$1/7 = 0{,}142.857\ldots$: bribes de mathématiques non appliquées

IREM de Limoges, 28 février 2008

Jérôme Germoni (université Lyon 1 – IREM)
http://math.univ-lyon1.fr/~germoni/diffusion/

Devinettes

Devinettes

1. Calculer de tête le 53-ème chiffre de $1/53$.
2. Calculer de tête le 52-ème chiffre de $1/53$.
3. Calculer de tête le 27-ème chiffre de $1/53$.
4. Julian additionne deux nombres et trouve 999.
   Combien de retenues a-t-il effectuées ?

Devinettes

Devinettes

1. Calculer de tête le 53-ème chiffre de $1/53$.
2. Calculer de tête le 52-ème chiffre de $1/53$.
3. Calculer de tête le 27-ème chiffre de $1/53$.
4. Julian additionne deux nombres et trouve 999.
   Combien de retenues a-t-il effectuées ?

Une réponse ?

4. Si Julian a calculé $142 + 857$, il n'a pas fait de retenue.
   Donc,

Devinettes

Devinettes

1. Calculer de tête le 53-ème chiffre de $1/53$.
2. Calculer de tête le 52-ème chiffre de $1/53$.
3. Calculer de tête le 27-ème chiffre de $1/53$.
4. Julian additionne deux nombres et trouve 999.
   Combien de retenues a-t-il effectuées ?

Une réponse ?

4. Si Julian a calculé $142 + 857$, il n'a pas fait de retenue.
   Donc, par contrat didactique, il n'a pas fait de retenue !

Introduction

$$\frac{1}{7} = 0{,}142\,857\;142\,857\;142\,857\;\ldots$$

- Développement cyclique.

Introduction

$$\frac{1}{7} = 0{,}142\,857\;142\,857\;142\,857\;\ldots$$

- Développement cyclique.
- Pas de demi-mesure :

$$142 + 857 = 999.$$

Introduction

$$\frac{1}{7} = 0{,}142\,857\;142\,857\;142\,857\;\ldots$$

- Développement cyclique.
- Pas de demi-mesure :

$$142 + 857 = 999.$$

- Silence, on tourne !

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857\cdots, \quad \frac{2}{7} = 0{,}285714\cdots, \quad \frac{3}{7} = 0{,}428571\cdots,$$
$$\frac{4}{7} = 0{,}571428\cdots, \quad \frac{5}{7} = 0{,}714285\cdots, \quad \frac{6}{7} = 0{,}857142\cdots$$

Figures tutélaires

Suivant Gauss, *Disquisitiones arithmeticæ* (1801), on s'intéresse au développement décimal de $1/p$, où p est un nombre premier.

p-ème chiffre

$\frac{p+1}{2}$-ème chiffre

longueur $p-1$

Notation : nombres premiers : $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$.

Développement décimal des rationnels

Propriété

Soit x un réel, $0 \leq x < 1$. Il est équivalent de dire

- *le développement décimal de x est ultimement périodique :*
  $$\text{il existe } M, N \text{ entiers tels que } x = 0, MNNNN\cdots$$
- *x est rationnel : il existe a, b entiers tels que $x = a/b$.*

Développement décimal des rationnels

Propriété

Soit x un réel, $0 \leq x < 1$. Il est équivalent de dire

- *le développement décimal de x est ultimement périodique :*
  $$\text{il existe } M, N \text{ entiers tels que } x = 0, MNNNN\cdots$$
- *x est rationnel : il existe a, b entiers tels que $x = a/b$.*

1. Si $x = 0, MNNNN\cdots$, on a :
   $$10^c x = M, NNN\cdots = M + 0, NNN\cdots \ ,$$
   d'où
   $$10^d \left(10^c x - M\right) = N, NNN\cdots = N + (10^c x - M).$$

Développement décimal des rationnels

Propriété

Soit x un réel, $0 \leq x < 1$. Il est équivalent de dire

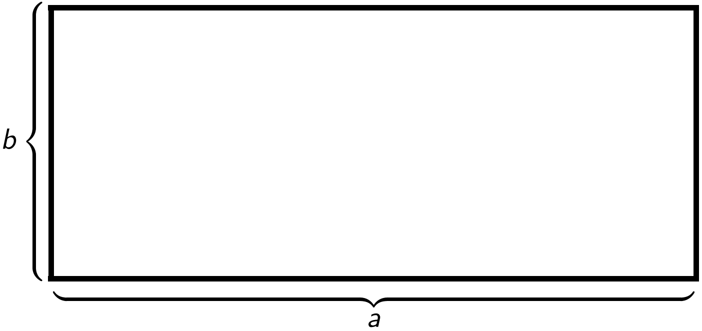
- *le développement décimal de x est ultimement périodique : il existe M, N entiers tels que $x = 0, MNNNN \cdots$*
- *x est rationnel : il existe a, b entiers tels que $x = a/b$.*

2. Si $x = a/b$, on pose la division de a par b. Il n'y a qu'un nombre fini de restes possibles, donc la division “boucle”.

