

Rappels et compléments

Dans ce chapitre, nous introduisons des notations et quelques notions ensemblistes utiles pour la suite de l'ouvrage. Nous y avons aussi rassemblé les propriétés des fonctions usuelles, qui sont un pré-requis indispensable pour ce cours, même celles qui seront vues ultérieurement, pour donner au lecteur un aide-mémoire complet. Les notions utilisées ici (continuité, dérivabilité, convexité, limites, ...) seront définies dans les chapitres suivants dans un cadre plus général, où les fonctions usuelles serviront d'exemples. Un lecteur familiarisé aux symboles mathématiques, et pour qui les propriétés élémentaires des fonctions usuelles n'auraient plus de secret, peut se dispenser de la lecture de ce premier chapitre.

1.1. Quelques notations

Les ensembles

Un *ensemble* est une collection d'objets. Si E est un ensemble :

- la notation $x \in E$ signifie x *appartient* à E . On dit aussi que x est un *élément* de E .
- la notation $x \notin E$ signifie x *n'appartient pas* à E .

Le symbole \emptyset désigne l'ensemble vide, qui n'a aucun élément. Un ensemble qui ne contient qu'un seul élément s'appelle un *singleton*.

Les ensembles classiques de nombres

Nous notons \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels, comme par exemple 1 ou 23, on écrit $23 \in \mathbb{N}$. L'ensemble des entiers relatifs est noté quant à lui \mathbb{Z} , par exemple $-3 \in \mathbb{Z}$ mais aussi $4 \in \mathbb{Z}$. Ainsi, \mathbb{N} est un *sous-ensemble* de \mathbb{Z} . Enfin, l'ensemble des nombres réels est noté \mathbb{R} , il comprend tous les nombres comme π ou $45/789$. Les réels sont parfois aussi appelés des *scalaires*. On retrouvera cette terminologie au chapitre 10.

On note \mathbb{R}^+ (resp. \mathbb{R}^-) l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls (resp. négatifs ou nuls). On désigne par une étoile un ensemble de nombres privé de 0, ainsi \mathbb{R}^* est l'ensemble de tous les nombres réels non nuls.

Quelques symboles ensemblistes

On définit un ensemble, soit en donnant la liste de ses éléments, soit par une propriété qui les caractérise :

$$E = \{-5, -1, 0, 3, 6\}, \quad F = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 3x + 1 \neq 0\}.$$

Le symbole $|$ se lit *tel que* dans la définition d'un ensemble. Par exemple,

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x < 2\} = \{0, 1\},$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 < 0\} = \emptyset.$$

Si A et B sont deux ensembles, la *réunion de A et B* , notée $A \cup B$, qui se lit « A union B », est l'ensemble formé par les éléments qui appartiennent à A ou à B . Par exemple, $\{1, 4\} = \{1\} \cup \{4\}$ et

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^{+*} \cup \mathbb{R}^{-*} \cup \{0\},$$

qui signifie que l'ensemble des nombres réels est l'union des nombres réels strictement positifs, des nombres réels strictement négatifs et de 0.

Le signe \cap décrit l'*intersection* de deux ensembles et se lit « A inter B ». $A \cap B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B . Par exemple,

$$\{1, 4, 6\} \cap \{1, 4, 5\} = \{1, 4\} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}.$$

Nous utilisons aussi le signe \subset qui montre qu'un ensemble est inclus dans un autre, on dit que c'est un *sous-ensemble*. On a par exemple $\{1, 4\} \subset \{1, 4, 5\}$ et $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. L'*inclusion* de l'ensemble A dans l'ensemble B signifie que tous les éléments de A sont aussi des éléments de B .

Lorsque un ensemble est inclus dans un autre, on peut en faire la soustraction : si $A \subset B$, alors on peut écrire $B \setminus A$, qui se lit « B privé de A », et qui représente les éléments qui sont dans B mais pas dans A . Par exemple $\{1, 4, 6\} \setminus \{1\} = \{4, 6\}$ et $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Attention, il faut vérifier que les ensembles sont compatibles, c'est-à-dire que le premier ensemble contient bien le second.

