

À la recherche d'invariants

Dix ans de l'IREM de la Réunion

Jérôme Germoni (IREM de Lyon - UCBL)

Nick Hornby, *High fidelity* : le narrateur a 4000 disques.
Il les classe...

En mathématiques, une bonne part de l'activité consiste en

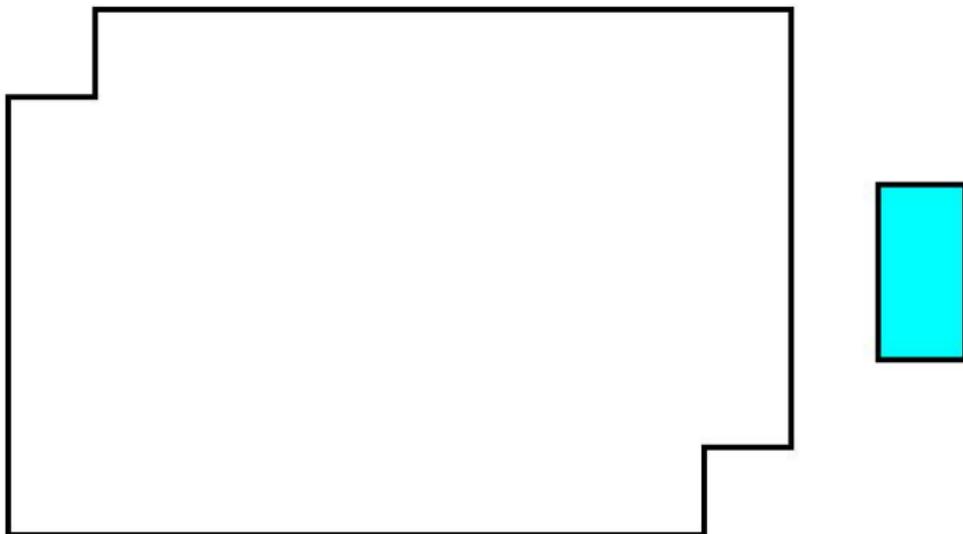
- la recherche d'invariants,
- des classifications.

Plan

- 1 Un problème de pavage
 - Question
 - Trois cas, deux invariants
- 2 D'où est prise la photo ?
 - Se repérer par les azimuts
 - Projections et birapport
 - Résolution du problème
- 3 Invariants et classifications
 - Des invariants
 - Classifications
 - Conclusion

La question

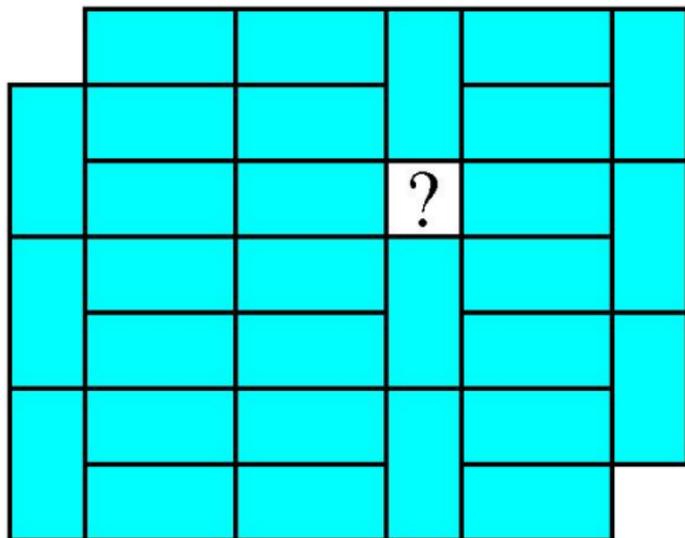
Paver un rectangle écorné par des dominos 1×2 .



Côtés du rectangle entiers, carrés de côté 1.

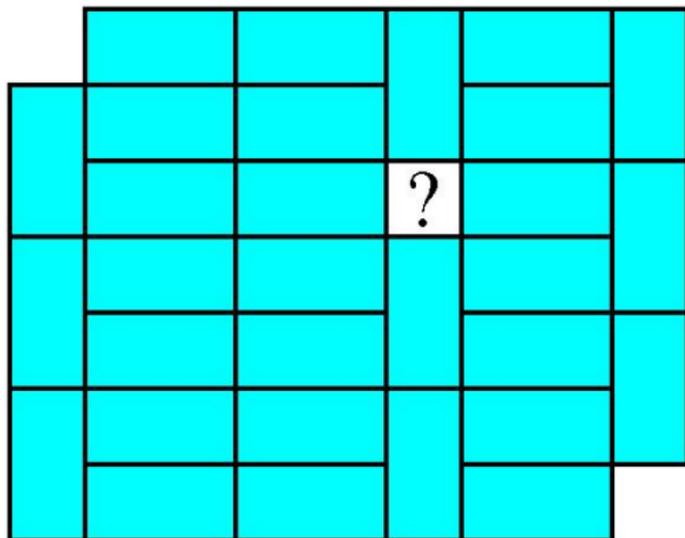
Cas de deux côtés impairs

Rectangle de départ : $a \times b$, avec a et b impairs



Cas de deux côtés impairs

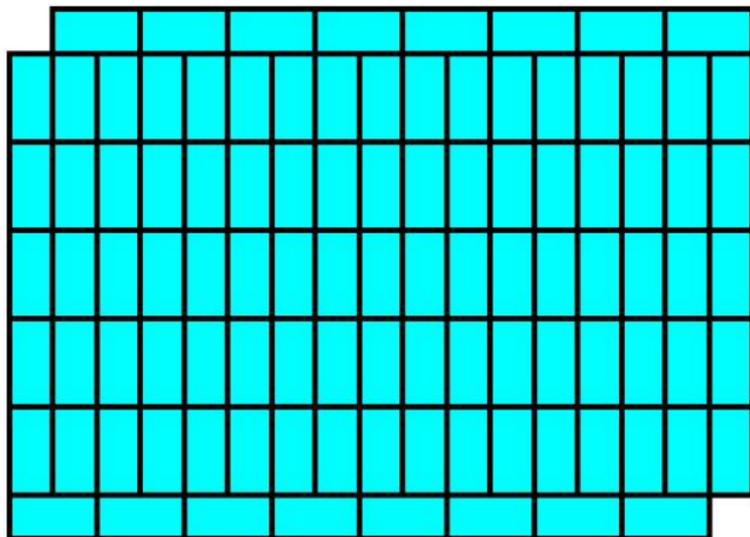
Rectangle de départ : $a \times b$, avec a et b impairs



Impossible ! L'aire à recouvrir est impaire.

