

Développement décimal de $1/p$ (d'après O. Mathieu)

Lycée Branly, 14 mars 2007

Jérôme Germoni (université Lyon 1)

Devinettes

Devinettes

- 1 Calculer de tête le 53-ème chiffre de $1/53$.
- 2 Calculer de tête le 52-ème chiffre de $1/53$.
- 3 Calculer de tête le 27-ème chiffre de $1/53$.
- 4 Julian additionne deux nombres et trouve 999.
Combien de retenues a-t-il effectuées ?

Devinettes

Devinettes

- 1 Calculer de tête le 53-ème chiffre de $1/53$.
- 2 Calculer de tête le 52-ème chiffre de $1/53$.
- 3 Calculer de tête le 27-ème chiffre de $1/53$.
- 4 Julian additionne deux nombres et trouve 999.
Combien de retenues a-t-il effectuées ?

Une réponse ?

- 4 Si Julian a calculé $142 + 857$, il n'a pas fait de retenue.
Donc,

Devinettes

Devinettes

- 1 Calculer de tête le 53-ème chiffre de $1/53$.
- 2 Calculer de tête le 52-ème chiffre de $1/53$.
- 3 Calculer de tête le 27-ème chiffre de $1/53$.
- 4 Julian additionne deux nombres et trouve 999.
Combien de retenues a-t-il effectuées ?

Une réponse ?

- 4 Si Julian a calculé $142 + 857$, il n'a pas fait de retenue.
Donc, **rien !**

- 1 Développement décimal (Fermat)
 - Nombres réels
 - Opérations
 - Développement décimal des rationnels
- 2 Demi-périodes (Gauss)
 - Dichotomie
 - Le $(p + 1)/2$ -ème chiffre
- 3 Longueur de la période (Artin)
 - Digression : nombre de motifs des k/p et longueur minimale
 - Conjecture d'Artin
 - Résultats partiels
- 4 Miscellanea
 - Esquisse de preuve du théorème de Mathieu
 - Heuristique pour la conjecture d'Artin
 - Digression : couper les cheveux en trois ou quatre
 - Calcul exotique de $1/13$

Qu'est-ce qu'un nombre réel ?

Qu'est-ce qu'un nombre réel ?

Une réponse possible : c'est un "nombre" qui possède un développement décimal illimité vers la droite, de la forme

$$x = a_{-N}a_{-N-1} \cdots a_{-1}a_0, a_1a_2a_3 \cdots a_na_{n+1} \cdots$$

où $N \in \mathbb{N}$ et $(a_n)_{n \geq -N}$ est une **suite** à valeurs dans $\{0, 1, \dots, 8, 9\}$ (qui ne stationne pas à 9).

Qu'est-ce qu'un nombre réel ?

Une réponse possible : c'est un "nombre" qui possède un développement décimal illimité vers la droite, de la forme

$$x = a_{-N}a_{-N-1} \cdots a_{-1}a_0, a_1a_2a_3 \cdots a_na_{n+1} \cdots$$

où $N \in \mathbb{N}$ et $(a_n)_{n \geq -N}$ est une **suite** à valeurs dans $\{0, 1, \dots, 8, 9\}$ (qui ne stationne pas à 9).

Exemples

$$\pi = 3,141\,592\,6 \cdots, \quad \sqrt{2} = 1,414\,213 \cdots,$$

$$\frac{1}{7} = 0,142\,857\,142\,857 \cdots$$

Aparté : nombres réels normaux

- 1 Un nombre est **normal** si chaque suite finie de chiffres de longueur ℓ apparaît avec la fréquence $1/10^\ell$. Exemples :

0,888 888 \dots pas normal, 0,123456789 10 11 12 13 \dots oui.
- 2 On convient que choisir un nombre réel **au hasard**, c'est choisir chaque chiffre indépendamment avec une probabilité $1/10$.

