REMARQUES SUR LA LIMITE $\alpha \to 0$ POUR LES FLUIDES DE GRADE 2

DRAGOŞ IFTIMIE

Résumé. On considère la limite $\alpha \to 0$ dans l'équation des fluides de grade 2. On montre la convergence faible des solutions vers une solution faible de l'équation de Navier-Stokes, en supposant que les données initiales convergent faiblement dans L^2.

Introduction

Il existe dans la nature des fluides qui n'obéissent pas aux classiques équations de Navier-Stokes. Des modèles plus compliqués ont dû être développés pour les étudier. Ainsi, Rivlin et Ericksen [10] introduisent les fluides de type différentiel. Un cas particulier de ces fluides est constitué par les fluides de grade 2. L'analyse de Dunn et Fosdick [6] montre que l'équation d'un tel fluide est donnée par

(1)
$$\partial_t(u-\alpha\triangle u)-\nu\triangle u+\sum_j(u-\alpha\triangle u)_j\nabla u_j+u\cdot\nabla(u-\alpha\triangle u)=-\nabla p+f,\quad \operatorname{div} u=0,$$

où $\alpha \geq 0$ est une constante matérielle, $\nu > 0$ est la viscosité du fluide, u le champ de vitesses et p la pression. Pour $\alpha = 0$, on obtient les équations classiques de Navier-Stokes

$$\partial_t u-\nu\triangle u+u\cdot\nabla u=-\nabla p+f,\quad \operatorname{div} u=0, \tag{2}$$

de sorte que l'équation du fluide de grade 2 est une généralisation simple des équations de Navier-Stokes.

Les premiers résultats mathématiques pour les fluides grade 2 ont été obtenus par Cioranescu et Ouazar [4]. Ils montrent l'existence et l'unicité des solutions, globale en dimension 2 et locale en dimension 3, pour des données initiales appartenant à H^3. L'existence et l'unicité globale des solutions trois-dimensionnelles ont été obtenues par Cioranescu et Girault [3] pour des données initiales petites dans H^3. La méthode de démonstration repose sur des estimations d'énergie. Un autre point de vue est adopté par Galdi, Grobbelaar van Dalsen, Sauer [7] et Galdi, Sequeira [8]. Ces auteurs utilisent une méthode de point fixe pour obtenir des résultats similaires. Tous ces résultats sont énoncés dans des domaines bornés mais l'extension à $\mathbb{R}^n$ ne semble pas poser de difficulté.

Une question qui se pose naturellement est de savoir si les solutions des équations du fluide de grade 2 convergent vers une solution des équations de Navier-Stokes lorsque $\alpha \to 0$. La réponse n'est pas évidente et ne découle pas des travaux précédents car toutes les estimations précédentes ¡¡explosent¿¿ lorsque $\alpha \to 0$. Le but de cette note est de montrer que la convergence vers une solution des équations de Navier-Stokes a bien lieu, et cela sous des hypothèses très générales. La seule hypothèse ¡¡artificielle¿¿ sera la borne $C\alpha^{-1/2}$ pour la norme H^1 de la donnée initiale.

Avant d'énoncer les résultats de cette note, rappelons un résultat classique d'existence des solutions faibles pour l'équation de Navier-Stokes qui est du à Leray [9], voir aussi [5], [12]. On appelle solution faible des équations de Navier-Stokes sur $[0,T)$ un champ de vecteurs de divergence nulle

$$u \in C_w\big([0,T);L^2\big) \cap L^2_{loc}\big([0,T);H^1\big)$$

qui vérifie l'équation (2) au sens des distributions. Le théorème classique de Leray affirme l'existence d'une telle solution, unique en dimension 2, dès lors que $u_0 \in L^2$, $\operatorname{div} u_0 = 0$ et $f \in L^2_{loc}\big([0,T);\dot{H}^{-1}\big)$; de plus, on peut supposer que cette solution vérifie l'inégalité d'énergie suivante :

$$\|u(t)\|^2_{L^2} + 2\nu \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|^2_{L^2}\, d\tau \leq \|u(0)\|^2_{L^2} + 2\int_0^t \langle f(\tau), u(\tau)\rangle\, d\tau, \tag{3}$$

