Développement décimal de $1/p$ (d'après O. Mathieu)

Museum de Lyon, 21 octobre 2006

Jérôme Germoni (université Lyon 1)

Devinettes

Devinettes

1. Calculer de tête le 53-ème chiffre de $1/53$.
2. Calculer de tête le 52-ème chiffre de $1/53$.
3. Calculer de tête le 27-ème chiffre de $1/53$.
4. Julian additionne deux nombres et trouve 999.
   Combien de retenues a-t-il effectuées ?

Devinettes

Devinettes

1. Calculer de tête le 53-ème chiffre de $1/53$.
2. Calculer de tête le 52-ème chiffre de $1/53$.
3. Calculer de tête le 27-ème chiffre de $1/53$.
4. Julian additionne deux nombres et trouve 999.
   Combien de retenues a-t-il effectuées ?

Une réponse ?

4. Si Julian a calculé $142 + 857$, il n'a pas fait de retenue.
   Donc,

Devinettes

Devinettes

1. Calculer de tête le 53-ème chiffre de $1/53$.
2. Calculer de tête le 52-ème chiffre de $1/53$.
3. Calculer de tête le 27-ème chiffre de $1/53$.
4. Julian additionne deux nombres et trouve 999.
   Combien de retenues a-t-il effectuées ?

Une réponse ?

4. Si Julian a calculé $142 + 857$, il n'a pas fait de retenue.
   Donc, rien !

Introduction

$$\frac{1}{7} = 0{,}142\,857\;142\,857\;142\,857\;\ldots$$

- Développement périodique.

  Vocabulaire : longueur : 6,

  motifs : 142 857, mais aussi 285 714.

Introduction

$$\frac{1}{7} = 0{,}142\,857\;142\,857\;142\,857\;\ldots$$

- Développement périodique.
  Vocabulaire : longueur : 6,
  motifs : 142 857, mais aussi 285 714.

- Pas de demi-mesure : $142 + 857 = 999$.

Introduction

$$\frac{1}{7} = 0{,}142\,857\;142\,857\;142\,857\;\ldots$$

- Développement périodique.
  Vocabulaire : longueur : 6,
  motifs : 142 857, mais aussi 285 714.

- Pas de demi-mesure : $142 + 857 = 999$.

- Silence, on tourne !

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857\cdots, \quad \frac{2}{7} = 0{,}285714\cdots, \quad \frac{3}{7} = 0{,}428571\cdots,$$
$$\frac{4}{7} = 0{,}571428\cdots, \quad \frac{5}{7} = 0{,}714285\cdots, \quad \frac{6}{7} = 0{,}857142\cdots$$

Figures tutélaires

Suivant Gauss, *Disquisitiones arithmeticæ* (1801), on s'intéresse au développement décimal de $1/p$, où p est un nombre premier.

p-ème chiffre

$\dfrac{p+1}{2}$-ème chiffre

longueur $p-1$

Notation : nombres premiers : $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$.

Plan

Traduction de l'existence d'une période

Dire que le développement de $1/p$ est périodique de période d, c'est dire qu'il existe des chiffres $a_1, \dots, a_d \in \{0, \dots, 9\}$ tels que

$$\frac{1}{p} = \overline{0,\underbrace{a_1 a_2 a_3 \cdots a_d}_{d}\,\underbrace{a_1 a_2 a_3 \cdots a_d}_{d}\,\underbrace{a_1 a_2 a_3 \cdots a_d}_{d} \cdots}.$$

Traduction de l'existence d'une période

Dire que le développement de $1/p$ est périodique de période d, c'est dire qu'il existe des chiffres $a_1, \ldots, a_d \in \{0, \ldots, 9\}$ tels que

$$\frac{1}{p} = \overline{0,\underbrace{a_1 a_2 a_3 \cdots a_d}_{d}\,\underbrace{a_1 a_2 a_3 \cdots a_d}_{d}\,\underbrace{a_1 a_2 a_3 \cdots a_d}_{d} \cdots}.$$