Aparté : nombres réels normaux

- 1 Un nombre est **normal** si chaque suite finie de chiffres de longueur ℓ apparaît avec la fréquence $1/10^\ell$. Exemples :

0,888 888 \dots pas normal, 0,123456789 10 11 12 13 \dots oui.
- 2 On convient que choisir un nombre réel **au hasard**, c'est choisir chaque chiffre indépendamment avec une probabilité $1/10$.

Fait (assez facile)

“Presque tout” nombre est normal.

Aparté : nombres réels normaux

- 1 Un nombre est **normal** si chaque suite finie de chiffres de longueur ℓ apparaît avec la fréquence $1/10^\ell$. Exemples :

0,888888... pas normal, 0,12345678910111213... oui.
- 2 On convient que choisir un nombre réel **au hasard**, c'est choisir chaque chiffre indépendamment avec une probabilité $1/10$.

Fait (assez facile)

“Presque tout” nombre est normal.

Problème (très difficile !)

Est-ce que π ou $\sqrt{2}$ est un nombre normal ?

Qu'est-ce qu'un nombre réel ?

Difficulté

Défaut de cette présentation : comment **définir** les opérations ?

Qu'est-ce qu'un nombre réel ?

Difficulté

Défaut de cette présentation : comment **définir** les opérations ?

Exemple/devinette

On note

$$x = 0,464646\dots, \quad y = 0,888888\dots$$

Calculer $2x$, $x + y$ et xy .

Opérations avec les développements décimaux

Réponse à la devinette

$$x = 0,464646\dots, \quad y = 0,888888\dots$$

- ① $2x = 0,929292\dots$ –pas de vraie retenue, trop facile !

Opérations avec les développements décimaux

Réponse à la devinette

$$x = 0,464646\dots, \quad y = 0,888888\dots$$

- 1 $2x = 0,929292\dots$ –pas de vraie retenue, trop facile !
- 2 $x + y$? On calcule $46 + 88 = 134$, et on se dit que le 1 qui dépasse va faire une retenue au bloc précédent, d'où :

$$x + y = 1,353535\dots$$

- 3 xy ? Pas si simple !

Opérations avec les développements décimaux

Autre approche

$$x = 0,464646\dots, \quad y = 0,888888\dots$$

On a :

$$10y = 8,888888\dots = 8 + 0,888888\dots = 8 + y,$$

d'où

$$y = \frac{8}{9}$$

Opérations avec les développements décimaux

Autre approche

$$x = 0,464646\dots, \quad y = 0,888888\dots$$

On a :

$$10y = 8,888888\dots = 8 + 0,888888\dots = 8 + y,$$

d'où

$$y = \frac{8}{9} \quad \text{et de même :} \quad x = \frac{46}{99}.$$

D'où :

$$x + y = \frac{46}{99} + \frac{8}{9} = \frac{134}{99} = 1,3535\dots,$$

$$xy = \frac{46}{99} \times \frac{8}{9} = \frac{368}{891} = 0,413019079685746352\dots$$

Développement décimal (DD) des rationnels

Propriété

Soit x un réel, $x \in [0, 1[$. Il est équivalent de dire

- x est rationnel : $\exists (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $x = a/b$;
- le développement décimal de x est ultimement périodique :
 $\exists M, N \in \mathbb{N}$, $x = 0, MNNNN \dots$

Développement décimal (DD) des rationnels

Propriété

Soit x un réel, $x \in [0, 1[$. Il est équivalent de dire

- x est rationnel : $\exists(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $x = a/b$;
- le développement décimal de x est ultimement périodique :
 $\exists M, N \in \mathbb{N}$, $x = 0, MNNNN \dots$

① Si $x = 0, MNNNN \dots$, on a :

$$10^c x = M, NNN \dots = M + 0, NNN \dots,$$

d'où

$$10^d (10^c x - M) = N, NNN \dots = N + (10^c x - M).$$

Développement décimal (DD) des rationnels

Propriété

Soit x un réel, $x \in [0, 1[$. Il est équivalent de dire

- x est rationnel : $\exists(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $x = a/b$;
- le développement décimal de x est ultimement périodique :
 $\exists M, N \in \mathbb{N}$, $x = 0, MNNNN \dots$

- 2 Si $x = a/b$, on pose la division de a par b . Il n'y a qu'un nombre fini de restes possibles, donc la division "boucle".