Si A et B sont deux ensembles (par exemple des intervalles de \mathbb{R}), on note $A \times B$, qui se lit « A croix B », l'ensemble des couples (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$. L'ensemble $A \times B$ s'appelle *le produit cartésien* des ensembles A et B . Il est équivalent d'écrire $a \in A$, $b \in B$ et $(a, b) \in A \times B$. L'ordre est important : l'ensemble $A \times B$ n'est égal à l'ensemble $B \times A$ que si $A = B$. Si $A = B$, on utilise aussi la notation A^2 au lieu de $A \times A$ et A^3 pour $A \times A \times A$. On rencontrera ainsi souvent la notation \mathbb{R}^2 pour l'ensemble des couples de nombres réels et \mathbb{R}^3 pour les triplets de nombres réels. Nous retrouverons le produit cartésien dans le chapitre 10.

Symboles mathématiques

Pour faciliter l'écriture des énoncés mathématiques, nous utilisons

- le signe \exists qui signifie *il existe* (la lettre E en miroir),
- le signe \forall pour *quel que soit* (ou *pour tout*), c'est la lettre A renversée, première lettre du mot anglais *all*, qui signifie *tout*.

Nous obtenons par exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}^+, x = y^2,$$

ce qui signifie que pour tout réel positif x , il existe un réel positif y tel que $x = y^2$.

Implication et équivalence

Dans ce paragraphe, les lettres P et Q représentent des propositions, c'est-à-dire des énoncés mathématiques, auxquels on peut attribuer la valeur "vrai" ou "faux".

La notation $P \implies Q$ se lit « P implique Q », et elle signifie que si P est vraie, alors Q est vraie.

La notation $P \iff Q$ se lit « P et Q sont équivalentes », et elle signifie que P implique Q et que Q implique P .

Ces symboles ne sont pas des signes sténographiques, et ils doivent être utilisés à bon escient.

Fonction factorielle

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction factorielle de la façon suivante : $0! = 1$ et pour tout $n \geq 1$,

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 1.$$

Ainsi on a $1! = 1$, $2! = 2 \times 1$ et $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

1.2. Rappels sur les fonctions usuelles

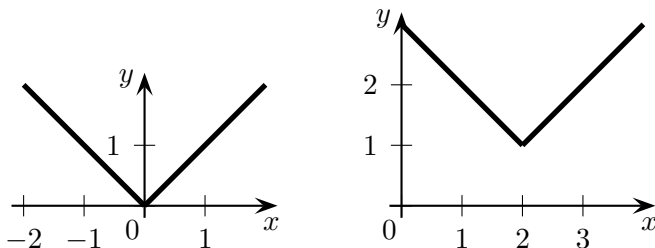
Ce paragraphe regroupe les propriétés fondamentales des fonctions dites usuelles : valeur absolue, fonctions polynômes, exponentielle, logarithme et fonctions puissance. Les fonctions trigonométriques ne seront pas étudiées dans ce livre. Il s'agit essentiellement de rappels du cours de Terminale S. Les notions de limites, dérivabilité et symétries sont redéfinies dans les chapitres suivants.

1.2.1. Valeur absolue

Définition 1.1. — $\forall x \in \mathbb{R}$, on appelle *valeur absolue de x* le nombre réel positif noté

$$|x| \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Les deux figures ci-dessous représentent les graphes des fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto |x - 2| + 1$. On pourra remarquer leurs similitudes.



Le changement de $|x|$ en $|x - 2|$ décale la figure de deux unités vers la droite, et l'ajout de la constante 1 décale le graphe d'une unité vers le haut. Cette remarque se généralise pour passer de la courbe représentative d'une fonction f à celle de la fonction $x \mapsto f(x - a) + b$.

On a les relations suivantes pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq \alpha\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -\alpha \leq x \leq \alpha\} = [-\alpha, \alpha],$$

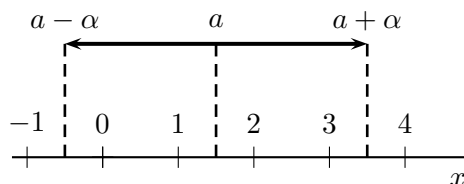
et

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > \alpha\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \alpha \text{ ou } x < -\alpha\} =]-\infty, -\alpha[\cup]\alpha, +\infty[.$$

En remplaçant x par $x - a$ dans les formules précédentes, on vérifie que : si $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$, alors

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| \leq \alpha\} = \{x \in \mathbb{R} \mid a - \alpha \leq x \leq a + \alpha\} = [a - \alpha, a + \alpha].$$

En traçant la droite réelle, on peut interpréter l'ensemble des réels x tels que $|x - a| \leq \alpha$ comme l'ensemble des réels x qui sont à une distance inférieure à α du réel a . Par exemple, dans la figure ci-dessous nous avons représenté les réels qui sont à une distance au plus $\alpha = 2$ du point $a = 1.5$, c'est-à-dire l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1.5| \leq 2\}$.



