Courbure de Ricci positive et inégalités de Poincaré : le cas des graphes

Hervé Pajot

Institut Fourier
Université de Grenoble I

Lyon, septembre 2012

Le cas riemannien (P. Buser)

Soit M une variété riemannienne complète (de dimension n) à courbure de Ricci positive. Alors, M supporte une inégalité de Poincaré :

Le cas riemannien (P. Buser)

Soit M une variété riemannienne complète (de dimension n) à courbure de Ricci positive. Alors, M supporte une inégalité de Poincaré : pour toute boule $B \subset M$, toute fonction lisse $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$,

Le cas riemannien (P. Buser)

Soit M une variété riemannienne complète (de dimension n) à courbure de Ricci positive. Alors, M supporte une inégalité de Poincaré : pour toute boule $B \subset M$, toute fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}$,

$$\int_B |f(x) - f_B| dx \leq 2^n \mathrm{diam} B \int_{2B} |\nabla f(x)| dx$$

où $f_B = 1/vol(B) \int_B f dx$.

Le cas riemannien (P. Buser)

Soit M une variété riemannienne complète (de dimension n) à courbure de Ricci positive. Alors, M supporte une inégalité de Poincaré : pour toute boule $B \subset M$, toute fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}$,

$$\int_B |f(x) - f_B| dx \leq 2^n \mathrm{diam} B \int_{2B} |\nabla f(x)| dx$$

où $f_B = 1/vol(B) \int_B f dx$.

Question : Peut-on étendre ce résultat à d'autres cadres (par exemple, les graphes discrets, les espaces métriques, ...) ?

Estimation principale dans le cas riemannien

Soit M une variété riemannienne complète (de dimension n) à courbure de Ricci positive.

Estimation principale dans le cas riemannien

Soit M une variété riemannienne complète (de dimension n) à courbure de Ricci positive.
On note $\gamma_{x,y} : [0, d(x,y)] \longrightarrow M$ une géodésique reliant x et y dans M.

Estimation principale dans le cas riemannien

Soit M une variété riemannienne complète (de dimension n) à courbure de Ricci positive.
On note $\gamma_{x,y} : [0, d(x,y)] \longrightarrow M$ une géodésique reliant x et y dans M.

On pose $\phi_{x,t}(y) = \gamma_{x,y}(t)$ pour tout $t \in [0, d(x,y)]$.

Estimation principale dans le cas riemannien

Soit M une variété riemannienne complète (de dimension n) à courbure de Ricci positive.
On note $\gamma_{x,y} : [0, d(x,y)] \to M$ une géodésique reliant x et y dans M.

On pose $\phi_{x,t}(y) = \gamma_{x,y}(t)$ pour tout $t \in [0, d(x,y)]$.

Alors, si $J_{x,t}(y)$ est le jacobien de $\phi_{x,t}(y)$, $J_{x,t}(y) \geq 2^{-n+1}$ où x, $y \in M$, $t \in [d(x,y)/2, d(x,y)]$.

Estimation principale dans le cas riemannien

Soit M une variété riemannienne complète (de dimension n) à courbure de Ricci positive.
On note $\gamma_{x,y} : [0, d(x,y)] \to M$ une géodésique reliant x et y dans M.

On pose $\phi_{x,t}(y) = \gamma_{x,y}(t)$ pour tout $t \in [0, d(x,y)]$.

Alors, si $J_{x,t}(y)$ est le jacobien de $\phi_{x,t}(y)$, $J_{x,t}(y) \geq 2^{-n+1}$ où x, $y \in M$, $t \in [d(x,y)/2, d(x,y)]$.

Ceci se démontre en adaptant les arguments de la preuve du théorème de comparaison de Bishop-Gromov

Le cas de la condition de Bakry-Emery (I)

Soit M une variété riemannienne (lisse) de dimension n.

Le cas de la condition de Bakry-Emery (I)

Soit M une variété riemannienne (lisse) de dimension n.

Soit L un opérateur elliptique du second ordre (sans terme d'ordre 0) :

Le cas de la condition de Bakry-Emery (I)

Soit M une variété riemannienne (lisse) de dimension n.