Aparté : irrationnalité de $\sqrt{2}$

$$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1,\ \text{donc } (1+\sqrt{2})-2=\frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

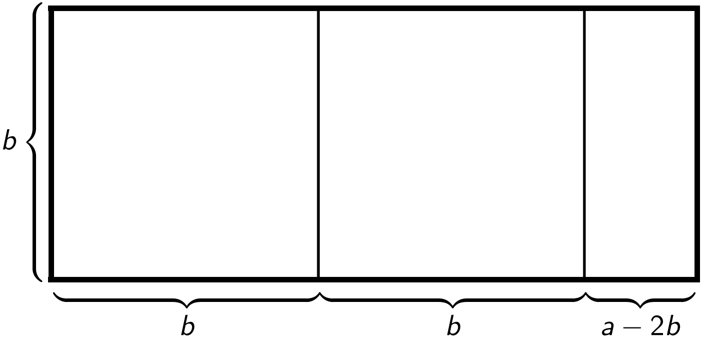
$$\text{Si } \frac{a}{b}=1+\sqrt{2}, \quad \text{alors } \frac{a-2b}{b}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$



Aparté : irrationnalité de $\sqrt{2}$

$$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1, \text{ donc } (1+\sqrt{2})-2=\frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

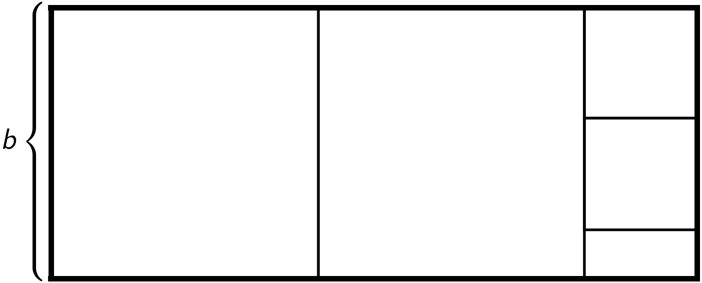
$$\text{Si } \quad \frac{a}{b}=1+\sqrt{2}, \quad \text{alors } \quad \frac{a-2b}{b}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$



Aparté : irrationnalité de $\sqrt{2}$

$$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1, \text{ donc } (1+\sqrt{2})-2=\frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

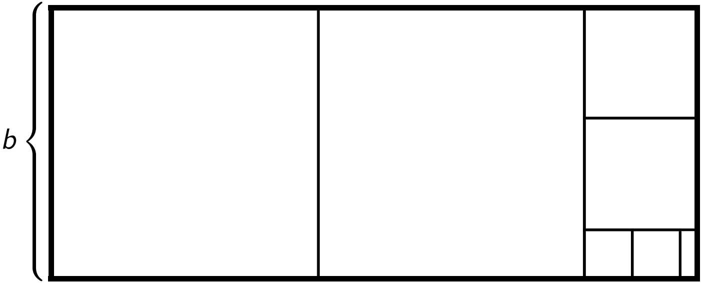
$$\text{Si} \quad \frac{a}{b}=1+\sqrt{2}, \quad \text{alors} \quad \frac{a-2b}{b}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$



Aparté : irrationnalité de $\sqrt{2}$

$$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1,\ \text{donc}\ (1+\sqrt{2})-2=\frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

$$\text{Si}\quad \frac{a}{b}=1+\sqrt{2},\quad \text{alors}\quad \frac{a-2b}{b}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$



Conclusion : le développement décimal de $\sqrt{2}$ n'est pas périodique.

Développement décimal (DD) de $1/p$

Désormais, on prend $x = \dfrac{1}{p}$, où p est un nombre premier, $p \neq 2, 5$.
On s'intéresse au développement décimal de x.

Exemple

$$\frac{1}{7} = 0,142\,857\,142\,857\,\cdots$$

Développement décimal (DD) de $1/p$

Propriété

Soit p un nombre premier, $p \neq 2, 5$:

1. *le DD de $1/p$ est périodique*
2. *d = longueur d'une période de $1/p \iff p$ divise $10^d - 1$;*
3. *motif correspondant de $1/p$:* $N = \dfrac{10^d - 1}{p} = \dfrac{99\cdots 9}{p}$.

Développement décimal (DD) de $1/p$

Propriété

Soit p un nombre premier, $p \neq 2,5$:

1. *le DD de $1/p$ est périodique*
2. *d = longueur d'une période de $1/p \iff p$ divise $10^d - 1$;*
3. *motif correspondant de $1/p$:* $N = \dfrac{10^d - 1}{p} = \dfrac{99 \cdots 9}{p}$.

En effet,

$$\frac{1}{p} = 0,NNN\cdots \iff \frac{10^d}{p} = N + \frac{1}{p} \iff pN = 10^d - 1.$$

Développement décimal (DD) de $1/p$

Propriété

Soit p un nombre premier, $p \neq 2, 5$:

1. *le DD de $1/p$ est périodique et $p-1$ est une période ;*
2. *$d =$ longueur d'une période de $1/p \iff p$ divise $10^d - 1$;*
3. *motif correspondant de $1/p$: $N = \dfrac{10^d - 1}{p} = \dfrac{99\cdots 9}{p}$.*

En effet,

$$\frac{1}{p} = 0, NNN\cdots \iff \frac{10^d}{p} = N + \frac{1}{p} \iff pN = 10^d - 1.$$

Théorème (Fermat, vers 1636)

Pour p premier, p divise $10^{p-1} - 1$.