Posons $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_d} = \sum_{i=1}^{d} a_i 10^{d-i}$, il vient :

$$10^d \times \frac{1}{p} = \overline{\underbrace{a_1 a_2 a_3 \cdots a_d}_{d},\,\underbrace{a_1 a_2 a_3 \cdots a_d}_{d} \cdots} = n + \frac{1}{p} \iff np = 10^d - 1.$$

Existence d'une période

$$\frac{1}{p} = \overline{0,\underbrace{\quad n}_{d}\underbrace{\quad n}_{d}\cdots} \iff np = 10^d - 1.$$

Existence d'une période

$$\frac{1}{p} = \overline{0,\underbrace{\quad n}_{d}\underbrace{\quad n}_{d}\cdots} \iff np = 10^d - 1.$$

Conséquence

- $d =$ longueur d'une période de $1/p \iff p$ divise $10^d - 1$;

Exemple : $p = 7$

- $10^6 - 1 = (10^3 + 1) \times (10^3 - 1) = 7 \times 11 \times 13 \times 999$;

Existence d'une période

$$\frac{1}{p} = \overline{0,\underbrace{\quad n}_{d}\underbrace{\quad n}_{d}\cdots} \iff np = 10^d - 1.$$

Conséquence

- d = longueur d'une période de $1/p \iff p$ divise $10^d - 1$;
- motif correspondant de $1/p$: $n = \dfrac{10^d - 1}{p} = \dfrac{99\cdots9}{p}$.

Exemple : $p = 7$

- $10^6 - 1 = (10^3 + 1) \times (10^3 - 1) = 7 \times 11 \times 13 \times 999$;
- motif : $7 \times 142\,857 = 999\,999$.

Fermat et Lagrange

Proposition

Pour p premier, $p \neq 2, 5$:

1. $p - 1$ est la longueur d'une période de $1/p$;
2. la longueur minimale est un diviseur de $p - 1$;
3. le motif correspondant est : $\dfrac{10^d - 1}{p}$.

Idée de la preuve :

1. petit théorème de Fermat (v. 1636 ?) : p divise $10^{p-1} - 1$;
2. théorème de Lagrange : si p divise $10^d - 1$ et $10^e - 1$, avec d minimal, alors d divise e ;
3. déjà vu.

Fermat : le p-ème chiffre

1. Quel est le 53-ème chiffre de $1/53$?

Réponse

1. C'est le même que le premier : 0.

Digression : le $(p-1)$-ème chiffre

$$\begin{array}{r|l} 999\,999 & 7 \\ \hline & \end{array}$$

Digression : le $(p-1)$-ème chiffre

$$\begin{array}{r|l} 999\,999 & 7 \\ \cline{2-2} \underline{49} & \qquad 7 \\ 95 & \end{array}$$

Digression : le $(p-1)$-ème chiffre

$$
\begin{array}{r|l}
999\,999 & 7 \\
\cline{2-2}
\underline{49} & \qquad 57 \\
95 & \\
\underline{35} & \\
9\,6 &
\end{array}
$$

Digression : le $(p-1)$-ème chiffre

$$
\begin{array}{r|l}
999\,999 & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{49} & \quad 857 \\
95 & \\
\underline{35} & \\
9\,6 & \\
\underline{5\,6} & \\
94 &
\end{array}
$$

Digression : le $(p-1)$-ème chiffre

$$
\begin{array}{r|l}
999\,999 & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{49} & \quad 2\,857 \\
95 & \\
\underline{35} & \\
96 & \\
\underline{56} & \\
94 & \\
\underline{14} & \\
98 &
\end{array}
$$

Digression : le $(p-1)$-ème chiffre

$$\begin{array}{r|l}
999\,999 & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{49} & 42\,857 \\
95 & \\
\underline{35} & \\
9\,6 & \\
\underline{5\,6} & \\
94 & \\
\underline{14} & \\
98 & \\
\underline{28} & \\
7 &
\end{array}$$