Développement décimal (DD) de $1/p$

Propriété

Soit p un nombre premier, $p \neq 2, 5$:

- 1 le DD de $1/p$ est périodique
- 2 $d =$ longueur d'une période de $1/p \iff p$ divise $10^d - 1$;
- 3 motif correspondant de $1/p$: $N = \frac{10^d - 1}{p} = \frac{99 \dots 9}{p}$.

Développement décimal (DD) de $1/p$

Propriété

Soit p un nombre premier, $p \neq 2, 5$:

- ① le DD de $1/p$ est périodique
- ② $d =$ longueur d'une période de $1/p \iff p$ divise $10^d - 1$;
- ③ motif correspondant de $1/p$: $N = \frac{10^d - 1}{p} = \frac{99 \dots 9}{p}$.

En effet,

$$\frac{1}{p} = 0, NNN \dots \iff \frac{10^d}{p} = N + \frac{1}{p} \iff pN = 10^d - 1.$$

Développement décimal (DD) de $1/p$

Propriété

Soit p un nombre premier, $p \neq 2, 5$:

- ① le DD de $1/p$ est périodique et $p - 1$ est une période ;
- ② $d =$ longueur d'une période de $1/p \iff p$ divise $10^d - 1$;
- ③ motif correspondant de $1/p$: $N = \frac{10^d - 1}{p} = \frac{99 \dots 9}{p}$.

En effet,

$$\frac{1}{p} = 0, NNN \dots \iff \frac{10^d}{p} = N + \frac{1}{p} \iff pN = 10^d - 1.$$

Théorème (Fermat, vers 1636)

Pour p premier, p divise $10^{p-1} - 1$.

Résumé : Fermat (XVII^o) et Lagrange (XVIII^o)

Propriété

Pour p premier, $p \neq 2, 5$:

- 1 $p - 1$ est la longueur d'une période de $1/p$;
- 2 la longueur minimale est un diviseur de $p - 1$;
- 3 le motif correspondant est $(10^d - 1)/p$.

Exemple : $p = 7$

- $10^6 - 1 = (10^3 + 1) \times (10^3 - 1) = 7 \times 11 \times 13 \times 999$;
- motif : $7 \times 142\,857 = 999\,999$.

Résumé : Fermat (XVII^o) et Lagrange (XVIII^o)

Propriété

Pour p premier, $p \neq 2, 5$:

- 1 $p - 1$ est la longueur d'une période de $1/p$;
- 2 la longueur minimale est un diviseur de $p - 1$;
- 3 le motif correspondant est $(10^d - 1)/p$.

Exemple : $p = 7$

- $10^6 - 1 = (10^3 + 1) \times (10^3 - 1) = 7 \times 11 \times 13 \times 999$;
- motif : $7 \times 142\,857 = 999\,999$.

Devinette

Le DD de $1/p$ admet 6 pour longueur de période : qui est p ?

Fermat : le p -ème chiffre

- 1 Quel est le 53-ème chiffre de $1/53$?

Réponse

- 1 C'est le même que le premier : 0.

