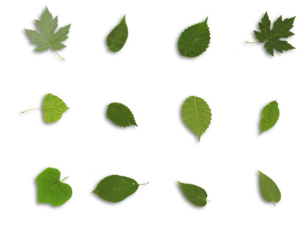
"Mais c'est impossible !"
Exemples d'utilisation d'invariants

Lycée Saint-Exupéry, 4 février 2008

Jérôme Germoni (université Lyon 1)

Deux types de problèmes

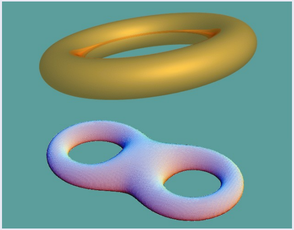
1. On veut *classer* une catégorie d'objets ;



Une démarche possible : trouver une quantité facile à calculer, qui ne change pas par les transformations élémentaires.

Deux types de problèmes

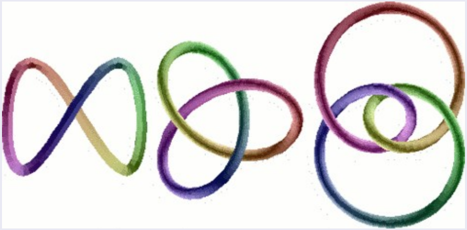
1. On veut *classer* une catégorie d'objets ; plus modestement, on veut séparer deux objets d'une même catégorie :



Une démarche possible : trouver une quantité facile à calculer, qui ne change pas par les transformations élémentaires.

Deux types de problèmes

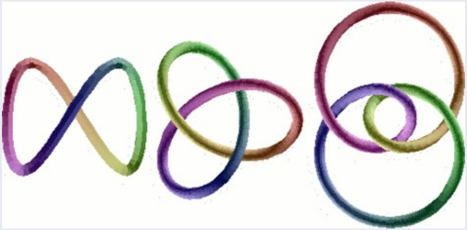
1. On veut *classer* une catégorie d'objets ; plus modestement, on veut séparer deux objets d'une même catégorie :



Une démarche possible : trouver une quantité facile à calculer, qui ne change pas par les transformations élémentaires.

Deux types de problèmes

1. On veut *classer* une catégorie d'objets ; plus modestement, on veut séparer deux objets d'une même catégorie :



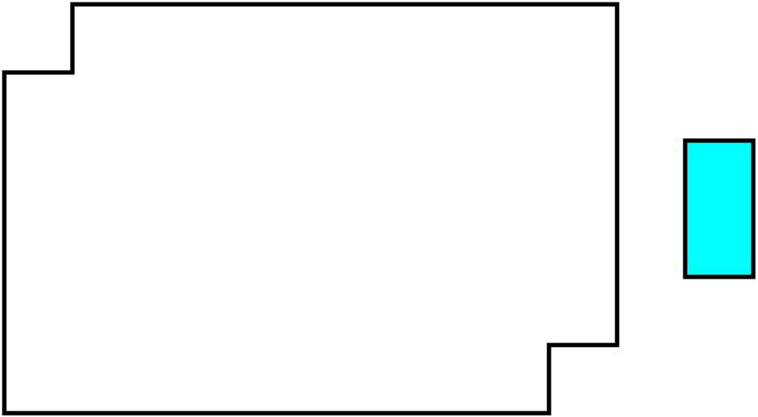
2. On essaie de faire quelque chose, et on n'y arrive pas. Mais pour se convaincre que ce n'est pas possible, il y aurait trop de cas à tester. Que faire ?

Une démarche possible : trouver une quantité facile à calculer, qui ne change pas par les transformations élémentaires.

Plan

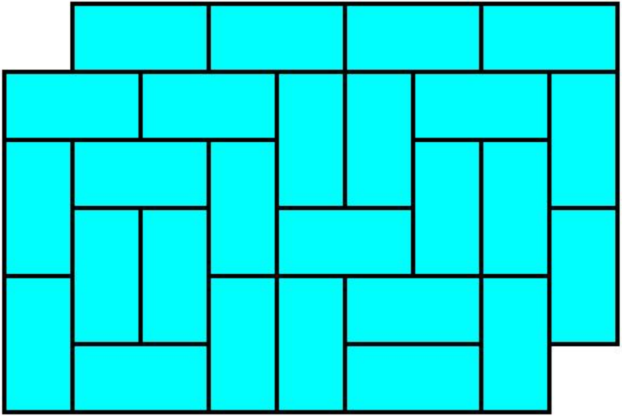
La question

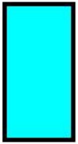
Paver un rectangle écorné par des dominos 1×2