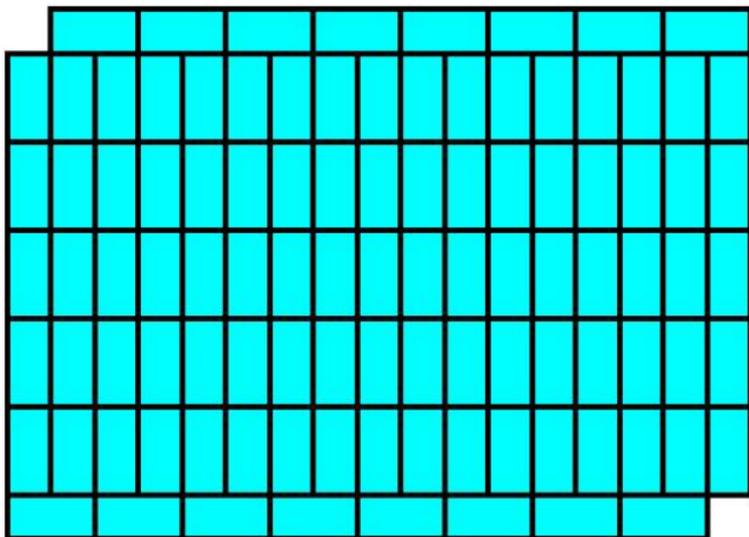
Cas de d'un côté pair et un côté impair

Rectangle de départ : $a \times b$, avec a pair et b impair



Cas de d'un côté pair et un côté impair

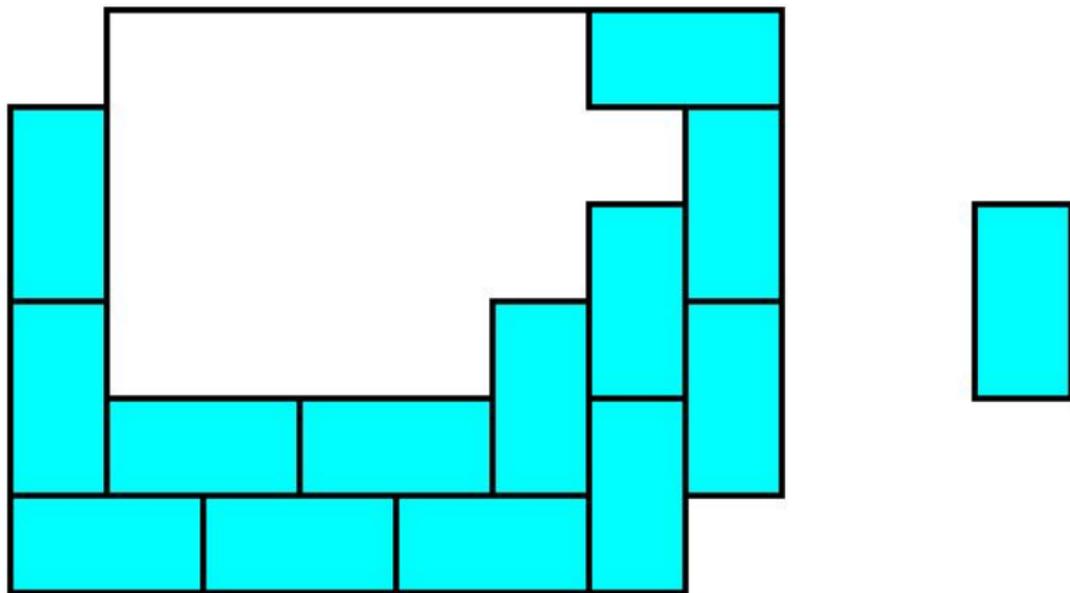
Rectangle de départ : $a \times b$, avec a pair et b impair



Possible !