Interprétation de la division euclidienne

$$\begin{array}{l|l} 1 & 7 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad r_0 = 1, \quad 1 \;= 1 + 0 \times 7$$

Interprétation de la division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} 1,0 & 7 \\ \hline 3 & 0,1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} r_0 &= 1, & 1 &= 1 + 0 \times 7 \\ r_1 &= 3, & 10 &= 3 + 1 \times 7 \end{aligned}$$

Interprétation de la division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} 1,00 & 7 \\ \hline 30 & 0,14 \\ 2 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} r_0 &= 1, & 1 &= 1 + 0 \times 7 \\ r_1 &= 3, & 10 &= 3 + 1 \times 7 \\ r_2 &= 2, & 10^2 &= 2 + 14 \times 7 \end{aligned}$$

Interprétation de la division euclidienne

$$
\begin{array}{r|l}
1,000 & 7 \\ \hline
30 & 0,142 \\
20 & \\
6 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
r_0 &= 1, & 1 &= 1 + 0 \times 7 \\
r_1 &= 3, & 10 &= 3 + 1 \times 7 \\
r_2 &= 2, & 10^2 &= 2 + 14 \times 7 \\
r_3 &= 6, & 10^3 &= 6 + 142 \times 7
\end{aligned}
$$

Interprétation de la division euclidienne

$$
\begin{array}{r|l}
1,0000 & 7 \\ \cline{2-2}
30 & 0,142\,8 \\
20 & \\
60 & \\
4 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
r_0 &= 1, & 1 &= 1 + 0 \times 7 \\
r_1 &= 3, & 10 &= 3 + 1 \times 7 \\
r_2 &= 2, & 10^2 &= 2 + 14 \times 7 \\
r_3 &= 6, & 10^3 &= 6 + 142 \times 7 \\
r_4 &= 4, & 10^4 &= 4 + 1428 \times 7
\end{aligned}
$$

Interprétation de la division euclidienne

$$\begin{array}{l|l}
1,0000 & 7 \\ \cline{2-2}
\;\;30 & 0,142\,8\cdots \\
\;\;\;\;20 & \\
\;\;\;\;\;\;60 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;4 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\ddots &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
r_0 &= 1, & 1 &= 1 + 0 \times 7 \\
r_1 &= 3, & 10 &= 3 + 1 \times 7 \\
r_2 &= 2, & 10^2 &= 2 + 14 \times 7 \\
r_3 &= 6, & 10^3 &= 6 + 142 \times 7 \\
r_4 &= 4, & 10^4 &= 4 + 1428 \times 7 \\
&\cdots
\end{aligned}$$

Interprétation

$$r_k = 10^k \quad (\text{dans } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

Interprétation de la division euclidienne

$$
\begin{array}{r|l}
1,0000 & 7 \\ \cline{2-2}
30 & 0,142\,8\cdots \\
20 & \\
60 & \\
4 & \\
\ddots &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
r_0 &= 1, & 1 &= 1 + 0 \times 7 \\
r_1 &= 3, & 10 &= 3 + 1 \times 7 \\
r_2 &= 2, & 10^2 &= 2 + 14 \times 7 \\
r_3 &= 6, & 10^3 &= 6 + 142 \times 7 \\
r_4 &= 4, & 10^4 &= 4 + 1428 \times 7 \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Interprétation

$$r_k = 10^k \quad (\text{dans } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

$\{10^k,\ k \in \mathbb{N}\}$ = le groupe engendré par 10 dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.

Résumé : Fermat (XVII$^{\mathrm{e}}$) et Lagrange (XVIII$^{\mathrm{e}}$)

Propriété

Pour p premier, $p \neq 2, 5$:

1. *$p - 1$ est la longueur d'une période de $1/p$;*
2. *la longueur minimale est un diviseur de $p - 1$;*
3. *le motif correspondant est $(10^d - 1)/p$.*

Exemple : $p = 7$

- $10^6 - 1 = (10^3 + 1) \times (10^3 - 1) = 7 \times 11 \times 13 \times 999$;
- motif : $7 \times 142\,857 = 999\,999$.

Résumé : Fermat (XVII$^{\rm e}$) et Lagrange (XVIII$^{\rm e}$)

Propriété

Pour p premier, $p \neq 2, 5$:

1. *$p - 1$ est la longueur d'une période de $1/p$;*
2. *la longueur minimale est un diviseur de $p - 1$;*
3. *le motif correspondant est $(10^d - 1)/p$.*

Exemple : $p = 7$

- $10^6 - 1 = (10^3 + 1) \times (10^3 - 1) = 7 \times 11 \times 13 \times 999$;
- motif : $7 \times 142\,857 = 999\,999$.

Devinette

Le DD de $1/p$ admet 6 pour longueur de période : qui est p ?