Un exemple

Rectangle de départ : 6×9

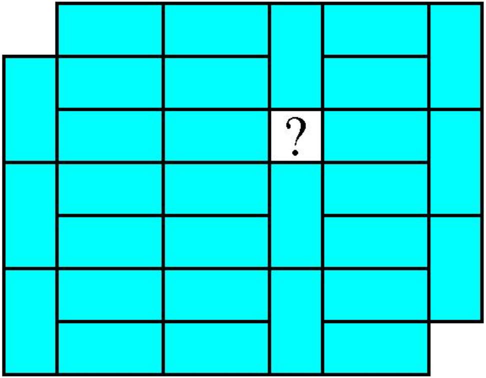




▸ 0 ▸ 1 ▸ 2

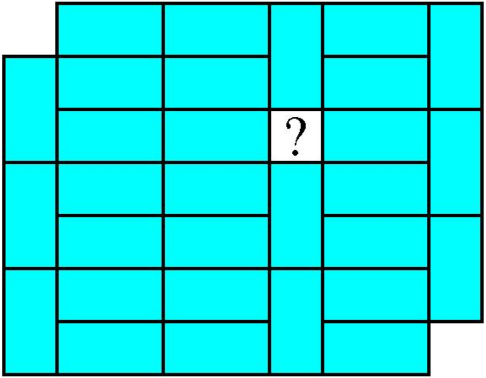
Cas de deux côtés impairs

Rectangle de départ : $a \times b$, avec a et b impairs



Cas de deux côtés impairs

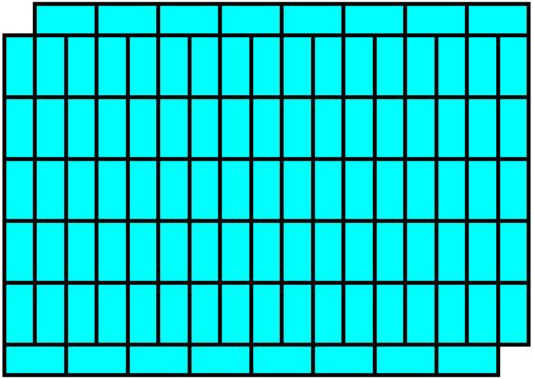
Rectangle de départ : $a \times b$, avec a et b impairs



Impossible ! L'aire à recouvrir est impaire.

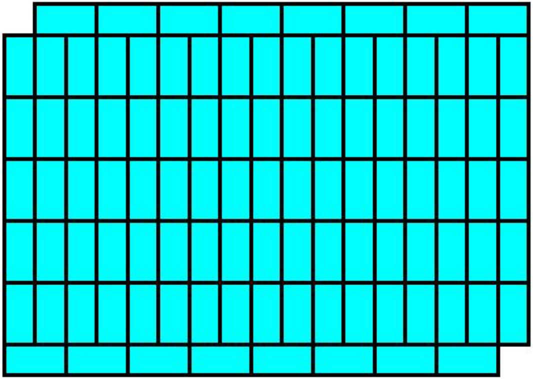
Cas de d'un côté pair et un côté impair

Rectangle de départ : $a \times b$, avec a pair et b impair



Cas de d'un côté pair et un côté impair

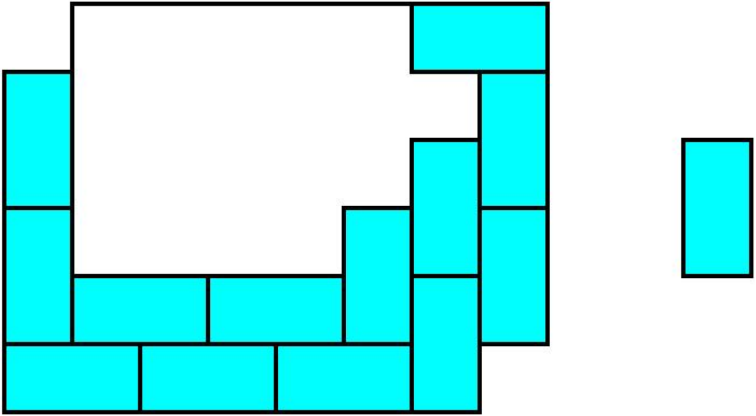
Rectangle de départ : $a \times b$, avec a pair et b impair



Possible !