Soit L un opérateur elliptique du second ordre (sans terme d'ordre 0) :

$$Lf(x) = \sum_{i,j} g^{i,j}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b^i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Le cas de la condition de Bakry-Emery (I)

Soit M une variété riemannienne (lisse) de dimension n.

Soit L un opérateur elliptique du second ordre (sans terme d'ordre 0) :

$$Lf(x) = \sum_{i,j} g^{i,j}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b^i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Posons $\Gamma(u, v) = 1/2\,(L(uv) - uL(v) - vL(u))$

Le cas de la condition de Bakry-Emery (I)

Soit M une variété riemannienne (lisse) de dimension n.

Soit L un opérateur elliptique du second ordre (sans terme d'ordre 0) :

$$Lf(x) = \sum_{i,j} g^{i,j}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b^i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Posons $\Gamma(u,v) = 1/2\,(L(uv) - uL(v) - vL(u))$

Puis, par itération, on obtient :
$\Gamma_2(u,v) = 1/2\,(L\Gamma(u,v) - \Gamma(u,Lv) - \Gamma(Lu,v))$

Le cas de la condition de Bakry-Emery (II)

Soit $(g_{i,j}(x))$ la métrique qui est l'inverse de la matrice $(g^{i,j}(x))$.

Le cas de la condition de Bakry-Emery (II)

Soit $(g_{i,j}(x))$ la métrique qui est l'inverse de la matrice $(g^{i,j}(x))$.

Supposons que L vérfie la condition $CD(0, N)$ pour un $N \geq n$: $\Gamma_2(u, u)(x) \geq 1/N(Lu)(x)^2$.

Le cas de la condition de Bakry-Emery (II)

Soit $(g_{i,j}(x))$ la métrique qui est l'inverse de la matrice $(g^{i,j}(x))$.

Supposons que L vérfie la condition $CD(0, N)$ pour un $N \geq n$:
$\Gamma_2(u, u)(x) \geq 1/N(Lu)(x)^2$.

Alors, muni de cette structure riemannienne, M supporte une inégalité de type Poincaré : il existe une constante $C \geq 0$ telle que

Le cas de la condition de Bakry-Emery (II)

Soit $(g_{i,j}(x))$ la métrique qui est l'inverse de la matrice $(g^{i,j}(x))$.

Supposons que L vérfie la condition $CD(0, N)$ pour un $N \geq n$: $\Gamma_2(u, u)(x) \geq 1/N(Lu)(x)^2$.

Alors, muni de cette structure riemannienne, M supporte une inégalité de type Poincaré : il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\int_B |u - u_B| dm \leq C \mathrm{diam} B \int_{2B} g dm$$

Le cas de la condition de Bakry-Emery (II)

Soit $(g_{i,j}(x))$ la métrique qui est l'inverse de la matrice $(g^{i,j}(x))$.

Supposons que L vérfie la condition $CD(0, N)$ pour un $N \geq n$: $\Gamma_2(u, u)(x) \geq 1/N(Lu)(x)^2$.

Alors, muni de cette structure riemannienne, M supporte une inégalité de type Poincaré : il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\int_B |u - u_B| dm \leq C \mathrm{diam} B \int_{2B} g dm$$

où B est une boule dans M et $g = |\Gamma(u, u)|^{1/2}$.

Le cas de la condition de Bakry-Emery (II)

Soit $(g_{i,j}(x))$ la métrique qui est l'inverse de la matrice $(g^{i,j}(x))$.

Supposons que L vérfie la condition $CD(0, N)$ pour un $N \geq n$: $\Gamma_2(u, u)(x) \geq 1/N(Lu)(x)^2$.

Alors, muni de cette structure riemannienne, M supporte une inégalité de type Poincaré : il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\int_B |u - u_B| dm \leq C \mathrm{diam} B \int_{2B} g dm$$

où B est une boule dans M et $g = |\Gamma(u, u)|^{1/2}$.

Preuve : Adapter la preuve précédente en utilisant la version du théorème de Bishop-Gromov due à Bakry et Qian

Inégalité de Poincaré dans les espaces métriques continus

Soit (X, d, m) un espace métrique mesuré (muni d'une mesure doublante).