Le p-ème chiffre

Fermat : le p-ème chiffre

1. Quel est le 53-ème chiffre de $1/53$?

Réponse

1. C'est le même que le premier : 0.

Digression : le $(p-1)$-ème chiffre

$$\begin{array}{r|l} 999\,999 & 7 \\ \hline & \end{array}$$

Digression : le $(p-1)$-ème chiffre

$$\begin{array}{r|l} 999\,999 & 7 \\ \cline{2-2} \underline{49} & \qquad\quad 7 \\ 95 & \end{array}$$

Digression : le $(p-1)$-ème chiffre

$$\begin{array}{r|r}
999\,999 & 7\qquad \\ \cline{2-2}
\underline{49} & 57 \\
95 & \\
\underline{35} & \\
9\,6 &
\end{array}$$

Digression : le $(p-1)$-ème chiffre

$$
\begin{array}{r|l}
999\,999 & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{49} & \quad\quad 857 \\
95 & \\
\underline{35} & \\
9\,6 & \\
\underline{5\,6} & \\
94 &
\end{array}
$$

Digression : le $(p-1)$-ème chiffre

$$
\begin{array}{r|l}
999\,999 & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{49} & \quad 2\,857 \\
95 & \\
\underline{35} & \\
9\,6 & \\
\underline{5\,6} & \\
94 & \\
\underline{14} & \\
98 &
\end{array}
$$

Digression : le $(p-1)$-ème chiffre

$$
\begin{array}{r|l}
999\,999 & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{49} & \;42\,857 \\
95 & \\
\underline{35} & \\
96 & \\
\underline{56} & \\
94 & \\
\underline{14} & \\
98 & \\
\underline{28} & \\
7 &
\end{array}
$$

Digression : le $(p-1)$-ème chiffre

$$
\begin{array}{r|l}
999\,999 & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{49} & 142\,857 \\
95 & \\
\underline{35} & \\
96 & \\
\underline{56} & \\
94 & \\
\underline{14} & \\
98 & \\
\underline{28} & \\
7 & \\
\underline{7} & \\
0 &
\end{array}
$$

Devinette

2. Quel est le 52-ème chiffre de $1/53$?

Réponse

2. C'est 3, car $3 \times 3 = 9$.

$$\begin{array}{r|l} 99\cdots 9\,999 & 53 \\ \hline & \end{array}$$

Devinette

2. Quel est le 52-ème chiffre de $1/53$?

Réponse

2. C'est 3, car $3 \times 3 = 9$.

$$\begin{array}{r|l} 99\cdots9\,999 & 53 \\ \cline{2-2} \underline{159} & \qquad\quad 3 \\ 84 & \end{array}$$

Devinette

2. Quel est le 52-ème chiffre de $1/53$?

Réponse

2. C'est 3, car $3 \times 3 = 9$.

$$
\begin{array}{r|l}
99\cdots 9\,999 & 53 \\ \hline
\underline{159} & \qquad\cdots 3 \\
84 & \\
\cdots &
\end{array}
$$

Dichotomie (exemples)

Ici, on suppose que la plus courte période est de longueur paire.
On peut donc la couper en deux.

Dichotomie (exemples)

Ici, on suppose que la plus courte période est de longueur paire. On peut donc la couper en deux.

- $\frac{1}{7} = 0,142\,857\cdots$
- $\frac{1}{11} = 0,0\,9\cdots$
- $\frac{1}{13} = 0,076\,923\cdots$

Dichotomie (exemples)

Ici, on suppose que la plus courte période est de longueur paire.
On peut donc la couper en deux.

- $\dfrac{1}{7} = 0,142\,857\cdots$: $142 + 857 = 999$;
- $\dfrac{1}{11} = 0,0\,9\cdots$: $0 + 9 = 9$...
- $\dfrac{1}{13} = 0,076\,923\cdots$: $76 + 923 = 999$;

Hasard ou nécessité ?

Dichotomie (formalisation)

Théorème (Midy – 1836)

Supposons que $d = 2e$ soit une longueur de période de $1/p$, mais que e ne soit pas la longueur d'une période :

$$\frac{1}{p} = 0,\underbrace{\underbrace{A}_{e}\underbrace{B}_{e}}_{d=2e}\underbrace{\underbrace{A}_{e}\underbrace{B}_{e}}_{d=2e}\cdots, \qquad 0 \le A, B < 10^e.$$

Alors,

$$A + B = 10^e - 1 = \underbrace{99\cdots9}_{e\ \text{chiffres}}.$$

Voir *La Recherche*, octobre 2006.

Dichotomie (exemple)

Théorème (Midy – 1836)

Si le DD de $1/p$ a une période de longueur paire, les motifs des deux demi-périodes ont pour somme $99\cdots9$.

Exemple : $1/17$

- $\dfrac{1}{17} = 0,05882352\,94$???

Dichotomie (exemple)

Théorème (Midy – 1836)

Si le DD de $1/p$ a une période de longueur paire, les motifs des deux demi-périodes ont pour somme $99\cdots9$.

Exemple : $1/17$

- $\dfrac{1}{17} = 0,05882352\,94$???
- 16 est la longueur d'une période, 8 non
- $$\begin{array}{rr} & 99\,999\,999 \\ - & 5\,882\,352 \\ \hline & 94\,117\,647 \end{array}$$

Dichotomie (exemple)

Théorème (Midy – 1836)

Si le DD de $1/p$ a une période de longueur paire, les motifs des deux demi-périodes ont pour somme $99\cdots9$.