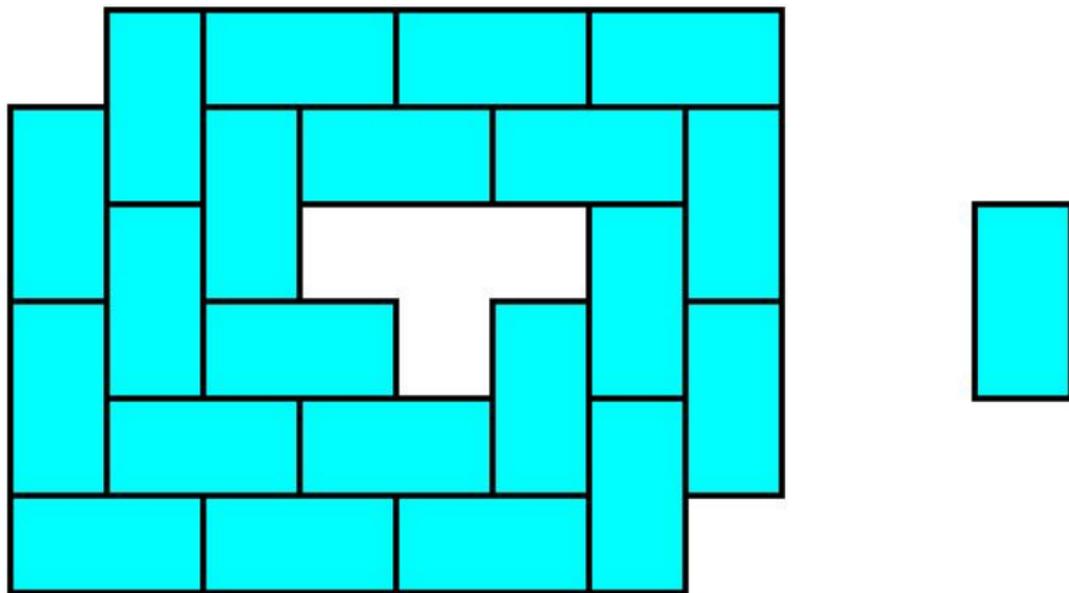
Cas de deux côtés pairs

Rectangle de départ : $a \times b$, avec a et b pairs



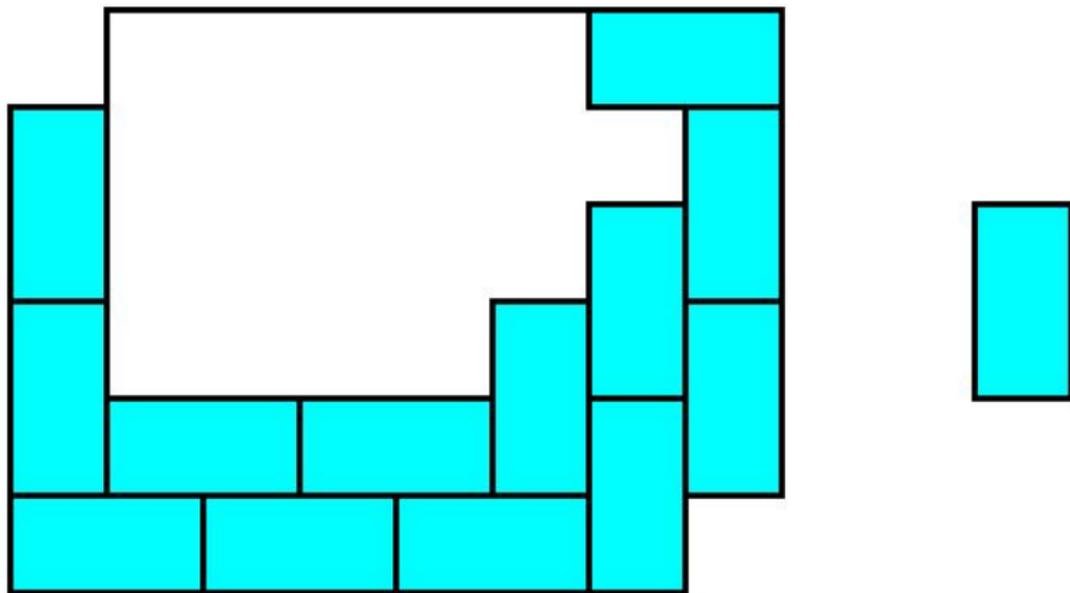
Cas de deux côtés pairs

Rectangle de départ : $a \times b$, avec a et b pairs



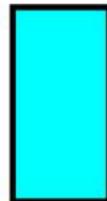
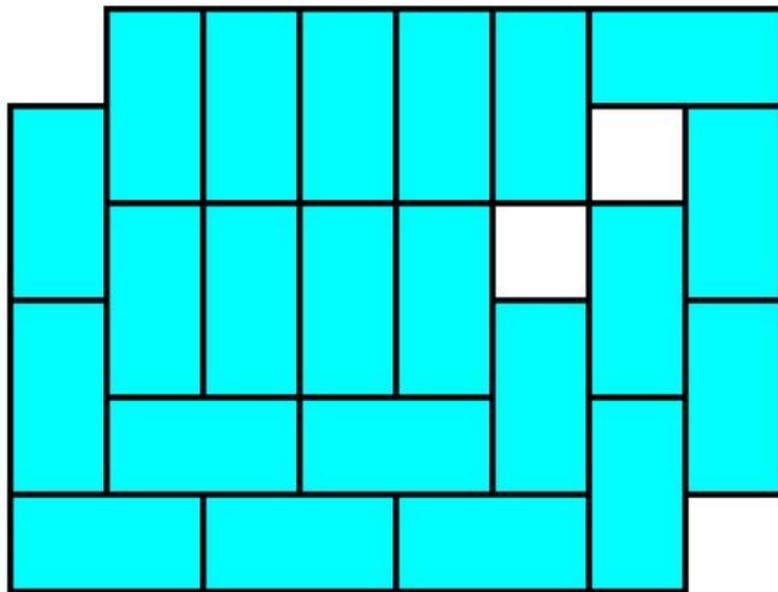
Cas de deux côtés pairs

