty I(\mu_t|\nu_V)dt$$

- On part de $\tau \in \mathcal{S}_R^n$ donnant un état sur $\mathcal{C} = \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n \rangle$.
- On définit la **différence divisée libre** $\partial_i : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ l'unique dérivation avec : $\partial_i(X_j) = 1 \otimes 1\delta_{i=j}$.
- On regarde $\partial_i : L^2(\mathcal{C}, \tau) \to L^2(\mathcal{C}, \tau) \otimes L^2(\mathcal{C}, \tau)(||a||_2^2 = \tau(a^*a))$.
- On définit la **variable conjuguée** (analogue libre de la fonction score)

$$\xi_i = \partial_i^* 1 \otimes 1 \in L^2(M, \tau)$$

  si elle existe.
- L'information de Fisher libre est alors définie par :

$$\Phi^*(\tau) = \sum_{i=1}^{n} ||\xi_i||_2^2,$$

  ou, pour l'analogue relatif à un potentiel, par :

$$\Phi_V^*(\tau) = \Phi_V^*(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} ||\xi_i - D_i V(X_1, \dots, X_n)||_2^2.$$

- Un état de Gibbs libre a donc $\Phi_V^*(\tau_V) = 0$.

- Soit la solution forte de l'EDS :

$$X_{i,t} = X_{i,0} - \frac{1}{2}\int_0^t ds X_{i,s} + S_{i,t},$$

$S_{i,t}$ mouvement brownien libre, et $\xi_{i,t}$ variable conjuguée pour $X_{1,s}, \ldots, X_{n,s}$ (de loi τ_s), **l'entropie libre** (relative aux variables semicirculaires, $V_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n X_i^2$) est définie par :

$$\begin{aligned}\chi^*(X_{1,0}, \ldots, X_{n,0}|\tau_{V_0}) &= \chi^*(X_{1,0}, \ldots, X_{n,0}) - \frac{1}{2}\sum_i \tau(X_{i,0}^2) - \frac{n}{2}\log(2\pi) \\ &:= -\int_0^\infty \sum_i \frac{1}{2}\|\xi_{i,t} - X_{i,t}\|_2^2 dt \\ &= -\int_0^\infty \frac{1}{2}\Phi^*_{V_0}(\tau_t)dt\end{aligned}$$

- Rappel dans le cas $V_0 = \frac{1}{2}\sum_i X_i^2$ [Voiculescu] :

Theorem (Voiculescu)

$$-\chi^*(X_{1,0},\ldots,X_{n,0}|\tau_{V_0}) \leq \frac{1}{2}\Phi^*_{V_0}(X_{1,0},\ldots,X_{n,0}).$$

- Point clef de la preuve de Voiculescu : Calculer la variable conjuguée $\xi_{i,t}$ pour

$$X_{i,t} = X_i - \frac{1}{2}\int_0^t ds X_{i,s} + S_{i,t}$$

d'une façon particulière.

- Rappel dans le cas $V_0 = \frac{1}{2}\sum_i X_i^2$ [Voiculescu] :

Theorem (Voiculescu)

$$-\chi^*(X_{1,0}, \ldots, X_{n,0}|\tau_{V_0}) \leq \frac{1}{2}\Phi^*_{V_0}(X_{1,0}, \ldots, X_{n,0}).$$

- Point clef de la preuve de Voiculescu : Calculer la variable conjuguée $\xi_{i,t}$ pour

$$X_{i,t} = X_i - \frac{1}{2}\int_0^t dsX_{i,s} + S_{i,t}$$

d'une façon particulière.

- En loi $X_{i,t} \simeq e^{-t/2}X_i + \sqrt{1-e^{-t}}S_{i,1} = \hat{X}_{i,t}$, et dans ce modèle la variable conjuguée est donnée par différente formule :

-(i) $\hat{\xi}_{i,t} = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-t}}} E_{W^*(\hat{X}_{1,t},\ldots,\hat{X}_{n,t})}(S_{i,1})$ (utilisée dans la définition de $\chi^*(.|\tau_{V_0})$ pour avoir existence de $\hat{\xi}_{i,t}$)

-(ii) $\hat{\xi}_{i,t} = E_{W^*(\hat{X}_{1,t},\ldots,\hat{X}_{n,t})}(e^{-t/2}\xi_i + \sqrt{1-e^{-t}}S_{i,1})$

- Le point crucial est que l'on peut alors écrire $\hat{\xi}_{i,t} - \hat{X}_{i,t} = e^{-t/2}E_{W^*(\hat{X}_{1,t},\ldots,\hat{X}_{n,t})}(\hat{\xi}_{i,0} - \hat{X}_{i,0})$ et estimer : $||\hat{\xi}_{i,t} - \hat{X}_{i,t}||_2^2 \leq e^{-t}||\hat{\xi}_{i,0} - \hat{X}_{i,0}||_2^2$