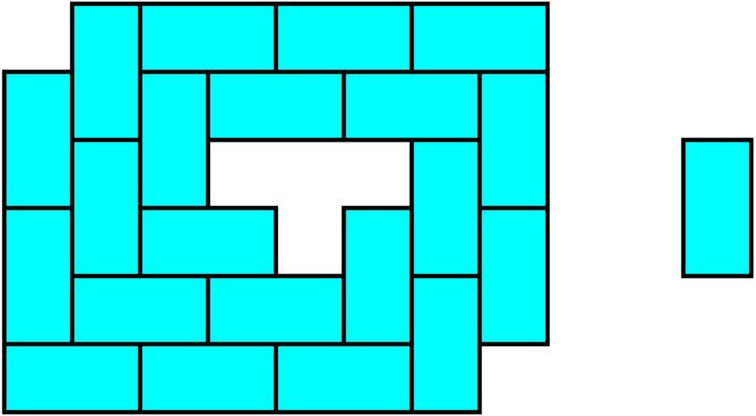
Cas de deux côtés pairs

Rectangle de départ : $a \times b$, avec a et b pairs



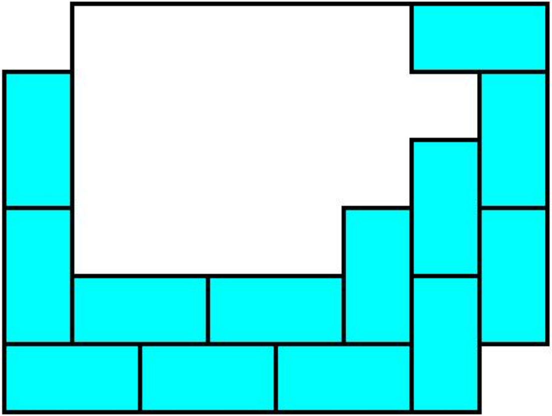
Cas de deux côtés pairs

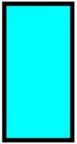
Rectangle de départ : $a \times b$, avec a et b pairs



Cas de deux côtés pairs

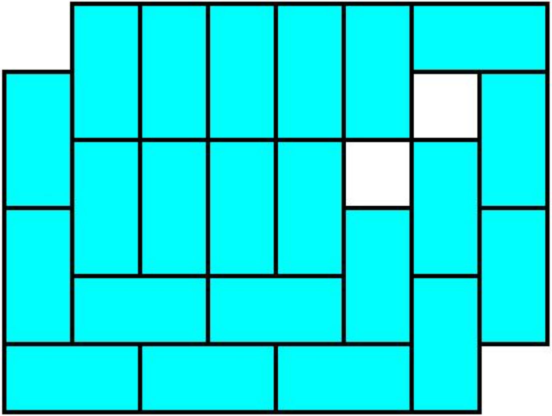
Rectangle de départ : $a \times b$, avec a et b pairs

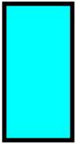




Cas de deux côtés pairs

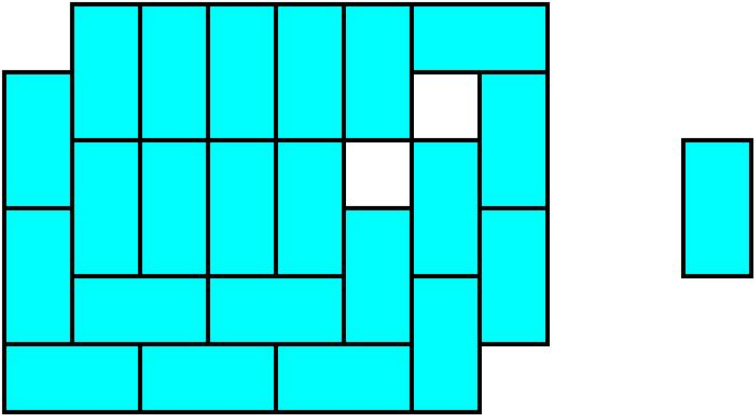
Rectangle de départ : $a \times b$, avec a et b pairs