Inégalité de Poincaré dans les espaces métriques continus

Soit (X, d, m) un espace métrique mesuré (muni d'une mesure doublante).

On dit que X supporte une inégalité de Poincaré s'il existe des constantes $C \geq 0$ et $\tau \geq 1$ telles que

Inégalité de Poincaré dans les espaces métriques continus

Soit (X, d, m) un espace métrique mesuré (muni d'une mesure doublante).

On dit que X supporte une inégalité de Poincaré s'il existe des constantes $C \geq 0$ et $\tau \geq 1$ telles que

$$\int_B |f(x) - f_B| dm(x) \leq C \text{diam} B \int_{\tau \dot{B}} \rho dm$$

Inégalité de Poincaré dans les espaces métriques continus

Soit (X, d, m) un espace métrique mesuré (muni d'une mesure doublante).

On dit que X supporte une inégalité de Poincaré s'il existe des constantes $C \geq 0$ et $\tau \geq 1$ telles que

$$\int_B |f(x) - f_B| dm(x) \leq C \mathrm{diam} B \int_{\tau \dot{B}} \rho dm$$

où B est une boule dans X, $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et $\rho : X \to \mathbb{R}^+$ est un gradient supérieur de f dans B.

Inégalité de Poincaré dans les espaces géodésiques à courbure de Ricci positive

Théorème (Rajala) : Tout espace geodésique mesuré à courbure de Ricci positive (au sens de Lott-Villani ou au sens de Sturm) supporte une inégalité de Poincaré.

Inégalité de Poincaré dans les espaces géodésiques à courbure de Ricci positive

Théorème (Rajala) : Tout espace geodésique mesuré à courbure de Ricci positive (au sens de Lott-Villani ou au sens de Sturm) supporte une inégalité de Poincaré.

Lemme principal (Cas Lott-Villani) : Soit μ_0, $\mu_1 \in \mathcal{P}^{ac}(X)$ des mesures de probabilité de densité bornée ρ_0, ρ_1 avec $W_2(\mu_0, \mu_1) < \infty$. Alors, il existe $\Pi \in GeoOpt(\mu_0, \mu_1)$ de sorte que pour tout $t \in [0, 1]$, $||\rho_t||_\infty \leq \max(||\rho_0||_\infty, ||\rho_1||_\infty)$ où ρ_t est la densité de $e_t * \Pi$ par rapport à m.

Le cadre discret

Soit $G = (V, E)$ un graphe (infini, connexe, à valence bornée).

Le cadre discret

Soit $G = (V, E)$ un graphe (infini, connexe, à valence bornée).

On écrit $x \sim y$ si $(x, y) \in E$. On munit le graphe G de poids : $m_{xy} = m_{yx} > 0$ si $x \sim y$ et $m_{xy} = 0$ sinon. On pose $m(x) = \sum_{y \sim x} m_{xy}$ et $p(x, y) = m_{xy}/m(x)$.

Le cadre discret

Soit $G = (V, E)$ un graphe (infini, connexe, à valence bornée).

On écrit $x \sim y$ si $(x, y) \in E$. On munit le graphe G de poids : $m_{xy} = m_{yx} > 0$ si $x \sim y$ et $m_{xy} = 0$ sinon. On pose $m(x) = \sum_{y \sim x} m_{xy}$ et $p(x, y) = m_{xy}/m(x)$.

Volume des boules : $V(x, n) = m(B(x, n)) = \sum_{y \in B(x,n)} m(y)$ où $B(x, n)$ est la boule de centre $x \in X$ et de rayon $n \in \mathbb{N}^*$ pour la distance géodésique sur G.

Le cadre discret

Soit $G = (V, E)$ un graphe (infini, connexe, à valence bornée).

On écrit $x \sim y$ si $(x, y) \in E$. On munit le graphe G de poids : $m_{xy} = m_{yx} > 0$ si $x \sim y$ et $m_{xy} = 0$ sinon. On pose $m(x) = \sum_{y \sim x} m_{xy}$ et $p(x, y) = m_{xy}/m(x)$.