Digression : le $(p - 1)$ -ème chiffre

$$999\,999 \mid 7$$

Digression : le $(p - 1)$ -ème chiffre

$$\begin{array}{r|l} 999\,999 & 7 \\ \hline \underline{49} & 7 \\ 95 & \end{array}$$

Digression : le $(p - 1)$ -ème chiffre

$$\begin{array}{r}
 999\,999 \quad | \quad 7 \\
 \hline
 \underline{49} \quad 2\,857 \\
 95 \\
 \underline{35} \\
 96 \\
 \underline{56} \\
 94 \\
 \underline{14} \\
 98
 \end{array}$$

Digression : le $(p - 1)$ -ème chiffre

$$\begin{array}{r|l}
 999\,999 & 7 \\
 \hline
 & 42\,857 \\
 & \underline{49} \\
 & 95 \\
 & \underline{35} \\
 & 96 \\
 & \underline{56} \\
 & 94 \\
 & \underline{14} \\
 & 98 \\
 & \underline{28} \\
 & 7
 \end{array}$$

Digression : le $(p - 1)$ -ème chiffre

$$\begin{array}{r|l}
 999\,999 & 7 \\
 \hline
 & 142\,857 \\
 & \underline{49} \\
 & 95 \\
 & \underline{35} \\
 & 96 \\
 & \underline{56} \\
 & 94 \\
 & \underline{14} \\
 & 98 \\
 & \underline{28} \\
 & 7 \\
 & \underline{7} \\
 & 0
 \end{array}$$

Devinette

② Quel est le 52-ème chiffre de $1/53$?

Réponse

② C'est 3, car $3 \times 3 = 9$.

$$99 \dots 9999 \mid 53$$

Devinette

② Quel est le 52-ème chiffre de $1/53$?

Réponse

② C'est 3, car $3 \times 3 = 9$.

$$\begin{array}{r|l} 99 \dots 9999 & 53 \\ \underline{159} & \\ 84 & \end{array}$$

Devinette

② Quel est le 52-ème chiffre de $1/53$?

Réponse

② C'est 3, car $3 \times 3 = 9$.

$$\begin{array}{r|l}
 99 \dots 9 \ 999 & 53 \\
 \underline{159} & \dots 3 \\
 84 & \\
 \dots &
 \end{array}$$

Dichotomie (exemples)

Ici, on suppose que la plus courte période est de longueur **paire**.
On peut donc la couper en deux.

Dichotomie (exemples)

Ici, on suppose que la plus courte période est de longueur **paire**.
On peut donc la couper en deux.

- $\frac{1}{7} = 0,142857\dots$
- $\frac{1}{11} = 0,09\dots$
- $\frac{1}{13} = 0,076923\dots$
- $\frac{1}{17} = 0,0588235294117647\dots$

Dichotomie (exemples)

Ici, on suppose que la plus courte période est de longueur **paire**.
 On peut donc la couper en deux.

- $\frac{1}{7} = 0,142\,857\,\dots : 142 + 857 = 999 ;$

- $\frac{1}{11} = 0,09\,\dots : 0 + 9 = 9\dots$

- $\frac{1}{13} = 0,076\,923\,\dots : 76 + 923 = 999 ;$

- $\frac{1}{17} = 0,05882352\,94117647\,\dots$

$$\begin{array}{r} 5\,882\,352 \\ + 94\,117\,647 \\ \hline 99\,999\,999 \end{array}$$

Hasard ou nécessité ?

Dichotomie (formalisation)

Théorème (Midy – 1836)

Supposons que $d = 2e$ soit une longueur de période de $1/p$, mais que e ne soit pas la longueur d'une période :

$$\frac{1}{p} = 0, \underbrace{\underbrace{A}_{e} \underbrace{B}_{e}}_{d=2e} \underbrace{\underbrace{A}_{e} \underbrace{B}_{e}}_{d=2e} \dots, \quad 0 \leq A, B < 10^e.$$

Alors,

$$A + B = 10^e - 1 = \underbrace{99 \dots 9}_{e \text{ chiffres}}.$$

Voir *La Recherche*, octobre 2006.