Exemple : $1/17$

- $\frac{1}{17} = 0,05882352\,94\,117\,647\cdots$
- 16 est la longueur d'une période, 8 non
- $$\begin{array}{r} 99\,999\,999 \\ -\quad 5\,882\,352 \\ \hline 94\,117\,647 \end{array}$$

Le chiffre du milieu

Théorème (O. Mathieu – 2002)

Soit $p \geq 11$ un nombre premier :

1. la $(p+1)/2$-ème décimale de $1/p$ est 0 ou 9 ;
2. le fait que ce soit 0 ou 9 ne dépend que de p modulo 40.

$$\frac{1}{p} = 0,\underbrace{\underbrace{\qquad\qquad}_{e}\overset{\downarrow}{}\underbrace{\qquad\qquad}_{e}}_{p-1=2e}\cdots$$

Preuve (premier point)

1. Partie facile.

$$\frac{1}{p} = 0,\underbrace{\underbrace{\quad A}_{e}\overset{\downarrow}{}\underbrace{\quad B}_{e}}_{p-1=2e}\cdots, \qquad \begin{cases} A = B \\ \quad ou \\ A + B = 99\cdots 9. \end{cases}$$

Preuve (premier point)

1. Partie facile.

$$\frac{1}{p} = 0,\underbrace{\underbrace{\overset{\downarrow}{0} \qquad A}_{e}\overset{\downarrow}{}\underbrace{\qquad\qquad B}_{e}}_{p-1=2e}\cdots, \qquad \left\{\begin{array}{l} A = B \\ \quad ou \\ A + B = 99\cdots 9. \end{array}\right.$$

- Cas $A = B$: c'est 0.
- Cas $A + B = 99\cdots 9$: c'est 9. En effet :

$$\begin{array}{r} 0 \bullet \cdots \bullet \bullet \\ + \; ? \bullet \cdots \bullet \bullet \\ \hline 9\;9 \cdots 9\;9 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} A \\ +\; B \\ \hline 10^{\frac{p-1}{2}} - 1 \end{array}$$

Reformulation

Théorème (O. Mathieu)

Soit $p \geq 11$ premier.

reste de la division de p par 40	$\frac{p+1}{2}$-ème chiffre de $1/p$
$1, 3, 9, 13, 27, 31, 37, 39$	0
$7, 11, 17, 19, 21, 23, 29, 33$	9

Jeu : on prend

- $p = 1111111111111111111$ (19 chiffres),
- ou $p =$ le 108 000-ème nombre premier.

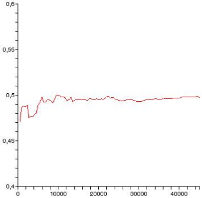
Quel est le $(p+1)/2$-ème chiffre de p ? 0 ou 9 ?

Reformulation

Théorème (O. Mathieu)

Soit $p \geq 11$ premier.

reste de la division de p par 40	$\frac{p+1}{2}$-ème chiffre de $1/p$
$1, 3, 9, 13, 27, 31, 37, 39$	0
$7, 11, 17, 19, 21, 23, 29, 33$	9



$$y = \frac{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x, \text{chiffre} = 0\}}{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}}$$

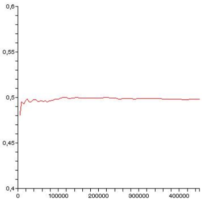
$$x_{\max} = 45000$$

Reformulation

Théorème (O. Mathieu)

Soit $p \geq 11$ premier.

reste de la division de p par 40	$\frac{p+1}{2}$-ème chiffre de $1/p$
$1, 3, 9, 13, 27, 31, 37, 39$	0
$7, 11, 17, 19, 21, 23, 29, 33$	9



$$y = \frac{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x, \text{chiffre} = 0\}}{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}}$$

$$x_{\text{max}} = 450000$$

Reformulation

Théorème (O. Mathieu)

Soit $p \geq 11$ premier.

reste de la division de p par 40	$\frac{p+1}{2}$-ème chiffre de $1/p$
$1, 3, 9, 13, 27, 31, 37, 39$	0
$7, 11, 17, 19, 21, 23, 29, 33$	9

Théorème (Dirichlet – 1837)

Pour tout b premier avec 40,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x, p \equiv b \bmod 40\}}{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}} = \frac{1}{16}.$$

Occuper Julian (8 ans) à la pizzeria

$$1 \times 142857 = 142857, \quad 2 \times 142857 = 285714,$$
$$3 \times 142857 = 428571, \quad 4 \times 142857 = 571428,$$
$$5 \times 142857 = 714285, \quad 6 \times 142857 = 857142.$$

Occuper Julian (8 ans) à la pizzeria

$$1 \times 142857 = 142857, \quad 2 \times 142857 = 285714,$$
$$3 \times 142857 = 428571, \quad 4 \times 142857 = 571428,$$
$$5 \times 142857 = 714285, \quad 6 \times 142857 = 857142.$$

Occuper Julian (11 ans) à la pizzeria

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857\cdots, \quad \frac{2}{7} = 0{,}285714\cdots,$$
$$\frac{3}{7} = 0{,}428571\cdots, \quad \frac{4}{7} = 0{,}571428\cdots,$$
$$\frac{5}{7} = 0{,}714285\cdots, \quad \frac{6}{7} = 0{,}857142\cdots$$

Que faire à la pizzeria quand Julian aura 13 ans ?