Cas de deux côtés pairs

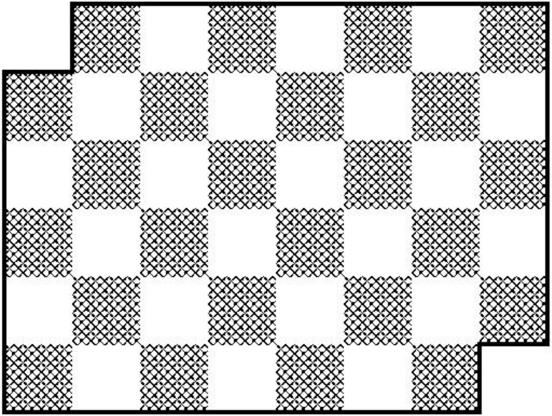
Rectangle de départ : $a \times b$, avec a et b pairs



Vraiment pas possible ?

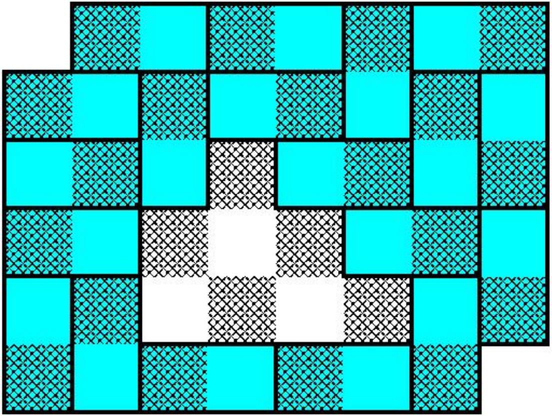
Cas de deux côtés pairs : indication

Rectangle de départ : $a \times b$, avec a et b pairs



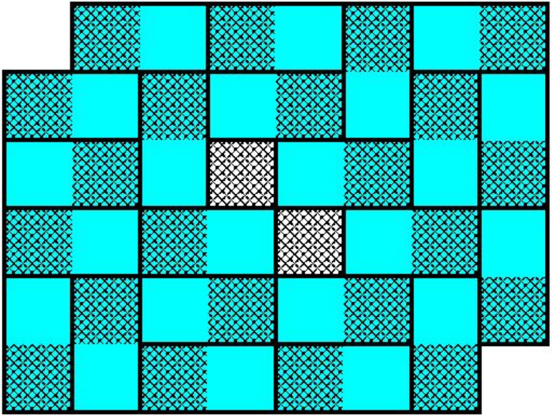
Cas de deux côtés pairs : indication

Rectangle de départ : $a \times b$, avec a et b pairs



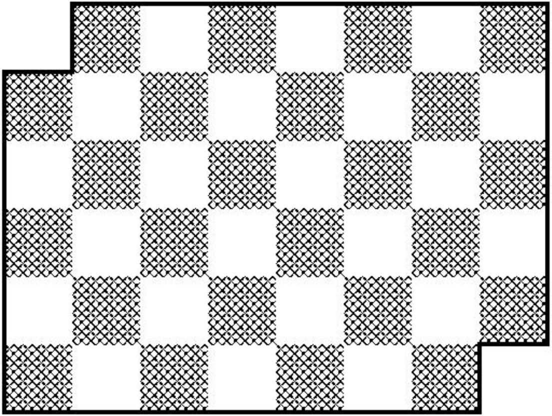
Cas de deux côtés pairs : indication

Rectangle de départ : $a \times b$, avec a et b pairs



Cas de deux côtés pairs : preuve !

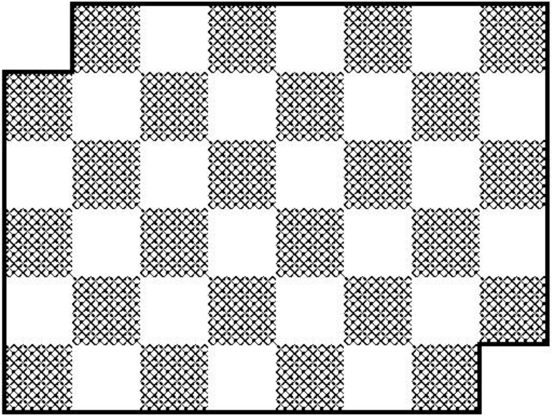
Rectangle de départ : $a \times b$, avec a et b pairs



Invariant : $\left(\begin{array}{c} \text{nb cases} \\ \text{hachurées} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{nb cases} \\ \text{lisses} \end{array} \right)$

Cas de deux côtés pairs : preuve !