Proposition 1.2 (Quelques propriétés de la valeur absolue)

(i) $\forall a \in \mathbb{R}, |a| \geq 0$ et $|a| = 0 \iff a = 0$.

(ii) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |ab| = |a||b|$

(iii) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}^*, \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

(iv) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \left| |a| - |b| \right| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$.

Cette dernière inégalité s'appelle l'inégalité triangulaire.

Finalement, nous rappelons les liens entre la valeur absolue et la racine carrée :

Proposition 1.3 (Quelques relations entre valeur absolue et racine carrée)

Pour tous les réels a et b , on a

- (i) $\sqrt{a^2} = |a|$ et $|a|^2 = a^2$,
- (ii) si $b \in \mathbb{R}^+$, $a^2 = b \iff a = \pm\sqrt{b}$,
- (iii) $a^2 \leq b^2 \iff |a| \leq |b| \iff -|b| \leq a \leq |b|$,
- (iv) $a^2 < b^2 \iff |a| < |b| \iff -|b| < a < |b|$,
- (v) si $ab \geq 0$, alors $\sqrt{ab} = \sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$,
- (vi) si $\frac{a}{b} \geq 0$ et $b \neq 0$ alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$.

Exemple 1.4. — On a ainsi $|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$, mais $|\sqrt{5} - 3| = 3 - \sqrt{5}$, et $\sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2} = 3 - \sqrt{5}$.

1.2.2. Fonctions polynômes et fractions rationnelles

Définition 1.5. — Soit $n \in \mathbb{N}$. S'il existe des réels a_0, a_1, \dots, a_n avec $a_n \neq 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

alors la fonction f définie sur \mathbb{R} est appelée *fonction polynôme* (ou *polynomiale*). Les réels a_0, a_1, \dots, a_n sont appelés les *coefficients*, et l'entier n le *degré*, du polynôme.

Une *fonction affine* est une fonction polynôme de degré 1.

Une fonction polynôme de la forme $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{R}$ est appelée une *fonction linéaire*.



Dans la définition d'une fonction polynôme, les exposants sont des nombres entiers positifs. Ainsi, la fonction définie par $f(x) = 2x^{1/2} + 3x^{1/3}$ n'est pas une fonction polynôme.

Les fonctions polynômes sont définies et dérivables sur \mathbb{R} .

Définition 1.6. — Une *fraction rationnelle* est un quotient de deux fonctions polynômes.

Les fractions rationnelles sont définies et dérivables en tout point où le dénominateur ne s'annule pas.

1.2.3. Fonction logarithmique

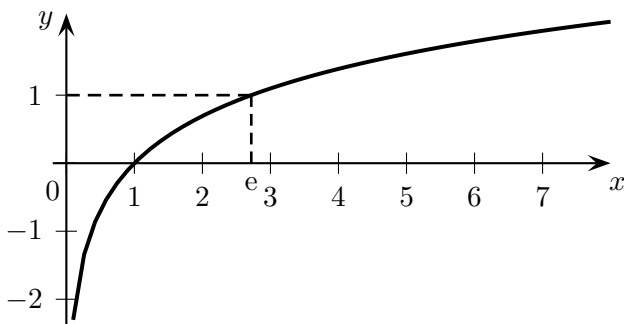
La fonction *logarithme népérien*, notée \ln , est définie sur $]0, +\infty[$. C'est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. En particulier, \ln est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$, et

$$\forall x > 0, \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x} \text{ et } \ln(1) = 0.$$

Les limites à connaître de la fonction logarithme sont :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

On en déduit le tableau de variations puis le graphe. La fonction logarithmique est strictement croissante et son graphe est représenté sur la figure ci-dessous. Notons que e est l'unique réel strictement positif tel que $\ln e = 1$, il est approximativement égal à 2.71.