Digression : le $(p-1)$-ème chiffre

$$
\begin{array}{r|l}
999\,999 & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{49} & 142\,857 \\
95 & \\
\underline{35} & \\
96 & \\
\underline{56} & \\
94 & \\
\underline{14} & \\
98 & \\
\underline{28} & \\
7 & \\
\underline{7} & \\
0 &
\end{array}
$$

Devinette

2. Quel est le 52-ème chiffre de $1/53$?

Réponse

2. C'est 3, car $3 \times 3 = 9$.

$$\begin{array}{r|l} 99\cdots 9\,999 & 53 \\ \hline & \end{array}$$

Devinette

2. Quel est le 52-ème chiffre de $1/53$?

Réponse

2. C'est 3, car $3 \times 3 = 9$.

$$\begin{array}{r|l} 99\cdots9\,999 & 53 \\ \cline{2-2} \underline{159} & \qquad\quad 3 \\ 84 & \end{array}$$

Devinette

2. Quel est le 52-ème chiffre de $1/53$?

Réponse

2. C'est 3, car $3 \times 3 = 9$.

$$\begin{array}{r|l}
99\cdots 9\,999 & 53 \\ \cline{2-2}
\underline{159} & \qquad\cdots 3 \\
84 & \\
\cdots &
\end{array}$$

Plan

Dichotomie (exemples)

Ici, on suppose que la plus courte période est de longueur paire.
On peut donc la couper en deux.

Dichotomie (exemples)

Ici, on suppose que la plus courte période est de longueur paire. On peut donc la couper en deux.

- $\frac{1}{7} = 0,142\,857\cdots$
- $\frac{1}{11} = 0,0\,9\cdots$
- $\frac{1}{13} = 0,076\,923\cdots$
- $\frac{1}{17} = 0,05882352\,94117647\cdots$

Dichotomie (exemples)

Ici, on suppose que la plus courte période est de longueur paire. On peut donc la couper en deux.

- $\frac{1}{7} = 0,142\,857\cdots$: $142 + 857 = 999$;
- $\frac{1}{11} = 0,0\,9\cdots$: $0 + 9 = 9\ldots$
- $\frac{1}{13} = 0,076\,923\cdots$: $76 + 923 = 999$;
- $\frac{1}{17} = 0,05882352\,94117647\cdots$ $$\begin{array}{r} 5\,882\,352 \\ +\ 94\,117\,647 \\ \hline 99\,999\,999 \end{array}$$

Hasard ou nécessité ?

Dichotomie (formalisation)

Proposition (Midy)

Supposons que $d = 2e$ soit une longueur de période de $1/p$, mais que e ne soit pas la longueur d'une période :

$$\frac{1}{p} = \overline{0,\underbrace{\underbrace{A}_{e}\underbrace{B}_{e}}_{d=2e}\underbrace{\underbrace{A}_{e}\underbrace{B}_{e}}_{d=2e}}\cdots, \quad 0 \leq A, B < 10^e.$$

Alors,

$$A + B = 10^e - 1 = \underbrace{99\cdots9}_{e \text{ chiffres}}.$$

Preuve

$$\frac{1}{p} = \overline{0,\underbrace{\quad A}_{e}\underbrace{\quad B}_{e}\underbrace{\quad A}_{e}\underbrace{\quad B}_{e}}\cdots, \quad 0 \leq A, B < 10^e$$

permet d'écrire

$$\frac{10^{2e}}{p} = 10^e A + B + \frac{1}{p},$$

puis

$$\frac{10^e + 1}{p} \times (10^e - 1) = 10^e A + B.$$

Modulo $10^e - 1$, il vient :

$$A + B \equiv 0\ [10^e - 1] \quad \text{et} \quad 1 \leq A + B < 2(10^e - 1).$$

Un énoncé surprenant

Théorème (O. Mathieu)

Soit $p \geq 11$ un nombre premier :