Que faire à la pizzeria quand Julian aura 13 ans ?

$$\frac{1}{13} = 0{,}076923\cdots, \quad \frac{2}{13} = 0{,}153846\cdots, \quad \frac{3}{13} = 0{,}230769\cdots,$$
$$\frac{4}{13} = 0{,}307692\cdots, \quad \frac{5}{13} = 0{,}384615\cdots, \quad \frac{6}{13} = 0{,}461538\cdots$$
$$\frac{7}{13} = 0{,}538461\cdots, \quad \frac{8}{13} = 0{,}615384\cdots, \quad \frac{9}{13} = 0{,}692307\cdots$$
$$\frac{10}{13} = 0{,}769230\cdots, \quad \frac{11}{13} = 0{,}846153\cdots, \quad \frac{12}{13} = 0{,}923076\cdots$$

Que faire à la pizzeria quand Julian aura 13 ans ?

$$\frac{1}{13} = 0{,}076923\cdots, \quad \frac{2}{13} = 0{,}153846\cdots, \quad \frac{3}{13} = 0{,}230769\cdots,$$
$$\frac{4}{13} = 0{,}307692\cdots, \quad \frac{5}{13} = 0{,}384615\cdots, \quad \frac{6}{13} = 0{,}461538\cdots$$
$$\frac{7}{13} = 0{,}538461\cdots, \quad \frac{8}{13} = 0{,}615384\cdots, \quad \frac{9}{13} = 0{,}692307\cdots$$
$$\frac{10}{13} = 0{,}769230\cdots, \quad \frac{11}{13} = 0{,}846153\cdots, \quad \frac{12}{13} = 0{,}923076\cdots$$

Pour $\frac{1}{13}$: nombre de périodes : 2, longueur des périodes : 6.

$(2 \times 6 = 13 - 1\ldots)$

Equivalence : un seul motif $\Longleftrightarrow$ longueur min $= p - 1$

On pose la division de 1 par p :

$$\begin{array}{r|l} 1,000\,000 & 7 \\ \hline & \end{array}$$

Equivalence : un seul motif $\iff$ longueur min $= p - 1$

On pose la division de 1 par p :

$$
\begin{array}{r|l}
1,000\,000 & 7 \\ \cline{2-2}
30 & 0{,}142\,857 \\
20 & \\
60 & \\
40 & \\
50 & \\
1 &
\end{array}
$$

- longueur min période = nombre d'étapes de la division : longueur min $= p - 1 \iff$ tous les restes apparaissent ;

Equivalence : un seul motif $\Longleftrightarrow$ longueur min $= p - 1$

On pose la division de 1 par p :

$$
\begin{array}{r|l}
1,000\,000\,0 & 7 \\
\cline{2-2}
\color{red}{30} & 0{,}1\color{red}{42\,857\,1} \\
\color{red}{20} & \\
\color{red}{60} & \\
\color{red}{40} & \\
\color{red}{50} & \\
\color{red}{10} & \\
\color{red}{3} &
\end{array}
$$

- longueur min période $=$ nombre d'étapes de la division : longueur min $= p - 1 \Longleftrightarrow$ tous les restes apparaissent ;
- pour chaque reste k, k/p a le même motif que $1/p$.

Ceci se produit-il souvent ?

Problème (Artin)

Que dire des nombres premiers p longs, pour lesquels on a :

- la longueur minimale des périodes égale à $p-1$?
- un seul motif (à permutation cyclique près) pour tous les k/p, $1 \leq k \leq p-1$;

(Les deux conditions sont équivalentes !)

Deux types de nombres premiers

Pour un nombre premier p, deux cas :

- longueur minimale période $= p - 1$; ex. : $\dfrac{1}{7} = 0,142857\cdots$;
- longueur minimale période $< p - 1$; ex. : $\dfrac{1}{13} = 0,076923\cdots$.

Problème

$$\mathcal{P}(10) = \{p \text{ premier long en base } 10\}.$$

Deux types de nombres premiers

Pour un nombre premier p, deux cas :

- longueur minimale période $= p - 1$; ex. : $\dfrac{1}{7} = 0,142857\cdots$;
- longueur minimale période $< p - 1$; ex. : $\dfrac{1}{13} = 0,076923\cdots$.

Problème

$$\mathcal{P}(10) = \{p \text{ premier long en base } 10\}.$$

- Est-ce que $\mathcal{P}(10)$ est infini ?
- Estimer la "densité" de $\mathcal{P}(10)$:

$$d_{10}(x) = \frac{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}(10), p \leq x\}}{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}} \quad : \quad \lim_{x \to +\infty} d_{10}(x) \text{ ?}$$

Expériences numériques

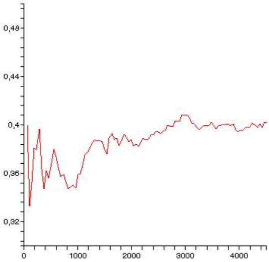
$$\mathcal{P}(10) = \{7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, \dots\}$$

$$y = d_{10}(x) = \frac{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}(10), p \leq x\}}{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}}$$

Expériences numériques

$$\mathcal{P}(10) = \{7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, \ldots\}$$

$$y = d_{10}(x) = \frac{\operatorname{card}\{p \in \mathcal{P}(10), p \leq x\}}{\operatorname{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}}$$