Rectangle de départ : $a \times b$, avec a et b pairs



Invariant : $\left(\begin{array}{c} \text{nb cases} \\ \text{hachurées} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{nb cases} \\ \text{lisses} \end{array} \right) = 2$

Une utilisation d'un invariant

Imaginons un *système* qui peut être dans différents *états*, on passe de l'un à l'autre par des *transformations*.

Prouver l'impossibilité

Pour prouver qu'on ne peut pas passer d'un état à un autre sans essayer toutes les possibilités :

1. on exhibe un invariant (facile à calculer) ;
2. on le calcule dans la situation initiale ;
3. on le calcule dans la situation finale ;

Si ces deux valeurs sont différentes, c'est gagné.

Ex : parité du nb de cases ; $\left(\begin{array}{c}\text{nb cases}\\ \text{hachurées}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{nb cases}\\ \text{lisses}\end{array}\right)$

Plan

1. Pavage
   - Question
   - Trois cas, deux invariants
2. De nouveaux nombres ?
   - Deux nombres
   - Quatre nombres
3. Le solitaire agrandi ?
   - Solitaire classique
   - Solitaire agrandi
   - Retour au solitaire classique

Une arithmétique simplifiée

Ce qui a été crucial :

$$\begin{aligned} \text{pair} + \text{pair} &= \text{pair} \\ \text{pair} + \text{impair} &= \text{impair} \\ \text{impair} + \text{pair} &= \text{impair} \\ \text{impair} + \text{impair} &= \text{pair} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{pair} \times \text{pair} &= \text{pair} \\ \text{pair} \times \text{impair} &= \text{pair} \\ \text{impair} \times \text{pair} &= \text{pair} \\ \text{impair} \times \text{impair} &= \text{impair} \end{aligned}$$

Une arithmétique simplifiée

Simplifions les notations : pair $\rightsquigarrow$ 0, impair $\rightsquigarrow$ 1.

$$\begin{aligned} 0+0 &= 0 \\ 0+1 &= 1 \\ 1+0 &= 1 \\ 1+1 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 0\times 0 &= 0 \\ 0\times 1 &= 0 \\ 1\times 0 &= 0 \\ 1\times 1 &= 1 \end{aligned}$$

Le paradis des distraits

Des calculs simplifiés !

Plus d'erreurs de signe

Pour $a, b \in \{0, 1\}$, on peut écrire :

$$2 \times a = a + a = 0.$$

En particulier :

$$-a = a.$$

Le paradis des distraits

Des calculs simplifiés !

Plus d'erreurs de signe, plus de double produit oublié !

Pour $a, b \in \{0, 1\}$, on peut écrire :

$$2 \times a = a + a = 0.$$

En particulier :

$$-a = a.$$

Amusant : dans cet ensemble de nombres :

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2.$$

Quelques équations

1. Cherchons $x \in \{0, 1\}$ tel que $x^2 = 1$:

$$x^2 + 1 = 0 \iff (x+1)^2 = 0 \iff x + 1 = 0 \iff x = 1.$$

Quelques équations

1. Cherchons $x \in \{0, 1\}$ tel que $x^2 = 1$:

$$x^2 + 1 = 0 \iff (x+1)^2 = 0 \iff x + 1 = 0 \iff x = 1.$$

2. Cherchons $\alpha \in \{0, 1\}$ tel que $\alpha^2 = \alpha + 1$:

$$0^2 \neq 0 + 1, \qquad 1^2 \neq 1 + 1.$$

Quelques équations

1. Cherchons $x \in \{0, 1\}$ tel que $x^2 = 1$:

$$x^2 + 1 = 0 \iff (x+1)^2 = 0 \iff x + 1 = 0 \iff x = 1.$$

2. Cherchons $\alpha \in \{0, 1\}$ tel que $\alpha^2 = \alpha + 1$:

$$0^2 \neq 0 + 1, \qquad 1^2 \neq 1 + 1.$$

Pas de α tel que $\alpha^2 = \alpha + 1$? On en crée un.