- Formulation en terme d'EDS :$\xi_{i,t} = E_{W^*(X_{1,t},\ldots,X_{n,t})}(\tilde{\xi}_{i,t})$ avec

$$\tilde{\xi}_{i,t} = \xi_{i,0} - \frac{1}{2}\int_0^t ds\tilde{\xi}_{i,s} + S_{i,t}.$$

L'inégalité vient alors du lemme de Gronwall puisque $\tilde{\xi}_{i,t} - X_{i,t} = (\xi_{i,0} - X_{i,0}) - \frac{1}{2}\int_0^t ds(\tilde{\xi}_{i,s} - X_{i,s})$.

3.2 LSI libre : Cas potentiel quadratique

- En loi $X_{i,t} \simeq e^{-t/2}X_i + \sqrt{1-e^{-t}}S_{i,1} = \hat{X}_{i,t}$, et dans ce modèle la variable conjuguée est donnée par différente formule :

-(i) $\hat{\xi}_{i,t} = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-t}}} E_{W^*(\hat{X}_{1,t},\ldots,\hat{X}_{n,t})}(S_{i,1})$ (utilisée dans la définition de $\chi^*(.|\tau_{V_0})$ pour avoir existence de $\hat{\xi}_{i,t}$)

-(ii) $\hat{\xi}_{i,t} = E_{W^*(\hat{X}_{1,t},\ldots,\hat{X}_{n,t})}(e^{-t/2}\xi_i + \sqrt{1-e^{-t}}S_{i,1})$

- Le point crucial est que l'on peut alors écrire $\hat{\xi}_{i,t} - \hat{X}_{i,t} = e^{-t/2} E_{W^*(\hat{X}_{1,t},\ldots,\hat{X}_{n,t})}(\hat{\xi}_{i,0} - \hat{X}_{i,0})$ et estimer : $||\hat{\xi}_{i,t} - \hat{X}_{i,t}||_2^2 \leq e^{-t}||\hat{\xi}_{i,0} - \hat{X}_{i,0}||_2^2$
- Formulation en terme d'EDS :$\xi_{i,t} = E_{W^*(X_{1,t},\ldots,X_{n,t})}(\tilde{\xi}_{i,t})$ avec

$$\tilde{\xi}_{i,t} = \xi_{i,0} - \frac{1}{2}\int_0^t ds\tilde{\xi}_{i,s} + S_{i,t}.$$

L'inégalité vient alors du lemme de Gronwall puisque $\tilde{\xi}_{i,t} - X_{i,t} = (\xi_{i,0} - X_{i,0}) - \frac{1}{2}\int_0^t ds(\tilde{\xi}_{i,s} - X_{i,s})$.

- Soit plus générallement un polynôme non-commutatif $V = V^*$ (et toujours $D_i V = m \circ \sigma \partial_i V$). Soit donnée une solution de :

$$X_{i,t} = X_i - \frac{1}{2}\int_0^t dsD_i V(X_{1,s}, ..., X_{n,s}) + S_{i,t}$$

  Alors on a une formule de la variable conjuguée modelée pour s'approcher de $D_i V(X_{1,s}, ..., X_{n,s})$ (rappelons la notation $(a \otimes b)\#c = acb$)

Theorem (D.)

$X_{1,t},...,X_{n,t}$ ci-dessus ont une variable conjuguée ξ_t^i for $t > 0$ (dans M). Si on suppose de plus le résultat vrai pour $t = 0$ et si on considère la solution $\tilde{\xi}_{V,t}^i = \tilde{\xi}_t^i - D_i V(X_{1,t},...,X_{n,t})$ de l'EDS linéaire :

$$\tilde{\xi}_{V,t}^i = \tilde{\xi}_{V,0}^i - 1/2 \sum_j \int_0^t \partial_j (D_i V(X_s)) \# (\tilde{\xi}_{V,s}^j) ds.$$

Alors $\xi_s^i = E_{W^*(X_{1,s},...,X_{n,s})}(\tilde{\xi}_s^i)$ est la i-ème variable conjuguée de $(X_{1,s},...,X_{n,s})$.
Si de plus $(\partial_j D_i V)_{ij} \geq c(1 \otimes 1 1_{i=j})_{ij}$ in $M_n(\mathcal{C} \otimes_{alg} \mathcal{C}^{op})$, alors l'infirmation de Fisher libre relative à V : $\Phi_V^*(X^1,...,X^n) = \sum_i \|\xi^i - DV_i\|_2^2$ vérifie

$$\Phi_V^*(X_t^1,...,X_t^n) \leq e^{-c(t-s)} \Phi_V^*(X_s^1,...,X_s^n).$$

3.2 LSI libre : Cas potentiel convexe

Theorem (D.)