Volume des boules : $V(x, n) = m(B(x, n)) = \sum_{y \in B(x,n)} m(y)$ où $B(x, n)$ est la boule de centre $x \in X$ et de rayon $n \in \mathbb{N}^*$ pour la distance géodésique sur G.

On dit que G vérifie la condition (R) s'il existe une constante $p_0 > 0$ telle que $p(x, y) \geq p_0$ si $x \sim y$.

Le cadre discret

Soit $G = (V, E)$ un graphe (infini, connexe, à valence bornée).

On écrit $x \sim y$ si $(x, y) \in E$. On munit le graphe G de poids : $m_{xy} = m_{yx} > 0$ si $x \sim y$ et $m_{xy} = 0$ sinon. On pose $m(x) = \sum_{y \sim x} m_{xy}$ et $p(x, y) = m_{xy}/m(x)$.

Volume des boules : $V(x, n) = m(B(x, n)) = \sum_{y \in B(x,n)} m(y)$ où $B(x, n)$ est la boule de centre $x \in X$ et de rayon $n \in \mathbb{N}^*$ pour la distance géodésique sur G.

On dit que G vérifie la condition (R) s'il existe une constante $p_0 > 0$ telle que $p(x, y) \geq p_0$ si $x \sim y$.

Cas non pondéré : $m_{x,y} = 1$ pour toute arête $(x, y) \in E$. Alors, $m(x)$ est le nombre de voisins de x et m est la mesure de comptage.

Graphes de Cayley

Soit Γ un groupe finiment engendré. On considère une partie génératrice (symétrique) S de Γ.

Graphes de Cayley

Soit Γ un groupe finiment engendré. On considère une partie génératrice (symétrique) S de Γ.

Le graphe de Cayley associé $G(\Gamma, S)$ est le graphe dont les sommets sont les élément de Γ et tel que $\gamma_1 \sim \gamma_2$ s'il existe $s \in S$ tel que $\gamma_2 = \gamma_1 s$.

Graphes de Cayley

Soit Γ un groupe finiment engendré. On considère une partie génératrice (symétrique) S de Γ.

Le graphe de Cayley associé $G(\Gamma, S)$ est le graphe dont les sommets sont les élément de Γ et tel que $\gamma_1 \sim \gamma_2$ s'il existe $s \in S$ tel que $\gamma_2 = \gamma_1 s$.

Le graphe G est à croissance polynomiale s'il existe des constantes $Q > 0$ et $C > 0$ telles que

$$C^{-1} r^Q \leq V(x, r) \leq C r^Q$$

pour tout $x \in G$, tout $r > 0$.

Inégalité de Poincaré dans les graphes

On dit que le graphe G supporte une inégalité de Poincaré s'il existe des constantes $C \geq 0$ et $\tau \geq 1$ telles que

Inégalité de Poincaré dans les graphes

On dit que le graphe G supporte une inégalité de Poincaré s'il existe des constantes $C \geq 0$ et $\tau \geq 1$ telles que

$$\sum_{y \in B(x,n)} |f(y) - f_n(x)| m(y) \leq C \sum_{y \in B(x,\tau n)} |\nabla f|(y) m(y)$$

Inégalité de Poincaré dans les graphes

On dit que le graphe G supporte une inégalité de Poincaré s'il existe des constantes $C \geq 0$ et $\tau \geq 1$ telles que

$$\sum_{y \in B(x,n)} |f(y) - f_n(x)| m(y) \leq C \sum_{y \in B(x,\tau n)} |\nabla f|(y) m(y)$$

où $x \in G$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f : G \to \mathbb{R}$ et $|\nabla f|$ est la longueur du gradient de f.

Inégalité de Poincaré dans les graphes

On dit que le graphe G supporte une inégalité de Poincaré s'il existe des constantes $C \geq 0$ et $\tau \geq 1$ telles que

$$\sum_{y \in B(x,n)} |f(y) - f_n(x)| m(y) \leq C \sum_{y \in B(x,\tau n)} |\nabla f|(y) m(y)$$

où $x \in G$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f : G \to \mathbb{R}$ et $|\nabla f|$ est la longueur du gradient de f.