Quelques calculs

Addition : très facile !

$$\alpha + 0 = \alpha, \ \alpha + 1 = \alpha + 1, \ \alpha + (\alpha + 1) = 1...$$

Quelques calculs

Addition : très facile !

$$\alpha + 0 = \alpha,\ \alpha + 1 = \alpha + 1,\ \alpha + (\alpha + 1) = 1\ldots$$

Multiplication : pas dur !

$$\alpha^2 = \alpha + 1, \quad (\alpha + 1)^2 = \alpha^2 + 1 = \alpha + 1 + 1 = \alpha,$$

$$\alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha = \alpha + 1 + \alpha = 1.$$

Quelques calculs

Addition : très facile !

$$\alpha + 0 = \alpha, \ \alpha + 1 = \alpha + 1, \ \alpha + (\alpha + 1) = 1\dots$$

Multiplication : pas dur !

$$\alpha^2 = \alpha + 1, \quad (\alpha + 1)^2 = \alpha^2 + 1 = \alpha + 1 + 1 = \alpha,$$

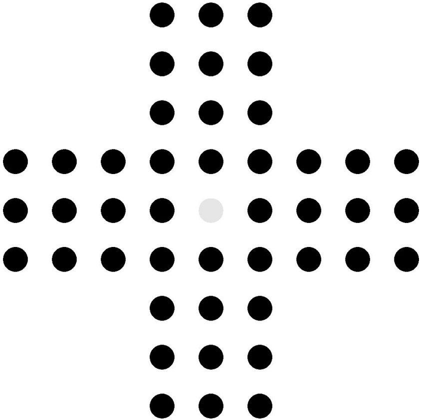
$$\alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha = \alpha + 1 + \alpha = 1.$$

Et même la division (sauf par 0...) :

$$\frac{1}{1} = 1, \quad \frac{1}{\alpha} = \alpha + 1, \quad \frac{1}{\alpha + 1} = \alpha.$$

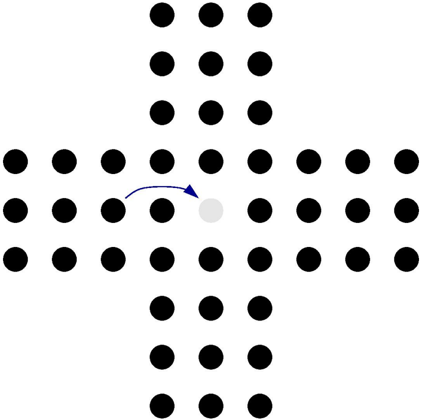
Plan

Le jeu du solitaire



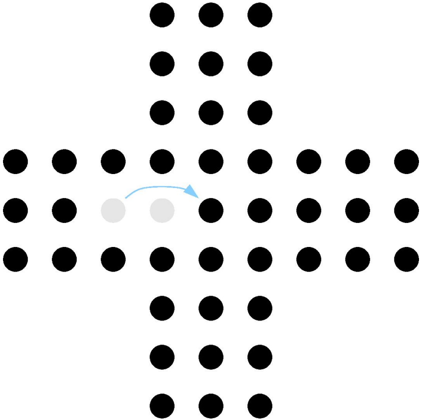
But : éliminer toutes les pierres, sauf une.

Le jeu du solitaire



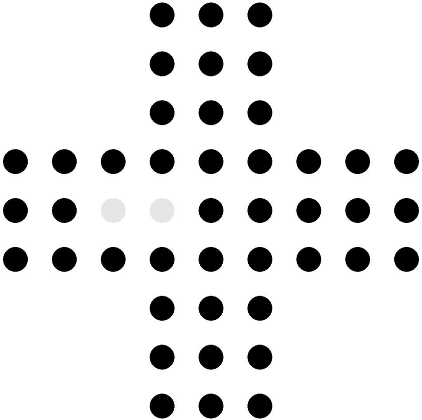
But : éliminer toutes les pierres, sauf une.