1. la $(p+1)/2$-ème décimale de $1/p$ est 0 ou 9 ;
2. le fait que ce soit 0 ou 9 ne dépend que de p modulo 40.

$$\frac{1}{p} = 0,\underbrace{\underbrace{\qquad\qquad}_{e}\overset{\downarrow}{}\underbrace{\qquad\qquad}_{e}}_{p-1=2e}\cdots$$

Preuve (premier point)

1. Partie facile.

$$\frac{1}{p} = 0,\underbrace{\underbrace{\quad A}_{e}\overset{\downarrow}{}\underbrace{\quad B}_{e}}_{p-1=2e}\cdots, \qquad \begin{cases} A = B \\ \quad ou \\ A + B = 99\cdots 9. \end{cases}$$

Preuve (premier point)

1. Partie facile.

$$\frac{1}{p} = 0,\underbrace{\underbrace{\overset{\downarrow}{0}\quad\quad A}_{e}\overset{\downarrow}{\ }\underbrace{\quad\quad\quad B}_{e}}_{p-1=2e}\cdots, \quad \begin{cases} A = B \\ \quad ou \\ A+B = 99\cdots 9. \end{cases}$$

- Cas $A = B$: c'est 0.
- Cas $A + B = 99\cdots 9$: c'est 9. En effet :

$$\begin{array}{r} 0 \bullet \cdots \bullet \bullet \\ +\ ?\ \bullet \cdots \bullet \bullet \\ \hline 9\ 9\ \cdots\ 9\ 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} A \\ +\ B \\ \hline 10^{\frac{p-1}{2}} - 1 \end{array}$$

Esquise de preuve (deuxième point)

2. Il faut décider si $\frac{p-1}{2}$ est une période, i.e. si p divise $10^{\frac{p-1}{2}} - 1$.
Fermat et Gauss : p divise $10^{\frac{p-1}{2}} - 1$ ou $10^{\frac{p-1}{2}} + 1$.

Notation (Legendre)

Pour $p > 2$ premier et $a \in \mathbb{Z}$, $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} \mod p \in \{-1, 1, 0\}$.

Exemple (non trivial)

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = \pm 1 \mod 8 \\ -1 & \text{si } p = \pm 3 \mod 8. \end{cases}$$

Ce symbole ne dépend donc que de p modulo 8.

Loi de réciprocité quadratique

Théorème (Gauss – 1801)

Soit p, q premiers impairs distincts. Alors :

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

Un miracle ?

Sens du symbole de Legendre :

$\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ SSI l'équation $x^2 = q$ a une solution dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Loi de réciprocité quadratique

Théorème (Gauss – 1801)

Soit p, q premiers impairs distincts. Alors :

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

Application au $(p+1)/2$-ème chiffre : 0 ou 9 ?

La $\frac{p+1}{2}$-ème décimale de $1/p$ est 0 SSI $\left(\frac{10}{p}\right) = 10^{\frac{p-1}{2}} = 1\ [p]$. Or...

$$\left(\frac{10}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{p}{5}\right).$$

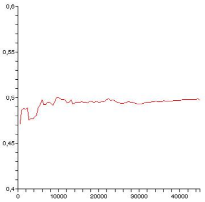
Par le lemme chinois, ceci ne dépend que de p modulo 40.

Reformulation et étude “statistique”

Théorème (O. Mathieu)

Soit $p \geq 11$ premier.

reste de la division de p par 40	$\frac{p+1}{2}$-ème chiffre de $1/p$
$1, 3, 9, 13, 27, 31, 37, 39$	0
$7, 11, 17, 19, 21, 23, 29, 33$	9



$$y = \frac{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x, \text{chiffre} = 0\}}{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}}$$

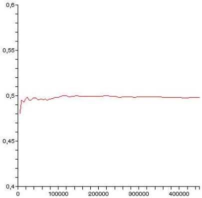
$$x_{\max} = 45000$$

Reformulation et étude "statistique"