Ici, $f_n(x) = 1/V(x,n) \sum_{y \in B(x,n)} f(y) m(y)$ et
$|\nabla f|(x) = \sum_{y \sim x} |f(y) - f(x)|$ ou
$|\nabla f|(x) = \left(\sum_{y \sim x} |f(y) - f(x)|^2 p(x,y) \right)^{1/2}$.

Une application

Théorème (Gromov) : Soit G un groupe à croissance (faiblement) polynomiale. Alors, G est (virtuellement) nilpotent.

Une application

Théorème (Gromov) : Soit G un groupe à croissance (faiblement) polynomiale. Alors, G est (virtuellement) nilpotent.

La preuve récente de Kleiner repose sur une inégalité de type Poincaré qui est vraie pour tout graphe de Cayley d'un groupe finiment engendré.

Une application

Théorème (Gromov) : Soit G un groupe à croissance (faiblement) polynomiale. Alors, G est (virtuellement) nilpotent.

La preuve récente de Kleiner repose sur une inégalité de type Poincaré qui est vraie pour tout graphe de Cayley d'un groupe finiment engendré.

Ceci permet de contrôler la dimension de l'espace des fonctions harmoniques à croissance polynomiale sur le graphe de Cayley d'un groupe à croissance (faiblement) polynomiale (Version discrète d'un résultat de Colding-Minicozzi).

Graphes à courbure positive au sens de Coulhon/Saloff-Coste

On dit que le graphe non pondéré G est de courbure positive au sens de Coulhon/Saloff-Coste s'il existe une constante $C \geq 0$ et un choix de chemins geodesiques γ_{yz} (reliant y et z dans G) de sorte que $K(x,n) = 1/V(x,n)\ \sup_{e \in E \cap B(x,2n)} \mathrm{card}\{\gamma_{y,z}; e \in \gamma_{yz}, y, z \in B(x,n)\} \leq Cn$ où $x \in V$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Graphes à courbure positive au sens de Coulhon/Saloff-Coste

On dit que le graphe non pondéré G est de courbure positive au sens de Coulhon/Saloff-Coste s'il existe une constante $C \geq 0$ et un choix de chemins geodesiques γ_{yz} (reliant y et z dans G) de sorte que $K(x,n) = 1/V(x,n) \ \sup_{e \in E \cap B(x,2n)} \operatorname{card}\{\gamma_{y,z}; e \in \gamma_{yz}, y, z \in B(x,n)\} \leq Cn$ où $x \in V$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple : Le graphe de Cayley d'un groupe finiment engendré à croissance polynomiale

Graphes à courbure positive au sens de Coulhon/Saloff-Coste

On dit que le graphe non pondéré G est de courbure positive au sens de Coulhon/Saloff-Coste s'il existe une constante $C \geq 0$ et un choix de chemins geodesiques γ_{yz} (reliant y et z dans G) de sorte que $K(x,n) = 1/V(x,n)\ \sup_{e \in E \cap B(x,2n)} \mathrm{card}\{\gamma_{y,z};\, e \in \gamma_{yz},\, y, z \in B(x,n)\} \leq Cn$ où $x \in V$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple : Le graphe de Cayley d'un groupe finiment engendré à croissance polynomiale

Théorème : Tout graphe à courbure positive au sens de Coulhon/Saloff-Coste admet une inégalité de Poincaré.

La condition démocratique discrète

On dit que le graphe non pondéré G vérifie la condition démocratique sur une boule $B = B(x, n)$ s'il existe une constante $C \geq 0$ et une mesure de probabilité $\pi \in \mathcal{P}(G^{2n})$ à support sur les chemins géodésiques de G de sorte que

La condition démocratique discrète

On dit que le graphe non pondéré G vérifie la condition démocratique sur une boule $B = B(x, n)$ s'il existe une constante $C \geq 0$ et une mesure de probabilité $\pi \in \mathcal{P}(G^{2n})$ à support sur les chemins géodésiques de G de sorte que

- $(e_0, e_{2n}) * \pi = m_B \otimes m_B$ où $e_t(\gamma) = \gamma(t)$ et $m_B = 1/m(B) m_{|B}$.