$X_{1,t}, \ldots, X_{n,t}$ ci-dessus ont une variable conjuguée ξ_t^i for $t > 0$ (dans M). Si on suppose de plus le résultat vrai pour $t = 0$ et si on considère la solution $\tilde{\xi}_{V,t}^i = \tilde{\xi}_t^i - D_i V(X_{1,t}, \ldots, X_{n,t})$ de l'EDS linéaire :

$$\tilde{\xi}_{V,t}^i = \tilde{\xi}_{V,0}^i - 1/2 \sum_j \int_0^t \partial_j (D_i V(X_s)) \# (\tilde{\xi}_{V,s}^j) ds.$$

Alors $\xi_s^i = E_{W^*(X_{1,s}, \ldots, X_{n,s})}(\tilde{\xi}_s^i)$ est la i-ème variable conjuguée de $(X_{1,s}, \ldots, X_{n,s})$.
Si de plus $(\partial_j D_i V)_{ij} \geq c(1 \otimes 1 1_{i=j})_{ij}$ in $M_n(\mathcal{C} \otimes_{alg} \mathcal{C}^{op})$, alors l'infirmation de Fisher libre relative à V :
$\Phi_V^*(X^1, \ldots, X^n) = \sum_i \|\xi^i - DV_i\|_2^2$ vérifie

$$\Phi_V^*(X_t^1, \ldots, X_t^n) \leq e^{-c(t-s)} \Phi_V^*(X_s^1, \ldots, X_s^n).$$

3.2 LSI libre : Cas potentiel convexe

$$X_{i,t} = X_{i,0} - \frac{1}{2}\int_0^t ds D_i V(X_{1,s}, \dots, X_{n,s}) + S_{i,t}$$

On peut définir l'entropie libre relative à V par :

$$\chi^*(X_{1,0}, \dots, X_{n,0}|\tau_V) := -\int_0^\infty \frac{1}{2}||\xi_{i,t} - D_i V(X_{1,t}, \dots, X_{n,t})||_2^2 dt$$

- On remarque alors que l'on a la forme usuelle de LSI pour un potentiel convexe ($c > 0$)

$$-\chi^*(X_1, \dots, X_n|\tau_V) \leq \frac{1}{2c}\sum_i ||\xi_i - D_i V(X_1, \dots, X_n)||^2$$

- Conjecture : On s'attend à avoir la relation (classiquement équivalente à un changement de variable) inconnue pour χ^* :

$$\chi^*(X_{1,0}, \dots, X_{n,0}|\tau_V) = \chi^*(X_{1,0}, \dots, X_{n,0}) - \tau(V(X_{1,0}, \dots, X_{n,0})) - C.$$

Theorem (D.)

Soit V comme précédemment et τ_V l'état de Gibbs libre, alors :

$$d_W(\tau, \tau_V) \leq \sqrt{-\frac{2}{c}\chi^*(\tau|\tau_V)}$$

Rmq : Ceci généralise la variante avec entropie libre χ puisque :$\chi^*(\tau|\tau_V) \geq \chi(\tau|\tau_V) := \chi(\tau) - \tau(V(X)) - C$.

Idée de preuve [suivant Otto-Villani/Biane-Voiculescu $n = 1$]: Soit un solution (faible) stationnaire de l'EDS libre $(t \geq s)$:

$$Y_t^{(i)} = Y_s^{(i)} - \frac{1}{2}\int_s^t \xi_u^{Y(i)} du + S_t^{(i)} - S_s^{(i)} \ avec \ \ Y_s^{(i)} = X_s^{(i)}.$$

Rappel : $X_t^{(i)} = X^{(i)} - \frac{1}{2}\int_0^t dsD_iV(X_s^{(1)}, ..., X_s^{(n)}) + S_t^{(i)}$. On en déduit une estimée infinitésimale pour la distance de Wasserstein :

$$d_W((X(t)), (X(s))^2 \leq \frac{(t-s)^2}{4}\Phi_V^*(X_s^1, ..., X_s^n) + o((t-s)^2).$$

Theorem (D.)

Soit V comme précédemment et τ_V l'état de Gibbs libre, alors :

$$d_W(\tau, \tau_V) \leq \sqrt{-\frac{2}{c}\chi^*(\tau|\tau_V)}$$

Rmq : Ceci généralise la variante avec entropie libre χ puisque :$\chi^*(\tau|\tau_V) \geq \chi(\tau|\tau_V) := \chi(\tau) - \tau(V(X)) - C$.