Théorème (O. Mathieu)

Soit $p \geq 11$ premier.

reste de la division de p par 40	$\frac{p+1}{2}$-ème chiffre de $1/p$
$1, 3, 9, 13, 27, 31, 37, 39$	0
$7, 11, 17, 19, 21, 23, 29, 33$	9



$$y = \frac{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x, \text{chiffre} = 0\}}{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}}$$

$$x_{\max} = 450000$$

Reformulation et étude “statistique”

Théorème (O. Mathieu)

Soit $p \geq 11$ premier.

reste de la division de p par 40	$\frac{p+1}{2}$-ème chiffre de $1/p$
$1, 3, 9, 13, 27, 31, 37, 39$	0
$7, 11, 17, 19, 21, 23, 29, 33$	9

Théorème (Dirichlet – 1837)

Pour tout b premier avec 40,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x, p \equiv b \bmod 40\}}{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}} = \frac{1}{16}.$$

Plan

Occuper Julian (8 ans) à la pizzeria

$$1 \times 142857 = 142857, \quad 2 \times 142857 = 285714,$$
$$3 \times 142857 = 428571, \quad 4 \times 142857 = 571428,$$
$$5 \times 142857 = 714285, \quad 6 \times 142857 = 857142.$$

Occuper Julian (8 ans) à la pizzeria

$$1 \times 142857 = 142857, \quad 2 \times 142857 = 285714,$$
$$3 \times 142857 = 428571, \quad 4 \times 142857 = 571428,$$
$$5 \times 142857 = 714285, \quad 6 \times 142857 = 857142.$$

Occuper Julian (11 ans) à la pizzeria

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857\cdots, \quad \frac{2}{7} = 0{,}285714\cdots,$$
$$\frac{3}{7} = 0{,}428571\cdots, \quad \frac{4}{7} = 0{,}571428\cdots,$$
$$\frac{5}{7} = 0{,}714285\cdots, \quad \frac{6}{7} = 0{,}857142\cdots$$

Equivalence : un seul motif $\iff$ longueur min $= p - 1$

On pose la division de 1 par p :

$$\begin{array}{r|l} 1,000\,000 & 7 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Equivalence : un seul motif $\Longleftrightarrow$ longueur min $= p - 1$

On pose la division de 1 par p :

$$\begin{array}{r|l} 1,000\,000 & 7 \\ \cline{2-2} 30 & 0{,}142\,857 \\ 20 & \\ 60 & \\ 40 & \\ 50 & \\ 1 & \end{array}$$

- longueur min période = nombre d'étapes de la division : longueur min $= p - 1 \Longleftrightarrow$ tous les restes apparaissent ;

Equivalence : un seul motif $\iff$ longueur min $= p-1$

On pose la division de 1 par p :

$$
\begin{array}{r|l}
1,000\,000\,0 & 7 \\ \cline{2-2}
30 & 0{,}142\,857\,1 \\
20 & \\
60 & \\
40 & \\
50 & \\
10 & \\
3 &
\end{array}
$$

- longueur min période = nombre d'étapes de la division : longueur min $= p-1 \iff$ tous les restes apparaissent ;
- pour chaque reste k, k/p a le même motif que $1/p$.

Ceci se produit-il souvent ?

Problème

Que dire des nombres premiers p *longs*, pour lesquels on a :

- la longueur minimale des périodes égale à $p-1$?
- un seul motif (à permutation cyclique près) pour tous les k/p, $1 \leq k \leq p-1$;

(Les deux conditions sont équivalentes !)

Deux types de nombres premiers

Pour un nombre premier p, deux cas :

- longueur minimale période $= p - 1$; ex. : $\dfrac{1}{7} = 0,142857\cdots$;
- longueur minimale période $< p - 1$; ex. : $\dfrac{1}{13} = 0,076923\cdots$.