Le chiffre du milieu

Théorème (O. Mathieu – 2002)

Soit $p \geq 11$ un nombre premier :

- 1 la $(p + 1)/2$ -ème décimale de $1/p$ est 0 ou 9 ;
- 2 le fait que ce soit 0 ou 9 ne dépend que de p modulo 40.

$$\frac{1}{p} = 0, \underbrace{\quad \quad \quad}_e \underbrace{\quad \quad \quad}_e \dots$$

$p-1=2e$

Preuve (premier point)

① Partie facile.

$$\frac{1}{p} = 0, \underbrace{\underbrace{A}_{e} \underbrace{B}_{e}}_{p-1=2e} \dots, \quad \begin{cases} A = B \\ \text{ou} \\ A + B = 99 \dots 9. \end{cases}$$

Preuve (premier point)

① Partie facile.

$$\frac{1}{p} = 0, \underbrace{0}_{e} \underbrace{A}_{e} \underbrace{B \dots}_{e}, \quad \begin{cases} A = B \\ \text{ou} \\ A + B = 99 \dots 9. \end{cases}$$

$p-1=2e$

- Cas $A = B$: c'est 0.
- Cas $A + B = 99 \dots 9$: c'est 9. En effet :

$$\begin{array}{r} 0 \bullet \dots \bullet \bullet \\ + ? \bullet \dots \bullet \bullet \\ \hline 9 \ 9 \ \dots \ 9 \ 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} A \\ + B \\ \hline 10^{\frac{p-1}{2}} - 1 \end{array}$$

Reformulation

Théorème (O. Mathieu)

Soit $p \geq 11$ premier.

reste de la division de p par 40	$\frac{p+1}{2}$ -ème chiffre de $1/p$
1, 3, 9, 13, 27, 31, 37, 39	0
7, 11, 17, 19, 21, 23, 29, 33	9

Occuper Julian (8 ans) à la pizzeria

$$1 \times 142857 = 142857, \quad 2 \times 142857 = 285714,$$

$$3 \times 142857 = 428571, \quad 4 \times 142857 = 571428,$$

$$5 \times 142857 = 714285, \quad 6 \times 142857 = 857142.$$

Occuper Julian (8 ans) à la pizzeria

$$1 \times 142857 = 142857, \quad 2 \times 142857 = 285714,$$

$$3 \times 142857 = 428571, \quad 4 \times 142857 = 571428,$$

$$5 \times 142857 = 714285, \quad 6 \times 142857 = 857142.$$

Occuper Julian (11 ans) à la pizzeria

$$\frac{1}{7} = 0,142857 \dots, \quad \frac{2}{7} = 0,285714 \dots,$$

$$\frac{3}{7} = 0,428571 \dots, \quad \frac{4}{7} = 0,571428 \dots,$$

$$\frac{5}{7} = 0,714285 \dots, \quad \frac{6}{7} = 0,857142 \dots$$

Certains motifs de k/p

Supposons avoir

$$\frac{10^d - 1}{p} = \overline{AB}$$

$$\frac{10^6 - 1}{7} = 142\,857$$

$$\text{et } k \times \frac{10^d - 1}{p} = \overline{BA}$$

$$3 \times \frac{10^6 - 1}{7} = 428\,571$$

Alors :

$$\frac{1}{p} = 0, \underbrace{AB} \underbrace{AB} \dots$$

$$\frac{1}{7} = 0, 142\,857\,142\,857 \dots$$

$$\frac{k}{p} = 0, \underbrace{BA} \underbrace{BA} \dots$$

$$\frac{3}{7} = 0, 428\,571\,428\,571 \dots$$

Ainsi, $1/p$ et k/p ont le même motif AB !