Graphe de $x \mapsto \ln(x)$

Les règles de calculs de la fonction logarithmique sont

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab), \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \forall b \in \mathbb{R}^*, \quad \ln(a^b) = b \ln(a).$$

1.2.4. Fonction exponentielle

La fonction exponentielle, notée \exp , est définie sur \mathbb{R} . C'est la fonction réciproque de la fonction logarithme. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$. Elle est dérivable sur \mathbb{R} et l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\exp(x))' = \exp(x), \quad \exp(0) = 1 \text{ et } \exp(x) > 0.$$

Le lien fondamental avec la fonction logarithme est le suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \exp(x) = y \iff x = \ln y.$$



Dans la relation ci-dessus, liant le logarithme et l'exponentielle, x est un réel quelconque, tandis que y est un réel **strictement positif**.

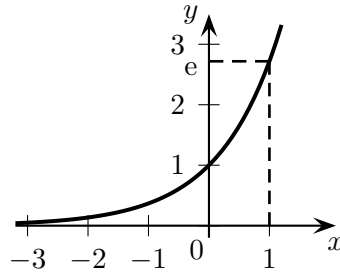
Les limites à connaître de la fonction exponentielle sont :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty.$$

Les règles de calculs pour la fonction exponentielle sont

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \exp(a) \exp(b) = \exp(a + b) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\exp(a)} = \exp(-a)$$

Enfin pour terminer, le graphe de la fonction exponentielle est représenté sur la figure ci-dessous.



Graphe de $x \mapsto \exp(x)$

1.2.5. Fonctions puissances

Une *fonction puissance* est une fonction de la forme $x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, appelé *l'exposant*. La définition, les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions puissances dépendent de l'exposant α .

Les fonctions puissances se rencontrent beaucoup en économie. Par exemple, si on constate dans le cadre d'une production, que les coûts d'usure augmentent plus rapidement que la production, on peut choisir de modéliser ce phénomène à l'aide d'une fonction puissance d'exposant $0 < \alpha < 1$. De façon analogue, lorsque nous étudierons les fonctions de deux variables x et y dans la seconde partie du cours, nous rencontrerons souvent les fonctions dites *de Cobb-Douglas*, de la forme $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$, souvent utilisées pour modéliser un problème économique.

On définit d'abord les fonctions puissances pour α entier positif ($\alpha \in \mathbb{N}$), puis pour α entier négatif ($\alpha \in \mathbb{Z}$) puis enfin pour α réel quelconque ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Valeur de α	Domaine de définition	Définition
$n \in \mathbb{N}, n \geq 1, x^n$	\mathbb{R}	$x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$
$n \in \mathbb{N}^*, x^{-n}$	\mathbb{R}^*	$x^{-n} \stackrel{\text{déf}}{=} 1/x^n$
$n \in \mathbb{N}^*, x^{1/n}$	\mathbb{R}^+ si n est pair \mathbb{R} si n est impair	Fonction réciproque de x^n : $y = x^{1/n} \iff x = y^n$
$\alpha \in \mathbb{R}^*, x^\alpha$	\mathbb{R}^{+*}	$x^\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} e^{\alpha \ln x}$

Exemple 1.7. — À partir des définitions du tableau, on voit par exemple que, pour tout réel positif ou nul,

$$\boxed{x^{1/2} = \sqrt{x}}$$

Nous rappelons maintenant quelques règles de manipulation des puissances.

Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $x > 0$ et $y > 0$, on a :

$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \quad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

$$x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}, \quad \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}.$$

Dérivée de la fonction puissance. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, et sa dérivée vaut, pour tout $x > 0$,

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Remarque 1.8. — 1. Si α est un entier naturel, la formule pour la dérivée reste valable sur \mathbb{R} (par exemple $x \mapsto x^2$), tandis que si α est un entier négatif, elle reste valable sur \mathbb{R}^* (par exemple $x \mapsto \frac{1}{x}$).

2. En utilisant la définition de la puissance à l'aide de l'exponentielle, on convient que $x^0 = 1$, pour tout réel $x > 0$.

Exemple 1.9. — En appliquant la formule de dérivation avec $\alpha = \frac{1}{2}$, on retrouve la dérivée de la racine carrée :

$$\boxed{(\sqrt{x})'} = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^{1/2}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}.$$