Problème

$$\mathcal{P}(10) = \{p \text{ premier } \textit{long en base } 10\}.$$

Deux types de nombres premiers

Pour un nombre premier p, deux cas :

- longueur minimale période $= p - 1$; ex. : $\dfrac{1}{7} = 0,142857\cdots$;
- longueur minimale période $< p - 1$; ex. : $\dfrac{1}{13} = 0,076923\cdots$.

Problème

$$\mathcal{P}(10) = \{p \text{ premier } \textit{long en base } 10\}.$$

Est-ce que $\mathcal{P}(10)$ est infini ? Estimer la "densité" de $\mathcal{P}(10)$:

$$d_{10}(x) = \frac{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}(10), p \leq x\}}{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}} \quad : \quad \lim_{x \to +\infty} d_{10}(x) \ ?$$

Expériences numériques

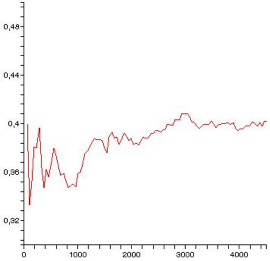
$$\mathcal{P}(10) = \{7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, \ldots\}$$

$$y = d_{10}(x) = \frac{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}(10), p \leq x\}}{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}}$$

Expériences numériques

$$\mathcal{P}(10) = \{7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, \dots\}$$

$$y = d_{10}(x) = \frac{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}(10), p \leq x\}}{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}}$$



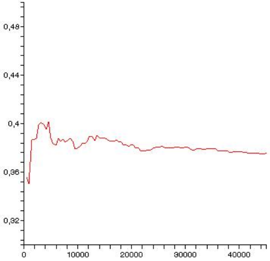
base 10

$x_{\max} = 4500$

Expériences numériques

$$\mathcal{P}(10) = \{7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, \dots\}$$

$$y = d_{10}(x) = \frac{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}(10), p \leq x\}}{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}}$$



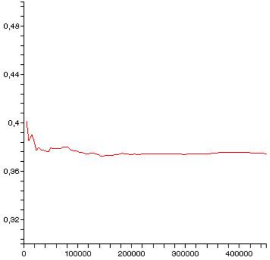
base 10

$x_{max} = 45000$

Expériences numériques

$$\mathcal{P}(10) = \{7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, \dots\}$$

$$y = d_{10}(x) = \frac{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}(10), p \leq x\}}{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}}$$



base 10

$x_{\max} = 450000$

Enoncé de la conjecture (base 10)

Conjecture (Artin – 1927)

- *Il existe un nombre infini de nombres premiers p qui sont longs en base* 10.
- *La densité de ces p est :*

$$C_{\mathrm{Artin}} = \prod_{q \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{q(q-1)}\right) \simeq 0{,}373\,955\,813\,6\ldots$$

Remarque : où intervient 10 ?

Enoncé de la conjecture (base presque quelconque)

Conjecture (Artin – 1927)

- *Il existe un nombre infini de nombres premiers p qui sont longs en base b.*
- *La densité de ces p est :*

$$C_{\mathrm{Artin}} = \prod_{q \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{q(q-1)}\right) \simeq 0{,}373\,955\,813\,6\ldots$$

Remarque : où intervient 10 ?
On peut remplacer 10 par (presque) n'importe quelle base b.

Résultats partiels

La conjecture est toujours ouverte, mais on sait :

- Hooley – 1967 : avec l'hypothèse de Riemann généralisée, la conjecture d'Artin quantitative est vraie ;
- Gupta–Ram – 1984 : sans hypothèse de Riemann, la conjecture d'Artin qualitative admet au plus 2 exceptions parmi les bases $b \in \mathcal{P}$;
  par exemple, une infinité de nombres premiers sont longs en base 2, 3 ou 5.

Conclusion

Questions très simples, réponses sophistiquées :

1. développement périodique $\rightsquigarrow$ Fermat, XVIIème.
2. chiffre du milieu $\rightsquigarrow$ Gauss, 1801.
3. fréquence des p longs : question d'Artin, 1927 $\rightsquigarrow$ quand ?