La condition démocratique discrète

On dit que le graphe non pondéré G vérifie la condition démocratique sur une boule $B = B(x, n)$ s'il existe une constante $C \geq 0$ et une mesure de probabilité $\pi \in \mathcal{P}(G^{2n})$ à support sur les chemins géodésiques de G de sorte que

- $(e_0, e_{2n}) * \pi = m_B \otimes m_B$ où $e_t(\gamma) = \gamma(t)$ et $m_B = 1/m(B) m_{|B}$.

- Pour tout $e \in E$, $\Theta(e) = \sum_{\gamma \in G^{2n}, e \in \gamma} \pi(\gamma) \leq Cn/m(B)$

La condition démocratique discrète

On dit que le graphe non pondéré G vérifie la condition démocratique sur une boule $B = B(x, n)$ s'il existe une constante $C \geq 0$ et une mesure de probabilité $\pi \in \mathcal{P}(G^{2n})$ à support sur les chemins géodésiques de G de sorte que

- $(e_0, e_{2n}) * \pi = m_B \otimes m_B$ où $e_t(\gamma) = \gamma(t)$ et $m_B = 1/m(B) m_{|B}$.

- Pour tout $e \in E$, $\Theta(e) = \sum_{\gamma \in G^{2n}, e \in \gamma} \pi(\gamma) \leq Cn/m(B)$

Théeorème :
1) Si G est de courbure positive au sens de Coulhon/Saloff-Coste, alors G vérfie la condition démocratique sur toute boule B de G.
2) Si G vérifie la condition démocratique sur toute boule B de G, alors G supporte une inégalité de Poincaré.

La condition de Bakry-Emery discrète (I)

Soit $f : V \to \mathbb{R}$. On pose $\Delta f(x) = 1/m(x) \sum_{y \sim x} m_{xy}(f(y) - f(x))$.

La condition de Bakry-Emery discrète (I)

Soit $f : V \to \mathbb{R}$. On pose $\Delta f(x) = 1/m(x) \sum_{y \sim x} m_{xy}(f(y) - f(x))$.

Posons

$$\Gamma(f,g)(x) = 1/2 \left(\Delta(f(x)g(x)) - f(x)\Delta g(x) - g(x)\Delta f(x)\right)$$

$$\Gamma_2(f,g)(x) = 1/2 \left(\Delta\Gamma(f,g)(x) - \Gamma(f,\Delta g)(x) - \Gamma(g,\Delta f)(x)\right).$$

La condition de Bakry-Emery discrète (I)

Soit $f : V \to \mathbb{R}$. On pose $\Delta f(x) = 1/m(x) \sum_{y \sim x} m_{xy}(f(y) - f(x))$.

Posons

$$\Gamma(f,g)(x) = 1/2 \left(\Delta(f(x)g(x)) - f(x)\Delta g(x) - g(x)\Delta f(x)\right)$$

$$\Gamma_2(f,g)(x) = 1/2 \left(\Delta\Gamma(f,g)(x) - \Gamma(f,\Delta g)(x) - \Gamma(g,\Delta f)(x)\right).$$

Notons que $\Gamma(f,f)(x) = 1/2|\nabla f|^2(x)$ où
$|\nabla f|(x) = \left(\sum_{y \sim x} |f(y) - f(x)|^2 p(x,y)\right)^{1/2}$.

La condition de Bakry-Emery discrète (I)

Soit $f : V \to \mathbb{R}$. On pose $\Delta f(x) = 1/m(x) \sum_{y \sim x} m_{xy}(f(y) - f(x))$.

Posons

$$\Gamma(f,g)(x) = 1/2\left(\Delta(f(x)g(x)) - f(x)\Delta g(x) - g(x)\Delta f(x)\right)$$

$$\Gamma_2(f,g)(x) = 1/2\left(\Delta\Gamma(f,g)(x) - \Gamma(f,\Delta g)(x) - \Gamma(g,\Delta f)(x)\right).$$

Notons que $\Gamma(f,f)(x) = 1/2|\nabla f|^2(x)$ où
$|\nabla f|(x) = \left(\sum_{y \sim x} |f(y) - f(x)|^2 p(x,y)\right)^{1/2}$.