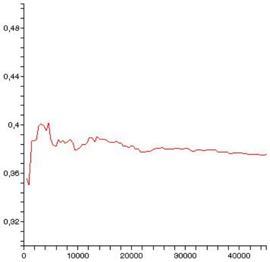
base 10

$x_{\max} = 4500$

Expériences numériques

$$\mathcal{P}(10) = \{7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, \dots\}$$

$$y = d_{10}(x) = \frac{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}(10), p \leq x\}}{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}}$$



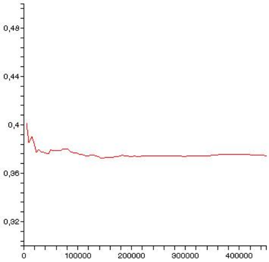
base 10

$x_{\max} = 45000$

Expériences numériques

$$\mathcal{P}(10) = \{7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, \dots\}$$

$$y = d_{10}(x) = \frac{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}(10), p \leq x\}}{\mathrm{card}\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}}$$



base 10

$x_{\max} = 450000$

Enoncé de la conjecture (base 10)

Conjecture (Artin – 1927)

- *Il existe un nombre infini de nombres premiers p qui sont longs en base* 10.
- *La densité de ces p est :*

$$C_{\mathrm{Artin}} = \prod_{q \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{q(q-1)}\right) \simeq 0{,}373\,955\,813\,6\ldots$$

Remarque : où intervient 10 ?

Enoncé de la conjecture (base presque quelconque)

Conjecture (Artin – 1927)

- *Il existe un nombre infini de nombres premiers p qui sont longs en base b.*
- *La densité de ces p est :*

$$C_{\mathrm{Artin}} = \prod_{q \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{q(q-1)}\right) \simeq 0{,}373\,955\,813\,6\ldots$$

Remarque : où intervient 10 ?
On peut remplacer 10 par (presque) n'importe quelle base b.

Résultats partiels

La conjecture est toujours ouverte, mais on sait :

- Hooley – 1967 : avec l'hypothèse de Riemann généralisée, la conjecture d'Artin quantitative est vraie ;
- Gupta–Ram – 1984 : sans hypothèse de Riemann, la conjecture d'Artin qualitative admet au plus 2 exceptions parmi les bases $b \in \mathcal{P}$;
  par exemple, une infinité de nombres premiers sont longs en base 2, 3 ou 5.

Conclusion

Questions très simples, réponses sophistiquées :

1. développement périodique $\rightsquigarrow$ Fermat, XVIIème.
2. chiffre du milieu $\rightsquigarrow$ Gauss, 1801.
3. fréquence des p longs : question d'Artin, 1927 $\rightsquigarrow$ quand ?

Références

Théorèmes de Fermat, Lagrange, etc.

D. Guin, *Algèbre*, Ed. Belin (par exemple)

Réciprocité quadratique et autres merveilles

J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, PUF ou en anglais chez Springer

Conjecture d'Artin

- http://en.wikipedia.org/wiki/Artin_conjecture_(primitive_roots)
- P. Moree, *Artin's primitive root conjecture -a survey -*, http://arxiv.org/abs/math/0412262 (le début est raisonnable)

Aparté : nombres réels normaux

1. Un nombre est normal si chaque suite finie de chiffres de longueur ℓ apparaît avec la fréquence $1/10^{\ell}$. Exemples :

$$0,888\,888\cdots \text{ pas normal}, \quad 0,123456789\,10\,11\,12\,13\cdots \text{ oui.}$$

2. On convient que choisir un nombre réel au hasard, c'est choisir chaque chiffre indépendamment avec une probabilité $1/10$.

Aparté : nombres réels normaux

1. Un nombre est normal si chaque suite finie de chiffres de longueur ℓ apparaît avec la fréquence $1/10^{\ell}$. Exemples :

$$0,888\,888\cdots \text{ pas normal,} \quad 0,123456789\,10\,11\,12\,13\cdots \text{ oui.}$$

2. On convient que choisir un nombre réel au hasard, c'est choisir chaque chiffre indépendamment avec une probabilité $1/10$.

Fait (assez facile)

"Presque tout" nombre est normal.

Aparté : nombres réels normaux

1. Un nombre est normal si chaque suite finie de chiffres de longueur ℓ apparaît avec la fréquence $1/10^\ell$. Exemples :

$$0,888\,888\cdots \text{ pas normal,} \quad 0,123456789\,10\,11\,12\,13\cdots \text{ oui.}$$

2. On convient que choisir un nombre réel au hasard, c'est choisir chaque chiffre indépendamment avec une probabilité $1/10$.

Fait (assez facile)

"Presque tout" nombre est normal.

Problème (très difficile !)

Est-ce que π ou $\sqrt{2}$ est un nombre normal ?

Esquise de preuve (deuxième point)

2. Il faut décider si $\frac{p-1}{2}$ est une période, i.e. si p divise $10^{\frac{p-1}{2}} - 1$.
   Fermat et Gauss : p divise $10^{\frac{p-1}{2}} - 1$ ou $10^{\frac{p-1}{2}} + 1$.

Notation (Legendre)

Pour $p > 2$ premier et $a \in \mathbb{Z}$, $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} \bmod p \in \{-1, 1, 0\}$.

Exemple (non trivial)

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = \pm 1 \bmod 8 \\ -1 & \text{si } p = \pm 3 \bmod 8. \end{cases}$$

Ce symbole ne dépend donc que de p modulo 8.