NB : les mathématiques, science expérimentale ?

Plan

Ceci n'est pas une preuve

$$\langle a\rangle = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \iff \forall q \text{ premier : } \; p \equiv 1\;[q],\; a^{\frac{p-1}{q}} \neq 1\;[p]$$

- Fixons q :
  - probabilité pour que $p = 1\;[q]$: $\dfrac{1}{q-1}$;
  - probabilité pour que $a^{\frac{p-1}{q}} = 1\;[p]$: $\dfrac{1}{q}$.

  Probabilité pour que “ça marche” pour q : $1 - \dfrac{1}{q(q-1)}$.
- Si indépendance, probabilité pour que “ça marche” pour tous les q :

$$\prod_q \left(1 - \frac{1}{q(q-1)}\right).$$

Découpage de période en 3, 4 et plus

Maitrisant la dichotomie, tentons de diviser plus !

Exemples :

- $\frac{1}{7} = 0,142\ 857\cdots$
- $\frac{1}{7} = 0,14\ 28\ 57\cdots$
- $\frac{1}{13} = 0,07\ 69\ 23\cdots$

Contre-exemple :

- $\frac{1}{73} = 0{,}01\ 36\ 98\ 63\cdots$

Découpage de période en 3, 4 et plus

Maitrisant la dichotomie, tentons de diviser plus !
Exemples (généraliser) :

- $\dfrac{1}{7} = 0,142\,857\cdots\ :\ 142 + 857 = 999$;
- $\dfrac{1}{7} = 0,14\,28\,57\cdots\ :\ 14 + 28 + 57 = 99$;
- $\dfrac{1}{13} = 0,07\,69\,23\cdots\ :\ 7 + 69 + 23 = 99.$

Contre-exemple (trouver un énoncé quand même) :

- $\dfrac{1}{73} = 0{,}01\,36\,98\,63\cdots\ :\ 1 + 36 + 98 + 63 = 2 \times 99.$

Calcul exotique de 1/13

$$\frac{1}{13} = 0, \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \cdots$$

- $7 \times 11 \times 13 = 1001 \implies 13 | 10^6 - 1 = (10^3 + 1)(10^3 - 1)$

Calcul exotique de 1/13

$$\frac{1}{13} = 0,0 \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \cdots$$

- $7 \times 11 \times 13 = 1001 \implies 13 | 10^6 - 1 = (10^3 + 1)(10^3 - 1)$
- $13 > 10$

Calcul exotique de 1/13

$$\frac{1}{13} = 0,0 \bullet \bullet \bullet \bullet 3 \cdots$$

- $7 \times 11 \times 13 = 1001 \implies 13 | 10^6 - 1 = (10^3 + 1)(10^3 - 1)$
- $13 > 10$
- $3 \times 3 = 9$

Calcul exotique de 1/13

$$\frac{1}{13} = 0,0 \bullet 6\ 9 \bullet 3 \cdots$$

- $7 \times 11 \times 13 = 1001 \implies 13 | 10^6 - 1 = (10^3 + 1)(10^3 - 1)$
- $13 > 10$
- $3 \times 3 = 9$
- $$\begin{array}{r} 0 \bullet \bullet \\ + \ \bullet \bullet 3 \\ \hline 9\ 9\ 9 \end{array}$$

Calcul exotique de 1/13

$$\frac{1}{13} = 0,076\,923\cdots$$

- $7 \times 11 \times 13 = 1001 \implies 13 | 10^6 - 1 = (10^3 + 1)(10^3 - 1)$
- $13 > 10$
- $3 \times 3 = 9$
- $$\begin{array}{r} 0 \bullet \bullet \\ + \bullet \bullet 3 \\ \hline 9\,9\,9 \end{array}$$
- $$\begin{array}{r} 0 \bullet \\ + 6\,9 \\ + \bullet\ 3 \\ \hline 9\,9 \end{array}$$