On dit que G vérifie la condition de courbure-dimension $CD(K,N)$ ($N \in [1, +\infty[$ et $K \in \mathbb{R}$) si pour toute fonction $f : V \to \mathbb{R}$,

$$\Gamma_2(f,f) \geq 1/N(\Delta f)^2 + K\Gamma(f,f).$$

Exemples (Lin-Yau) : 1) Soit G un graphe (localement fini) qui vérifie la condition (R) avec constante p_0. Alors, G vérifie $CD(2, 1/p_0 - 1)$.
2) Soit G un graphe (localement fini). Alors, G vérifie $CD(2, -1)$.

La condition de Bakry-Emery discrète (II)

Exemples (Lin-Yau) : 1) Soit G un graphe (localement fini) qui vérifie la condition (R) avec constante p_0. Alors, G vérifie $CD(2, 1/p_0 - 1)$.
2) Soit G un graphe (localement fini). Alors, G vérifie $CD(2, -1)$.

Question : La condition de courbure-dimension $CD(0, N)$ implique-t-elle une inégalité de Poincaré ?

Graphes à courbure positive au sens d'Ollivier

Soit G un graphe muni d'une marche aléatoire m_x pour tout $x \in V$.

Graphes à courbure positive au sens d'Ollivier

Soit G un graphe muni d'une marche aléatoire m_x pour tout $x \in V$.

La courbure (au sens de Yann Ollivier) $R(x, y)$ le long de l'arête (xy) (si $x \sim y$) est

$$R(x, y) = 1 - \frac{W_1(m_x, m_y)}{d(x, y)}$$

Graphes à courbure positive au sens d'Ollivier

Soit G un graphe muni d'une marche aléatoire m_x pour tout $x \in V$.

La courbure (au sens de Yann Ollivier) $R(x,y)$ le long de l'arête (xy) (si $x \sim y$) est

$$R(x,y) = 1 - \frac{W_1(m_x, m_y)}{d(x,y)}$$

Ici, $W_1(m_x, m_y)$ est la distance de Wasserstein L^1 :

$$W_1(m_x, m_y) = \sup_{f \ 1-Lip} \left(\sum_{z \sim x} f(z)p(x,z) - \sum_{z \sim y} f(z)p(y,z) \right).$$

Graphes à courbure positive au sens d'Ollivier

Soit G un graphe muni d'une marche aléatoire m_x pour tout $x \in V$.

La courbure (au sens de Yann Ollivier) $R(x,y)$ le long de l'arête (xy) (si $x \sim y$) est

$$R(x,y) = 1 - \frac{W_1(m_x, m_y)}{d(x,y)}$$

Ici, $W_1(m_x, m_y)$ est la distance de Wasserstein L^1 :

$$W_1(m_x, m_y) = \sup_{f \ 1-Lip} \left(\sum_{z \sim x} f(z) p(x,z) - \sum_{z \sim y} f(z) p(y,z) \right).$$

Exemple (Lin-Yau) : Si G est un graphe non pondéré, $R(x,y) \geq 2/m(x) + 2/m(y) - 2$.

Soit G un graphe muni d'une marche aléatoire m_x pour tout $x \in V$.

La courbure (au sens de Yann Ollivier) $R(x,y)$ le long de l'arête (xy) (si $x \sim y$) est

$$R(x,y) = 1 - \frac{W_1(m_x, m_y)}{d(x,y)}$$

Ici, $W_1(m_x, m_y)$ est la distance de Wasserstein L^1 :

$$W_1(m_x, m_y) = \sup_{f \ 1-Lip} \left(\sum_{z \sim x} f(z)p(x,z) - \sum_{z \sim y} f(z)p(y,z) \right).$$

Exemple (Lin-Yau) : Si G est un graphe non pondéré, $R(x,y) \geq 2/m(x) + 2/m(y) - 2$.

Questions : Lien avec la condition de Bakry-Emery ? Existence d'inégalités de Poincaré ?