Loi de réciprocité quadratique

Théorème (Gauss – 1801)

Soit p, q premiers impairs distincts. Alors :

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

Un miracle ?

Sens du symbole de Legendre :

$\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ SSI l'équation $x^2 = q$ a une solution dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Loi de réciprocité quadratique

Théorème (Gauss – 1801)

Soit p, q premiers impairs distincts. Alors :

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

Application au $(p+1)/2$-ème chiffre : 0 ou 9 ?

La $\frac{p+1}{2}$-ème décimale de $1/p$ est 0 SSI $\left(\frac{10}{p}\right) = 10^{\frac{p-1}{2}} = 1\ [p]$. Or...

$$\left(\frac{10}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{p}{5}\right).$$

Par le lemme chinois, ceci ne dépend que de p modulo 40.

Ceci n'est pas une preuve

$$\langle a\rangle = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \iff \forall q \text{ premier : } \; p \equiv 1\ [q],\ a^{\frac{p-1}{q}} \neq 1\ [p]$$

- Fixons q :
  - probabilité pour que $p = 1\ [q]$: $\dfrac{1}{q-1}$;
  - probabilité pour que $a^{\frac{p-1}{q}} = 1\ [p]$: $\dfrac{1}{q}$.

  Probabilité pour que “ça marche” pour q : $1 - \dfrac{1}{q(q-1)}$.
- Si indépendance, proba pour que “ça marche” pour tout q :

$$\prod_q \left(1 - \frac{1}{q(q-1)}\right).$$

Découpage de période en 3, 4 et plus

Maitrisant la dichotomie, tentons de diviser plus !

Exemples :

- $\frac{1}{7} = 0,142\,857\cdots$
- $\frac{1}{7} = 0,14\,28\,57\cdots$
- $\frac{1}{13} = 0,07\,69\,23\cdots$

Contre-exemple :

- $\frac{1}{73} = 0{,}01\,36\,98\,63\cdots$

Découpage de période en 3, 4 et plus

Maitrisant la dichotomie, tentons de diviser plus !
Exemples (généraliser) :

- $\frac{1}{7} = 0,142\,857\cdots$: $142 + 857 = 999$;
- $\frac{1}{7} = 0,14\,28\,57\cdots$: $14 + 28 + 57 = 99$;
- $\frac{1}{13} = 0,07\,69\,23\cdots$: $7 + 69 + 23 = 99.$

Contre-exemple (trouver un énoncé quand même) :

- $\frac{1}{73} = 0{,}01\,36\,98\,63\cdots$: $1 + 36 + 98 + 63 = 2 \times 99.$

Calcul exotique de 1/13

$$\frac{1}{13} = 0, \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \cdots$$

- $7 \times 11 \times 13 = 1001 \implies 13 | 10^6 - 1 = (10^3 + 1)(10^3 - 1)$

Calcul exotique de 1/13

$$\frac{1}{13} = 0,0 \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \cdots$$

- $7 \times 11 \times 13 = 1001 \implies 13 | 10^6 - 1 = (10^3 + 1)(10^3 - 1)$
- $13 > 10$

Calcul exotique de 1/13

$$\frac{1}{13} = 0,0 \bullet \bullet \bullet \bullet 3 \cdots$$

- $7 \times 11 \times 13 = 1001 \implies 13 | 10^6 - 1 = (10^3 + 1)(10^3 - 1)$
- $13 > 10$
- $3 \times 3 = 9$

Calcul exotique de 1/13

$$\frac{1}{13} = 0,0 \bullet 6\, 9 \bullet 3 \cdots$$

- $7 \times 11 \times 13 = 1001 \implies 13 | 10^6 - 1 = (10^3 + 1)(10^3 - 1)$
- $13 > 10$
- $3 \times 3 = 9$
- $$\begin{array}{rccc} & 0 & \bullet & \bullet \\ + & \bullet & \bullet & 3 \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array}$$

Calcul exotique de 1/13

$$\frac{1}{13} = 0,076\,923\cdots$$

- $7 \times 11 \times 13 = 1001 \implies 13 | 10^6 - 1 = (10^3+1)(10^3-1)$
- $13 > 10$
- $3 \times 3 = 9$
- $$\begin{array}{rccc} & 0 & \bullet & \bullet \\ + & \bullet & \bullet & 3 \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array}$$
- $$\begin{array}{rcc} & 0 & \bullet \\ + & 6 & 9 \\ + & \bullet & 3 \\ \hline & 9 & 9 \end{array}$$

Certains motifs de k/p

Supposons avoir

$$\frac{10^d-1}{p} = \overline{AB} \qquad \frac{10^6-1}{7} = 142\,857$$

$$\text{et } k \times \frac{10^d-1}{p} = \overline{BA} \qquad 3 \times \frac{10^6-1}{7} = 428\,571$$

Alors :

$$\frac{1}{p} = 0,\underbrace{AB}\,\underbrace{AB}\cdots \qquad \frac{1}{7} = 0,142\,857\;142\,857\cdots$$

$$\frac{k}{p} = 0,BA\;BA\cdots \qquad \frac{3}{7} = 0,428\,571\;428\,571\cdots$$

Ainsi, $1/p$ et k/p ont le même motif AB !