Rectangle de départ : $a \times b$, avec a et b pairs



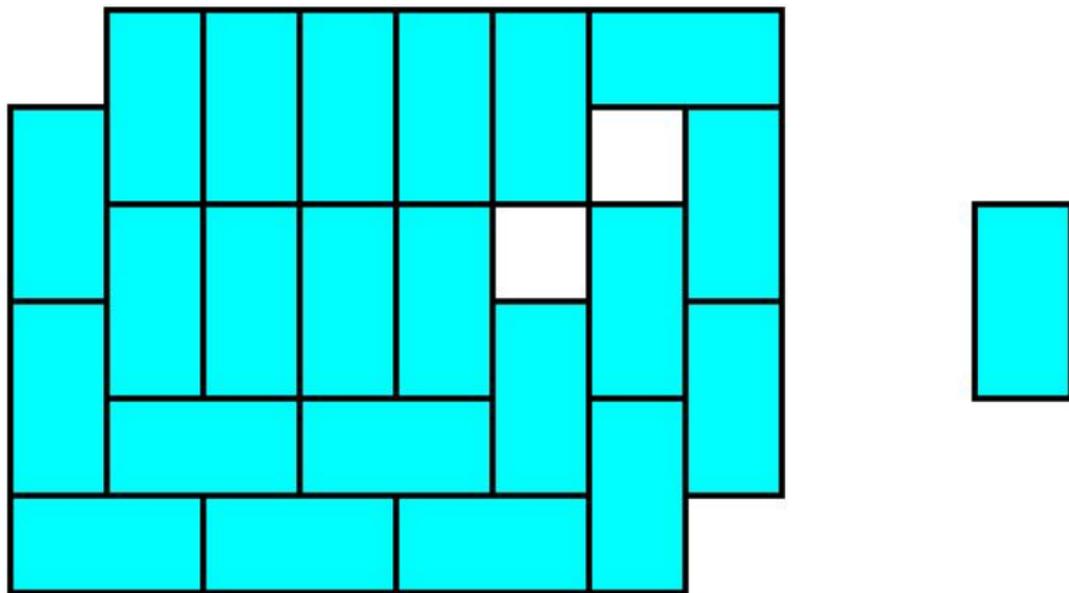
Cas de deux côtés pairs

Rectangle de départ : $a \times b$, avec a et b pairs



Cas de deux côtés pairs

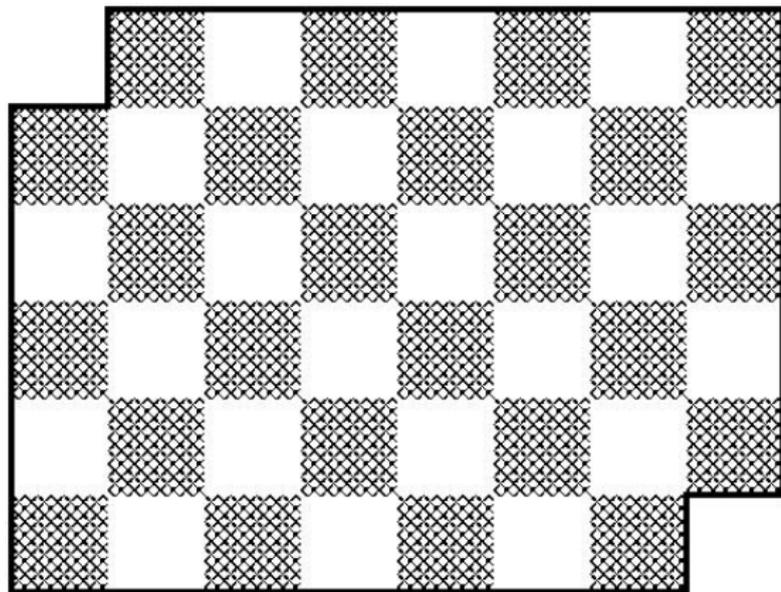
Rectangle de départ : $a \times b$, avec a et b pairs



Vraiment pas possible ?