Equivalence : un seul motif \iff longueur min = $p - 1$

On pose la division de 1 par p :

$$\begin{array}{r|l} 1,000\,000 & 7 \\ \hline & \end{array}$$

Equivalence : un seul motif \iff longueur min = $p - 1$

On pose la division de 1 par p :

$$\begin{array}{r|l} 1,000\,000 & 7 \\ \hline & 0,142\,857 \\ & 30 \\ & 20 \\ & 60 \\ & 40 \\ & 50 \\ & 1 \end{array}$$

- longueur min période = nombre d'étapes de la division :
longueur min = $p - 1 \iff$ tous les restes apparaissent ;

Equivalence : un seul motif \iff longueur min = $p - 1$

On pose la division de 1 par p :

$$\begin{array}{r|l}
 1,000\,000\,0 & 7 \\
 \hline
 30 & 0,142\,857\,1 \\
 20 & \\
 60 & \\
 40 & \\
 50 & \\
 10 & \\
 3 &
 \end{array}$$

- longueur min période = nombre d'étapes de la division :
 longueur min = $p - 1 \iff$ tous les restes apparaissent ;
- pour chaque reste k , k/p a le même motif que $1/p$.

Ceci se produit-il souvent ?

Problème

Que dire des nombres premiers p **longs**, pour lesquels on a :

- la longueur minimale des périodes égale à $p - 1$?
- un seul motif (à permutation cyclique près) pour tous les k/p ,
 $1 \leq k \leq p - 1$;

(Les deux conditions sont équivalentes !)

Deux types de nombres premiers

Pour un nombre premier p , deux cas :

- longueur minimale période = $p - 1$; ex. : $\frac{1}{7} = 0,142857\dots$;
- longueur minimale période $< p - 1$; ex. : $\frac{1}{13} = 0,076923\dots$.

Problème

$$\mathcal{P}(10) = \{p \text{ premier long en base } 10\}.$$

Deux types de nombres premiers

Pour un nombre premier p , deux cas :

- longueur minimale période = $p - 1$; ex. : $\frac{1}{7} = 0,142857\dots$;
- longueur minimale période $< p - 1$; ex. : $\frac{1}{13} = 0,076923\dots$.

Problème

$$\mathcal{P}(10) = \{p \text{ premier } \text{long} \text{ en base } 10\}.$$

- Est-ce que $\mathcal{P}(10)$ est infini ?
- Estimer la “densité” de $\mathcal{P}(10)$:

$$d_{10}(x) = \frac{\text{card}\{p \in \mathcal{P}(10), p \leq x\}}{\text{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}} \quad : \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} d_{10}(x) ?$$

Expériences numériques

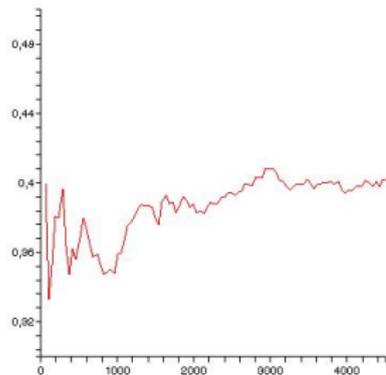
$$\mathcal{P}(10) = \{7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, \dots\}$$

$$y = d_{10}(x) = \frac{\text{card}\{p \in \mathcal{P}(10), p \leq x\}}{\text{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}}$$

Expériences numériques

$$\mathcal{P}(10) = \{7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, \dots\}$$

$$y = d_{10}(x) = \frac{\text{card}\{p \in \mathcal{P}(10), p \leq x\}}{\text{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}}$$



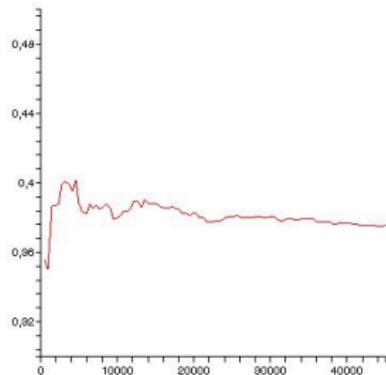
base 10

$x_{\max} = 4500$

Expériences numériques

$$\mathcal{P}(10) = \{7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, \dots\}$$

$$y = d_{10}(x) = \frac{\text{card}\{p \in \mathcal{P}(10), p \leq x\}}{\text{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}}$$