Le jeu du solitaire



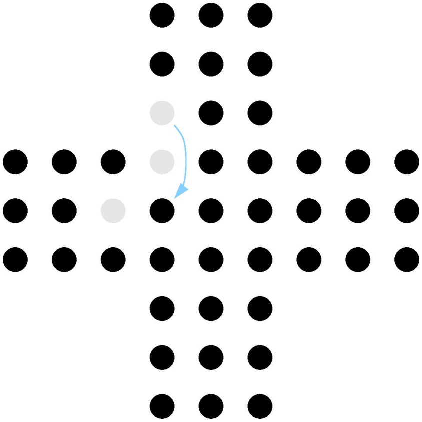
But : éliminer toutes les pierres, sauf une.

Le jeu du solitaire



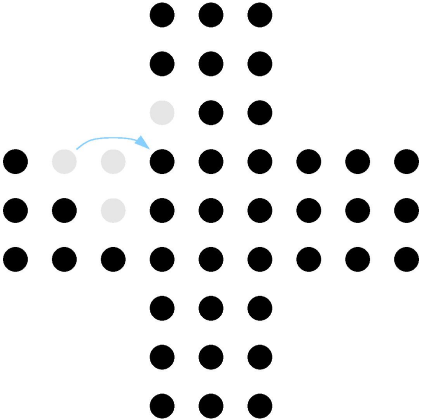
But : éliminer toutes les pierres, sauf une.

Le jeu du solitaire



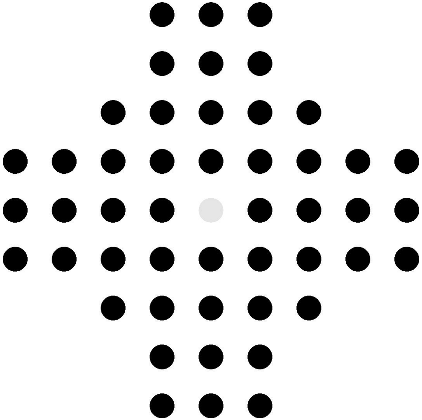
But : éliminer toutes les pierres, sauf une.

Le jeu du solitaire



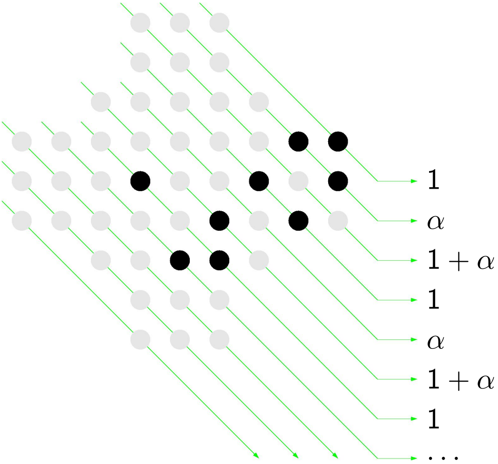
But : éliminer toutes les pierres, sauf une.

Le jeu du solitaire agrandi



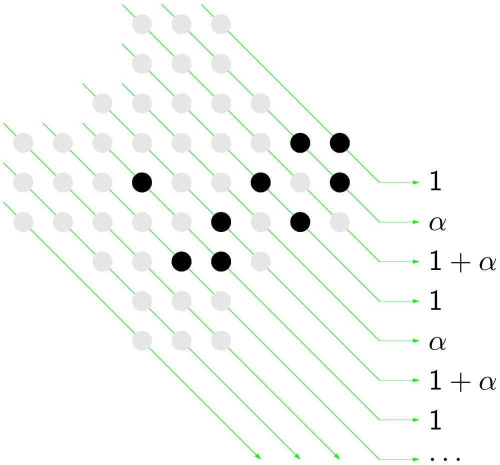
But : montrer qu'on ne peut pas finir avec une seule pierre

"Energie" d'une configuration



- On numérote les diagonales
- Chaque pierre contribue selon sa diagonale

"Energie" d'une configuration

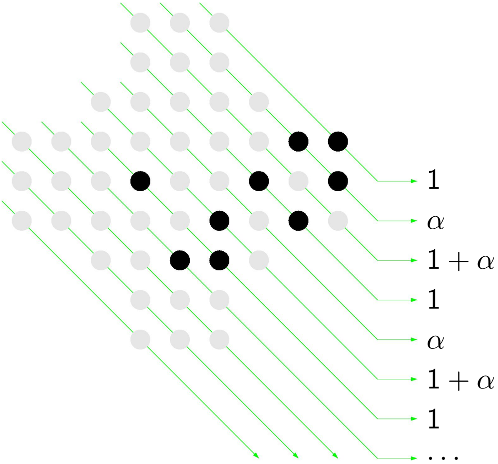


- On numérote les diagonales
- Chaque pierre contribue selon sa diagonale

Energie :