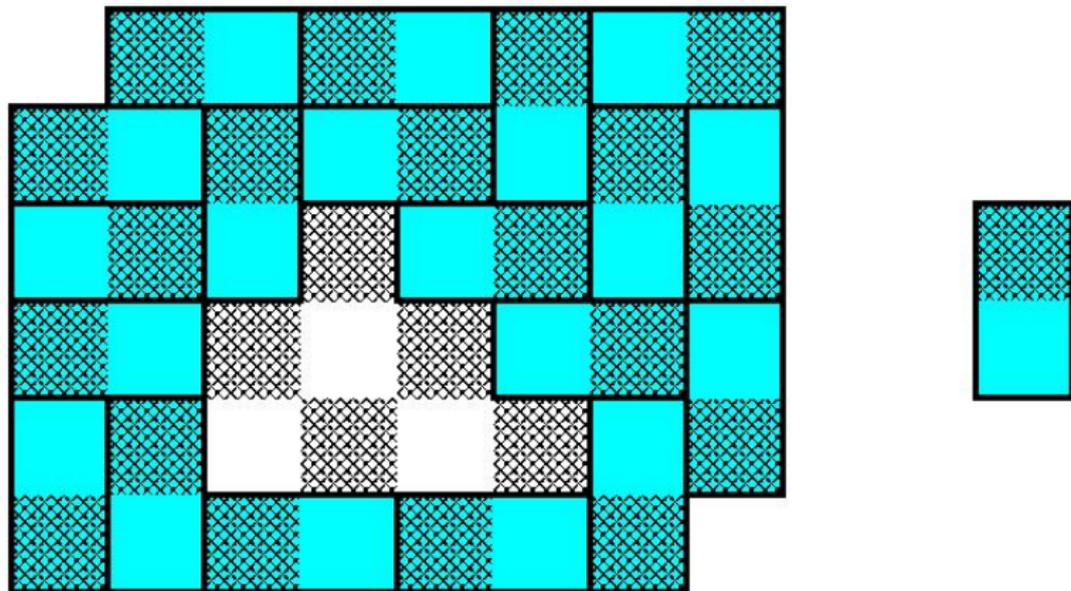
Cas de deux côtés pairs : indication

Rectangle de départ : $a \times b$, avec a et b pairs



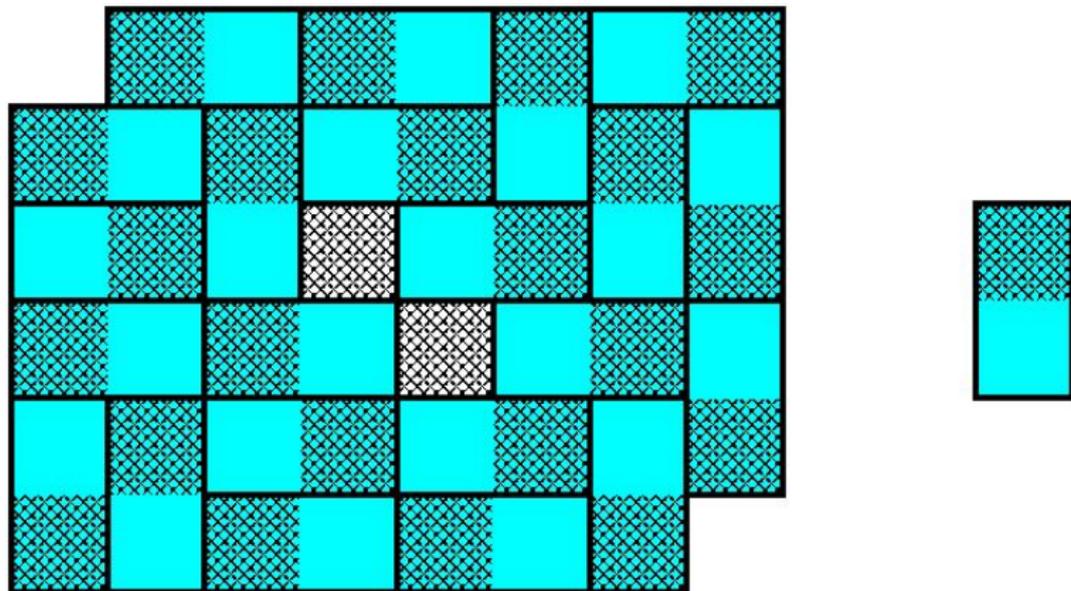
Cas de deux côtés pairs : indication

Rectangle de départ : $a \times b$, avec a et b pairs



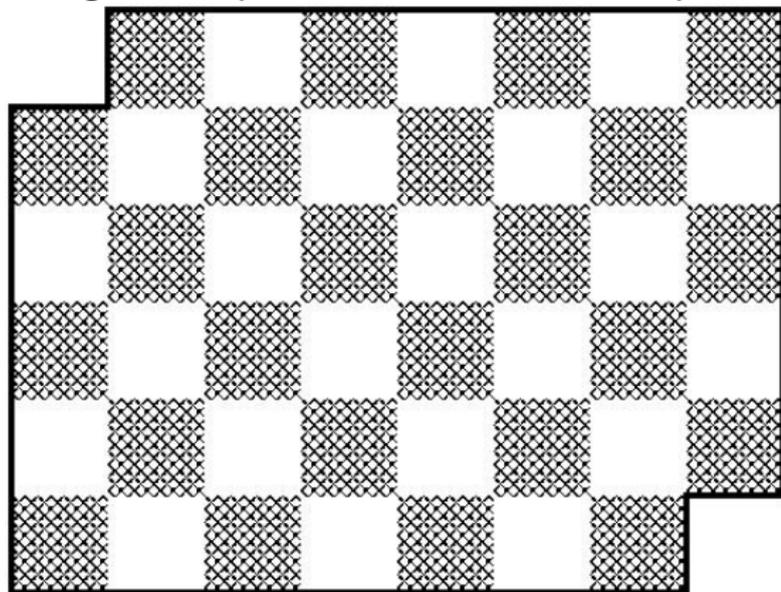
Cas de deux côtés pairs : indication

Rectangle de départ : $a \times b$, avec a et b pairs



Cas de deux côtés pairs : preuve !

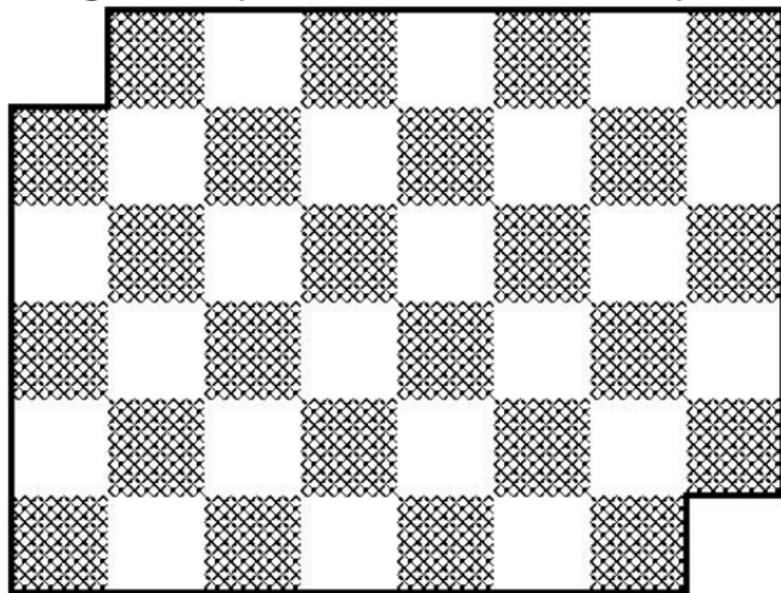
Rectangle de départ : $a \times b$, avec a et b pairs



Invariant : $\left(\begin{array}{c} \text{nb cases} \\ \text{hachurées} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{nb cases} \\ \text{lisses} \end{array} \right)$

Cas de deux côtés pairs : preuve !

Rectangle de départ : $a \times b$, avec a et b pairs



Invariant : $\left(\begin{array}{c} \text{nb cases} \\ \text{hachurées} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{nb cases} \\ \text{lisses} \end{array} \right) = 2$

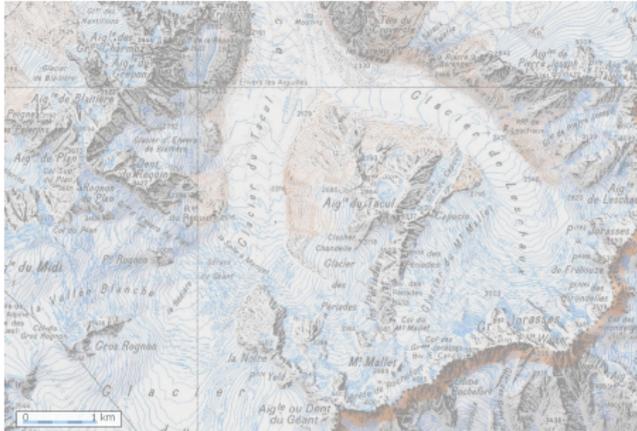
Plan

- 1 Un problème de pavage
 - Question
 - Trois cas, deux invariants
- 2 D'où est prise la photo ?
 - Se repérer par les azimuts
 - Projections et birapport
 - Résolution du problème
- 3 Invariants et classifications
 - Des invariants
 - Classifications
 - Conclusion

Se repérer par beau temps



Se repérer par beau temps



Se repérer par beau temps

Azimut du Grand Bénard : 110° E

Azimut du Piton des neiges : 143° E



Se repérer par beau temps (2)

Deux faits

- 1 La réalité et la carte sont semblables.
L'angle est un **invariant** de similitude : coïncide dans la réalité et sur la carte.
- 2 L'ensemble des points p d'où l'on voit a avec un azimut donné est une **droite** bien déterminée.