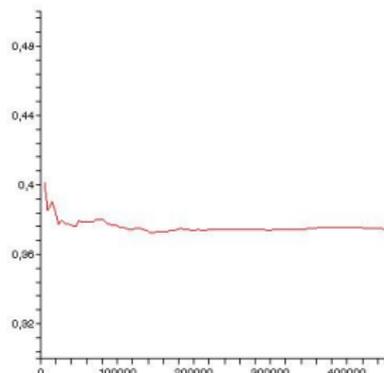
base 10

$x_{\max} = 45000$

Expériences numériques

$$\mathcal{P}(10) = \{7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, \dots\}$$

$$y = d_{10}(x) = \frac{\text{card}\{p \in \mathcal{P}(10), p \leq x\}}{\text{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}}$$



base 10

$x_{\max} = 450000$

Enoncé de la conjecture (base 10)

Conjecture (Artin – 1927)

- *Il existe un nombre infini de nombres premiers p qui sont longs en base 10.*
- *La densité de ces p est :*

$$C_{\text{Artin}} = \prod_{q \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{q(q-1)}\right) \simeq 0,373\,955\,813\,6\dots$$

Remarque : où intervient 10 ?

Enoncé de la conjecture (base presque quelconque)

Conjecture (Artin – 1927)

- *Il existe un nombre infini de nombres premiers p qui sont longs en base b .*
- *La densité de ces p est :*

$$C_{\text{Artin}} = \prod_{q \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{q(q-1)} \right) \simeq 0,373\,955\,813\,6\dots$$

Remarque : où intervient 10 ?

On peut remplacer 10 par (presque) n'importe quelle base b .

Résultats partiels

La conjecture est toujours ouverte, mais on sait :

- **Hooley – 1967** : avec l'hypothèse de Riemann généralisée, la conjecture d'Artin quantitative est **vraie** ;
- **Gupta–Ram – 1984** : sans hypothèse de Riemann, la conjecture d'Artin qualitative admet **au plus 2 exceptions** parmi les bases $b \in \mathcal{P}$;
par exemple, une infinité de nombres premiers sont longs en base 2, 3 ou 5.

Conclusion

Questions très simples, réponses sophistiquées :

- 1 développement périodique \rightsquigarrow Fermat, XVIIème.
- 2 chiffre du milieu \rightsquigarrow Gauss, 1801.
- 3 fréquence des p longs : question d'Artin, 1927 \rightsquigarrow quand ?

NB : les mathématiques, science expérimentale ?

Esquisse de preuve (deuxième point)

- ② Il faut décider si $\frac{p-1}{2}$ est une période, i.e. si p divise $10^{\frac{p-1}{2}} - 1$.
Fermat et Gauss : p divise $10^{\frac{p-1}{2}} - 1$ ou $10^{\frac{p-1}{2}} + 1$.

Notation (Legendre)

Pour $p > 2$ premier et $a \in \mathbb{Z}$, $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} \bmod p \in \{-1, 1, 0\}$.

Exemple (non trivial)

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = \pm 1 \bmod 8 \\ -1 & \text{si } p = \pm 3 \bmod 8. \end{cases}$$

Ce symbole ne dépend donc que de p modulo 8.

Loi de réciprocité quadratique

Théorème (Gauss – 1801)

Soit p, q premiers impairs distincts. Alors :

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

Un miracle ?

Sens du symbole de Legendre :

$\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ SSI l'équation $x^2 = q$ a une solution dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Loi de réciprocité quadratique

Théorème (Gauss – 1801)

Soit p, q premiers impairs distincts. Alors :

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

Application au $(p+1)/2$ -ème chiffre : 0 ou 9 ?