$E = 1 + 2 \times \alpha + 2 \times 1 + (1 + \alpha) + 2 \times 1 + \alpha$

"Energie" d'une configuration



- On numérote les diagonales
- Chaque pierre contribue selon sa diagonale

Energie :

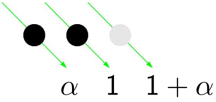
$E = 1 + 2 \times \alpha + 2 \times 1 + (1+\alpha) + 2 \times 1 + \alpha$

$E = 1 + (1+\alpha) + \alpha$

$E = 0$

Invariance de l'énergie (1)

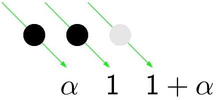
Avant la prise :



énergie avant : $1 + \alpha$

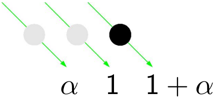
Invariance de l'énergie (1)

Avant la prise :



énergie avant : $1+\alpha$

Après la prise :

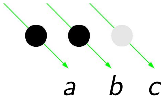


énergie après : $1+\alpha$

Invariance de l'énergie (2)

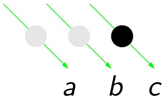
En général...

Avant la prise :



énergie avant : $a + b$

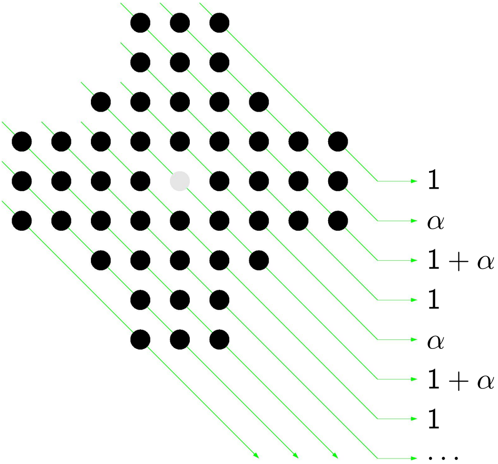
Après la prise :



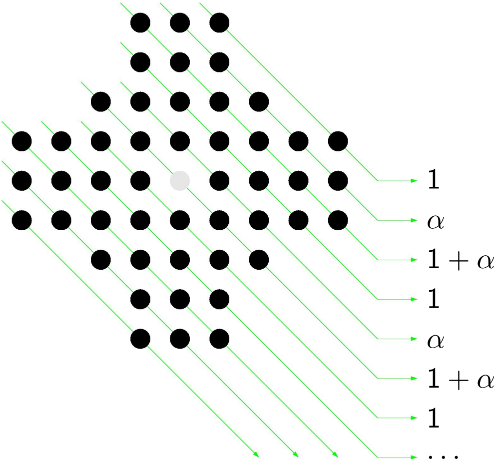
énergie après : c

Mais $a + b + c = 1 + \alpha + (1 + \alpha) = 0$, donc $a + b = c$.

Energie de la configuration de départ

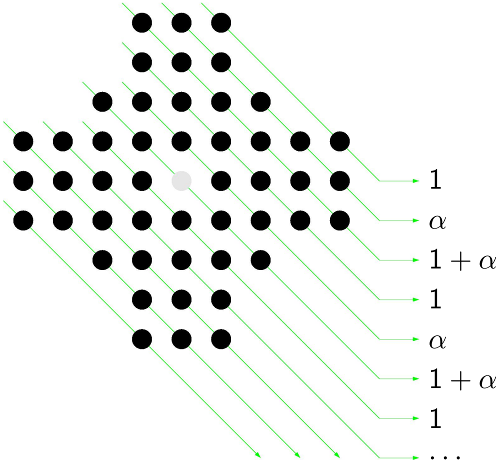


Energie de la configuration de départ



Energie totale : 0

Energie de la configuration de départ



Energie totale : 0

On ne peut donc pas terminer avec une seule pierre !

A vous de jouer...

On ne peut gagner que sur une des cases cerclées.