Mesurer dans la réalité, tracer sur la carte.

Idée : déterminer un point comme l'intersection de deux courbes.

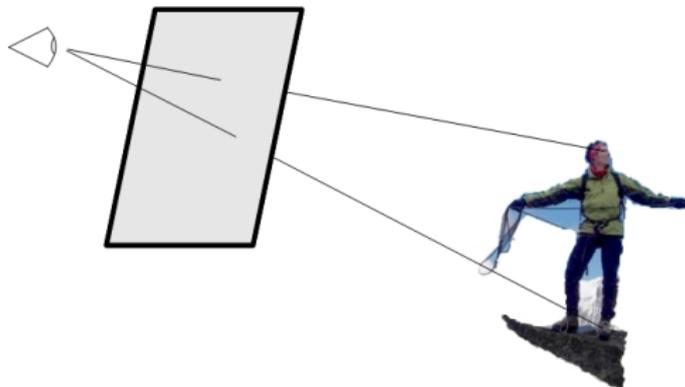
Que fait l'appareil photo ?

Tout se passe comme si...



Que fait l'appareil photo ?

Tout se passe comme si...



l'appareil faisait une projection centrale.

Qu'est-ce que l'appareil photo ne fait pas ?

Pas de conservation des distances



Qu'est-ce que l'appareil photo ne fait pas ?

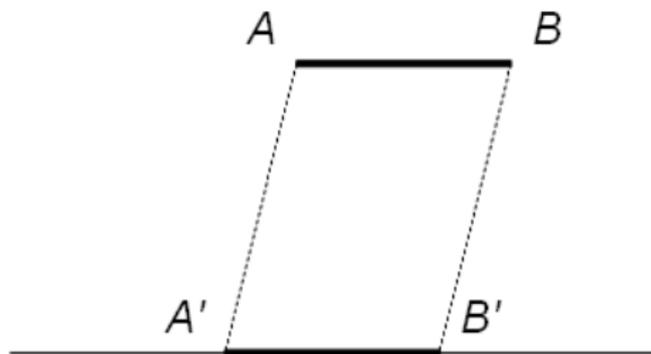
Pas de conservation des distances ni des angles.



Alors, quel invariant ?

Invariants des projections

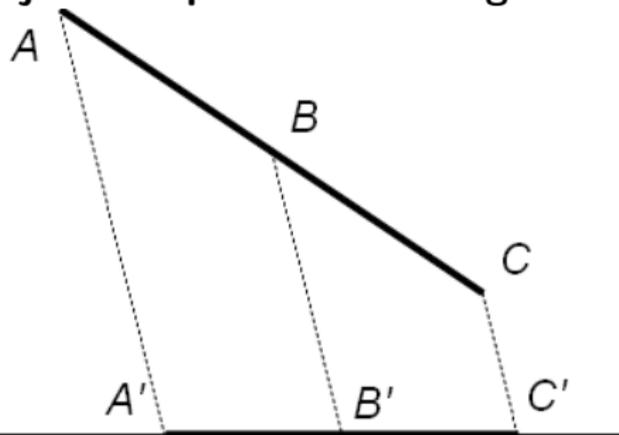
Projection “parallèle” : cas particulier



Distances invariantes : $AB = A'B'$.

Invariants des projections (2)

Projection "parallèle" : cas général



Distances non invariantes :

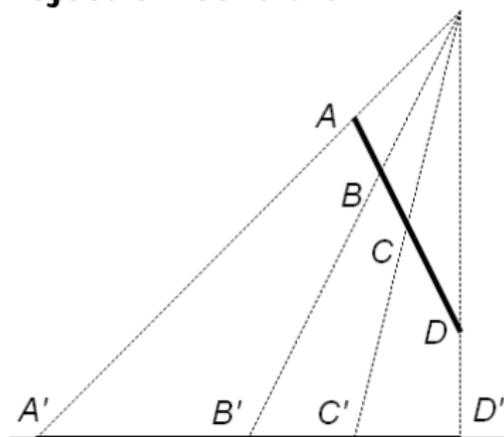
$$AB \neq A'B'$$

Rapports de distances invariants :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

Invariants des projections (3)

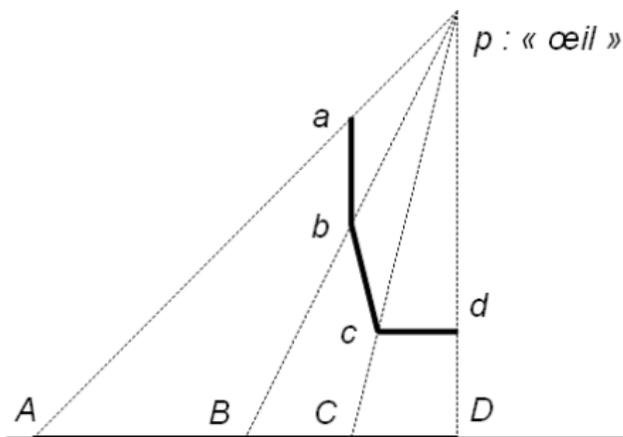
Projection centrale



Rapports de distances non invariants : $\frac{AB}{AC} \neq \frac{A'B'}{A'C'}$

Rapports de rapports invariants : $\frac{AB}{AC} : \frac{DB}{DC} = \frac{A'B'}{A'C'} : \frac{D'B'}{D'C'}$

Birapport



Étant donné quatre points a, b, c, d , définir le birapport de ces quatre points vus de p :

- choisir une droite,
- faire la projection centrale depuis p : A, B, C, D ,
- calculer $\frac{AB}{AC} : \frac{DB}{DC}$.