La $\frac{p+1}{2}$ -ème décimale de $1/p$ est 0 SSI $\left(\frac{10}{p}\right) = 10^{\frac{p-1}{2}} = 1 [p]$. Or...

$$\left(\frac{10}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right) \left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right) \left(\frac{p}{5}\right).$$

Par le lemme chinois, ceci ne dépend que de p modulo 40.

Ceci n'est pas une preuve

$$\langle a \rangle = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \iff \forall q \text{ premier} : p \equiv 1 [q], a^{\frac{p-1}{q}} \neq 1 [p]$$

- Fixons q :

- probabilité pour que $p \equiv 1 [q] : \frac{1}{q-1}$;
- probabilité pour que $a^{\frac{p-1}{q}} = 1 [p] : \frac{1}{q}$.

Probabilité pour que “ça marche” pour $q : 1 - \frac{1}{q(q-1)}$.

- Si indépendance, probabilité pour que “ça marche” pour tous les q :

$$\prod_q \left(1 - \frac{1}{q(q-1)} \right).$$

Découpage de période en 3, 4 et plus

Maîtrisant la dichotomie, tentons de diviser plus !

Exemples :

- $\frac{1}{7} = 0,142\ 857 \dots$
- $\frac{1}{7} = 0,14\ 28\ 57 \dots$
- $\frac{1}{13} = 0,07\ 69\ 23 \dots$

Contre-exemple :

- $\frac{1}{73} = 0,01\ 36\ 98\ 63 \dots$

Découpage de période en 3, 4 et plus

Maîtrisant la dichotomie, tentons de diviser plus !

Exemples (généraliser) :

- $\frac{1}{7} = 0,142\ 857\ \dots : 142 + 857 = 999 ;$
- $\frac{1}{7} = 0,14\ 28\ 57\ \dots : 14 + 28 + 57 = 99 ;$
- $\frac{1}{13} = 0,07\ 69\ 23\ \dots : 7 + 69 + 23 = 99.$

Contre-exemple (trouver un énoncé quand même) :

- $\frac{1}{73} = 0,01\ 36\ 98\ 63\ \dots : 1 + 36 + 98 + 63 = 2 \times 99.$

Calcul exotique de $1/13$

$$\frac{1}{13} = 0, \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \dots$$

- $7 \times 11 \times 13 = 1001 \implies 13 \mid 10^6 - 1 = (10^3 + 1)(10^3 - 1)$

Calcul exotique de $1/13$

$$\frac{1}{13} = 0,0 \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \dots$$

- $7 \times 11 \times 13 = 1001 \implies 13 \mid 10^6 - 1 = (10^3 + 1)(10^3 - 1)$
- $13 > 10$

Calcul exotique de $1/13$

$$\frac{1}{13} = 0,0 \bullet \bullet \bullet \bullet 3 \dots$$

- $7 \times 11 \times 13 = 1001 \implies 13 \mid 10^6 - 1 = (10^3 + 1)(10^3 - 1)$
- $13 > 10$
- $3 \times 3 = 9$

Calcul exotique de $1/13$

$$\frac{1}{13} = 0,0 \bullet 69 \bullet 3 \dots$$

- $7 \times 11 \times 13 = 1001 \implies 13 \mid 10^6 - 1 = (10^3 + 1)(10^3 - 1)$

- $13 > 10$

- $3 \times 3 = 9$

- $0 \bullet \bullet$

$$\begin{array}{r} + \bullet \bullet 3 \\ \hline 999 \end{array}$$

Calcul exotique de $1/13$

$$\frac{1}{13} = 0,076\,923\,\dots$$

- $7 \times 11 \times 13 = 1001 \implies 13 \mid 10^6 - 1 = (10^3 + 1)(10^3 - 1)$

- $13 > 10$

- $3 \times 3 = 9$

- $$\begin{array}{r} 0 \bullet \bullet \\ + \bullet \bullet 3 \\ \hline 999 \end{array}$$

- $$\begin{array}{r} 0 \bullet \\ + 69 \\ + \bullet 3 \\ \hline 99 \end{array}$$