Idée de preuve [suivant Otto-Villani/Biane-Voiculescu $n = 1$]: Soit un solution (faible) stationnaire de l'EDS libre $(t \geq s)$:

$$Y_t^{(i)} = Y_s^{(i)} - \frac{1}{2}\int_s^t \xi_u^{Y(i)} du + S_t^{(i)} - S_s^{(i)} \text{ avec } \; Y_s^{(i)} = X_s^{(i)}.$$

Rappel : $X_t^{(i)} = X^{(i)} - \frac{1}{2}\int_0^t dsD_iV(X_s^{(1)}, ..., X_s^{(n)}) + S_t^{(i)}$. On en déduit une estimée infinitésimale pour la distance de Wasserstein :

$$d_W((X(t)), (X(s))^2 \leq \frac{(t-s)^2}{4}\Phi_V^*(X_s^1, ..., X_s^n) + o((t-s)^2).$$

On calcule en dérivant (pour X de loi τ_V):

$$\frac{d}{d\epsilon}f(\epsilon) := \frac{d}{d\epsilon}\left(d_W(X(t+\epsilon),X) - (-\frac{2}{c}\chi^*(X(t+\epsilon)|\tau_V))^{1/2}\right)$$
$$\geq -\frac{1}{2}(\Phi_V^*(X(t)))^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{8c}}(\Phi_V^*(X(t)))(-\chi^*(X(t)|\tau_V))^{-1/2}$$
$$\geq 0.$$

avec la dernière inégalité venant de LSI libre. On obtient donc une fonction croissante et l'inégalité tend vers l'inégalité voulue $f(0) \leq f(+\infty) = 0$.

Conclusion

- Question : Peut-on obtenir les LSI libres par un critère du type Γ_2 de Bakry-Emery?
- En particulier si on considère $\Gamma : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}^{op}$ donnée (pour $P, Q \in \mathcal{C}$) par :

$$\Gamma^{\otimes}(P,Q) = \sum_i \partial_i(P) \# \sigma(\partial_i(Q))$$

(avec $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$ et $(a \otimes b)\#(c \otimes d) = ac \otimes db$)

- Ceci est relié au générateur Δ (comme class. si $S = 1$) du semigroupe $e^{-t\Delta/2}$ de la diffusion brownienne libre (pour $R, S \in \mathcal{C}$) :

$$\tau \otimes \tau[(\Gamma^{\otimes}(P,Q)(R^* \otimes S^*)] \\ = \frac{1}{2}\tau(R^*(\Delta(PS^*)Q + P\Delta(S^*Q) - \Delta(PS^*Q) - P\Delta(S^*)Q).$$

Conclusion

- De plus, si on définit (avec $\Delta^{\otimes} = \Delta \otimes 1 + 1 \otimes \Delta$) :

$$\Gamma_2^{\otimes}(P, Q) = \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\otimes}(\Delta(P), Q) + \Gamma^{\otimes}(P, \Delta(Q)) - \Delta^{\otimes}(\Gamma^{\otimes}(P, Q))\right)$$

  Alors pour V potentiel c-convexe, on a un analogue du critère Γ_2 qui est vérifié:

$$\Gamma_2^{\otimes}(P, P^*) \geq c\Gamma^{\otimes}(P, P^*)$$

- Question : Peut-on obtenir les LSI libres par un critère du type Γ_2 de Bakry-Emery? Peut-on améliorer le résultat par estimée sur $\partial_i g$ si $\xi_i = D_i g$?

Merci de votre attention.
Et bon appétit !

Conclusion

- De plus, si on définit (avec $\Delta^{\otimes} = \Delta \otimes 1 + 1 \otimes \Delta$) :

  $$\Gamma_2^{\otimes}(P,Q) = \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\otimes}(\Delta(P),Q) + \Gamma^{\otimes}(P,\Delta(Q)) - \Delta^{\otimes}(\Gamma^{\otimes}(P,Q))\right)$$

  Alors pour V potentiel c-convexe, on a un analogue du critère Γ_2 qui est vérifié:

  $$\Gamma_2^{\otimes}(P,P^*) \geq c\Gamma^{\otimes}(P,P^*)$$

- Question : Peut-on obtenir les LSI libres par un critère du type Γ_2 de Bakry-Emery? Peut-on améliorer le résultat par estimée sur $\partial_i g$ si $\xi_i = D_i g$?

Merci de votre attention.
Et bon appétit !