Utilisation du birapport

Deux faits

- 1 Le birapport est un **invariant** projectif : coïncide dans la réalité, sur la carte et sur la photo.
- 2 L'ensemble des points p d'où l'on voit a, b, c, d avec un birapport donné est une **conique** bien déterminée.

Mesurer sur la photo, tracer sur la carte.

Mesurer sur la photo

Sur la photo :



Mesurer sur la photo

Sur la photo :

- repérer quatre points connus,



Mesurer sur la photo

Sur la photo :

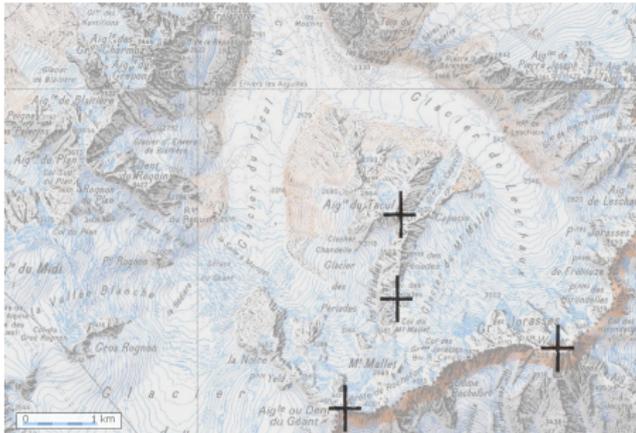
- repérer quatre points connus,
- les projeter et mesurer les abscisses,
- calculer le birapport (rapport de rapports).



Tracer sur la carte

Sur la carte :

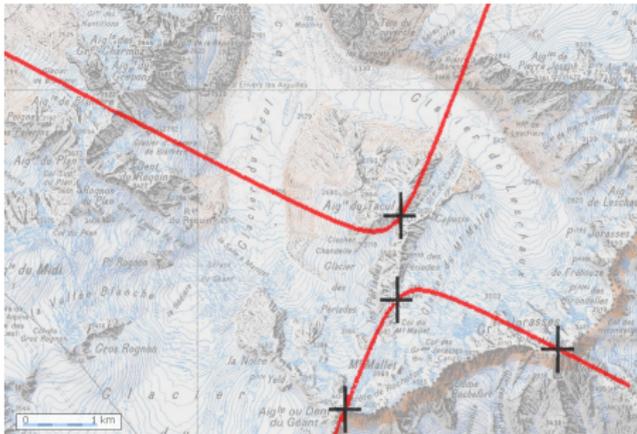
- repérer les quatre points,



Tracer sur la carte

Sur la carte :

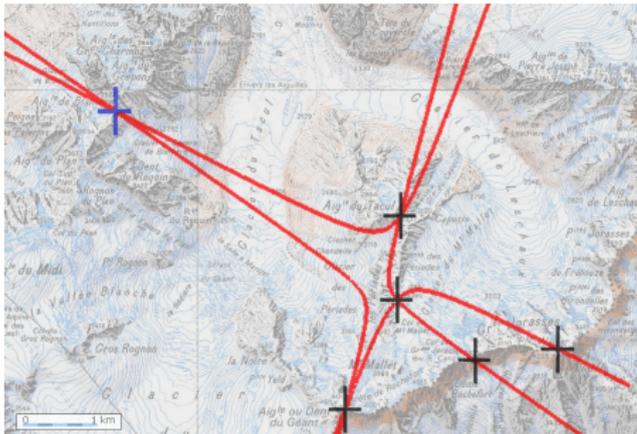
- repérer les quatre points,
- tracer la conique correspondant au birapport calculé,



Tracer sur la carte

Sur la carte :

- repérer les quatre points,
- tracer la conique correspondant au birapport calculé,
- recommencer avec quatre autres points.



Plan

- 1 Un problème de pavage
 - Question
 - Trois cas, deux invariants
- 2 D'où est prise la photo ?
 - Se repérer par les azimuts
 - Projections et birapport
 - Résolution du problème
- 3 Invariants et classifications
 - Des invariants
 - Classifications
 - Conclusion

Interprétation

Systeme	Pavage partiel	Points du plan
Transformations	Ajouter ou retirer un domino	Projeter
Invariants	Parité surface à couvrir Nb cases bches – nb cases noires	Birapport Alignement

- Preuve d'impossibilité
- Calculs ("contrôle") du système

Autres exemples d'invariants

- Vie courante : clé n° INSEE, clé compte bancaire, ISBN.
Clé INSEE = $97 - (\text{reste mod } 97)$: détection d'erreurs,
Exemple : $1710983137215 = 57 + 97 \times ?$; clé : 40.

Autres exemples d'invariants

- Vie courante : clé n° INSEE, clé compte bancaire, ISBN.
Clé INSEE = 97 - (reste mod 97) : détection d'erreurs,
Exemple : $1710983137215 = 57 + 97 \times ?$; clé : 40.
- Physique : équations de la mécanique
 - translations dans le temps \rightsquigarrow conservation de l'énergie
 - translations dans l'espace \rightsquigarrow quantité de mouvement
 - rotations de l'espace \rightsquigarrow moment cinétique

Autres exemples d'invariants

- Vie courante : clé n° INSEE, clé compte bancaire, ISBN.
Clé INSEE = 97 - (reste mod 97) : détection d'erreurs,
Exemple : $1710983137215 = 57 + 97 \times ?$; clé : 40.
- Physique : équations de la mécanique
 - translations dans le temps \rightsquigarrow conservation de l'énergie
 - translations dans l'espace \rightsquigarrow quantité de mouvement
 - rotations de l'espace \rightsquigarrow moment cinétique
- Physique : observables de la mécanique quantique

Les triangles

Transformations : déplacements (isométries).

Invariants : distances, angles.

Cas d'égalité des triangles : un côté, deux angles

Interprétation

Cas d'égalité des triangles : classification des triangles / isométrie

Les triangles

Transformations : déplacements (isométries).

Invariants : distances, angles.

Cas d'égalité des triangles : un côté, deux angles

Interprétation

Cas d'égalité des triangles : classification des triangles / isométrie

Transformations : similitudes ; invariants : angles

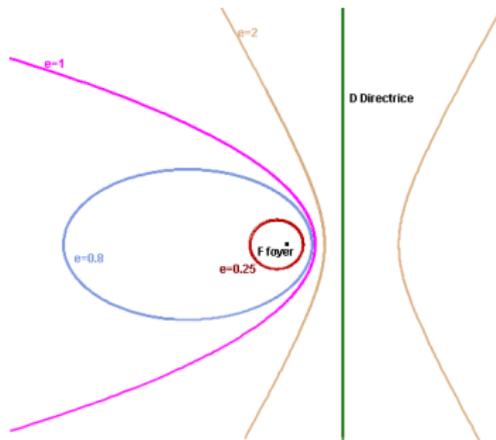
Triangles semblables : trois angles égaux

Attention (cf. *High fidelity*)

Classification : un système **et** des transformations

Classifications en mathématiques

- Triangles
- Classifications des coniques (par type, excentricité, demi-axes)



Classifications en mathématiques

- Triangles
- Classifications des coniques (par type, excentricité, demi-axes)
- Polyèdres réguliers



The Platonic solids. Scotland, ca. 2000 B.C. (Photo, courtesy Graham Challifour, from "Time Stands Still", K. Critchlow.)

Classifications en mathématiques

- Triangles
- Classifications des coniques (par type, excentricité, demi-axes)
- Polyèdres réguliers



tétraèdre



cube



octaèdre



dodécaèdre



icosaèdre

Classifications en mathématiques (2)

- Algèbre linéaire :
 - 1 e.v. : existence d'une base + dimension
 - 2 e.v. + morphisme : théorème du rang
 - 1 e.v. + endomorphisme : forme normale de Jordan
 - 1 e.v. euclidien : base orthonormée
 - 1 e.v. réel + forme quadratique : théorème de Sylvester
- Groupes finis simples (env. 10 000 pages)

Classifications en mathématiques (2)

- Algèbre linéaire :
 - 1 e.v. : existence d'une base + dimension
 - 2 e.v. + morphisme : théorème du rang
 - 1 e.v. + endomorphisme : forme normale de Jordan
 - 1 e.v. euclidien : base orthonormée
 - 1 e.v. réel + forme quadratique : théorème de Sylvester
- Groupes finis simples (env. 10 000 pages)
- Nœuds



Classifications dans d'autres sciences

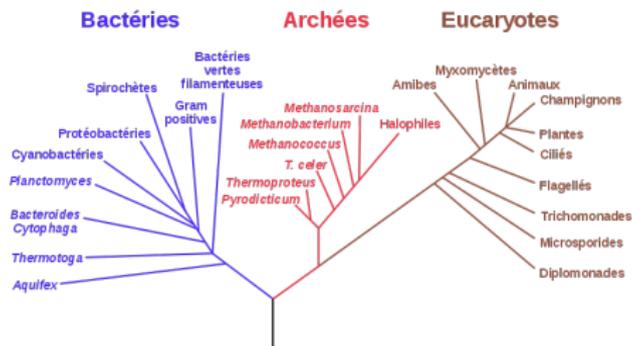
- Informatique : programmation orientée objet (classes)
- Chimie : tableau périodique de Mendeleïev

GROUPE		TABLEAU PÉRIODIQUE DES ÉLÉMENTS																18	VIIA
1 I																		2	0 0001
PÉRIODE	1	NOMÉCLATURE IUPAC																18	VIIA
	2	NOMÉCLATURE IUPAC																18	VIIA
	3	NOMÉCLATURE IUPAC																18	VIIA
	4	NOMÉCLATURE IUPAC																18	VIIA
1	H																	He	
2	Li Be																	B C N O F Ne	
3	Na Mg																	Al Si P S Cl Ar	
4	K Ca Sc Ti V Cr Mn Fe Co Ni Cu Zn Ga Ge As Se Br Kr																		
5	Rb Sr Y Zr Nb Mo Tc Ru Rh Pd Ag Cd In Sn Sb Te I Xe																		
6	Cs Ba La-Lu Hf Ta W Re Os Ir Pt Au Hg Tl Pb Bi Po At Rn																		
7	Fr Ra Ac-Lr Rf Db Sg Bh Hs Mt Uuq Uub Uuq Uuq Uuq																		
<p>Lanthanoïdes</p> <p>La Ce Pr Nd Pm Sm Eu Gd Tb Dy Ho Er Tm Yb Lu</p> <p>Actinoïdes</p> <p>Ac Th Pa U Np Pu Am Cm Bk Cf Es Fm Md No Lr</p>																			

Classifications dans d'autres sciences

- Informatique : programmation orientée objet (classes)
- Chimie : tableau périodique de Mendeleiev
- Biologie : arbre phylogénétique des espèces

Arbre phylogénétique de la vie



Classifications dans d'autres sciences

- Informatique : programmation orientée objet (classes)
- Chimie : tableau périodique de Mendeleiev
- Biologie : arbre phylogénétique des espèces
- Médecine : classer les microbes pour mieux les attaquer



Classifications dans d'autres sciences

- Informatique : programmation orientée objet (classes)
- Chimie : tableau périodique de Mendeleiev
- Biologie : arbre phylogénétique des espèces
- Médecine : classer les microbes pour mieux les attaquer
- Psychiatrie : individus pénalement responsables ou pas



Conclusion

Leitmotiv en sciences

Pour étudier un système :

- trouver des transformations (symétries) qui le conservent
- trouver des invariants

Assez d'invariants ("invariant complet") \leadsto classification.

Choix des transformations - critères de classification.

Conclusion

Leitmotiv en sciences

Pour étudier un système :

- trouver des transformations (symétries) qui le conservent
- trouver des invariants

Assez d'invariants ("invariant complet") \leadsto classification.

Choix des transformations - critères de classification.

Classer pour comprendre, classer pour agir.

Savoir ne pas classer.