pour tout $t < T$. Une relation similaire a lieu pour le fluide de grade 2. On multiplie (1) par u et on intègre. Cela implique, après quelques intégrations par parties, l'estimation H^1 suivante :

$$\begin{aligned}\|u(t)\|^2_{L^2} + \alpha\|\nabla u(t)\|^2_{L^2} + 2\nu \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|^2_{L^2}\, d\tau & \\ \leq \|u_0\|^2_{L^2} + \alpha \|\nabla u_0\|^2_{L^2} + 2\int_0^t \langle f(\tau), u(\tau)\rangle\, d\tau.&\end{aligned} \tag{4}$$

On voit tout de suite que ces estimations donnent des informations ¡¡a priori¿¿ pour des normes H^1 en espace seulement, *i.e.* seules les dérivées d'ordre 1 en espace peuvent être ¡¡contrôlées¿¿. Par conséquent, pour pouvoir passer à la limite dans (1) avec l'information (4) seulement, il faut mettre l'équation sous une forme où les termes non-linéaires soient des produits de dérivées de u d'ordre inférieur où égal à 1 ou des dérivées de tels produits. Cette forme sera la suivante :

$$\begin{aligned}\partial_t(u-\alpha\triangle u) - \nu\triangle u + u\cdot\nabla u - \alpha\sum_{j,k}\partial_j\partial_k(u_j\partial_k u) + \alpha\sum_{j,k}\partial_j(\partial_k u_j \partial_k u) & \\ - \alpha\sum_{j,k}\partial_k(\partial_k u_j\nabla u_j) = -\nabla p + f.&\end{aligned} \tag{5}$$

Remarquons enfin que, pour montrer que les termes supplémentaires par rapport à l'équation de Navier-Stokes convergent vers 0 au sens des distributions, l'hypothèse $\nu > 0$ est importante.

On montre le théorème suivant :

Théorème 1. *Considérons l'équation d'un fluide de grade 2 posée dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Soient $\nu > 0$ et $f \in L^2_{loc}\big([0,T);\dot{H}^{-1}\big)$ fixés et $u^{\alpha_k}(0)$ une suite de données initiales à divergence nulle correspondant à une suite $\alpha_k \to 0$ tels que*

a) *il existe* $\widetilde{u}_0 \in L^2$ *tel que* $u^{\alpha_k}(0) \rightharpoonup \widetilde{u}_0$ *faiblement dans* L^2 *;*

b) *la suite* $\alpha_k^{1/2} u^{\alpha_k}(0)$ *est bornée dans* H^1 *;*

c) *il existe* $T > 0$ *et une solution (au sens des distributions)* $u^{\alpha_k} \in C_w\big([0,T); H^1\big)$ *de* (5) *avec* $\alpha = \alpha_k$*, ayant comme donnée initiale* $u^{\alpha_k}(0)$ *et vérifiant l'inégalité d'énergie* (4).

Alors, il existe une solution faible $\widetilde{u}$ *de l'équation de Navier-Stokes sur* $[0,T)$ *avec donnée initiale* $\widetilde{u}(0) = \widetilde{u}_0$ *et une sous-suite* $u^{\alpha_{\varphi(k)}}$ *telles que pour tout* $\theta < T$ *on ait*

$$u^{\alpha_{\varphi(k)}} \rightharpoonup \widetilde{u} \text{ dans } L^\infty(0,\theta; L^2) \text{ faible* et dans } L^2(0,\theta; H^1) \text{ faible.}$$

Remarque 1. Le fait que $u^{\alpha_k} \in C_w\big([0,T); H^1\big)$ et que u^{α_k} vérifie l'inégalité d'énergie est automatiquement vérifié pour des solutions obtenues par régularisation et passage à la limite. Ainsi, la seule hypothèse ¡¡restrictive¿¿ est la borne sur $\|\nabla u^{\alpha_k}(0)\|_{L^2}$.

Remarque 2. En dimension 2, comme on a unicité des solutions faibles de l'équation de Navier-Stokes, il s'ensuit que la conclusion reste vraie pour toute la suite α_k au lieu d'une sous-suite $\alpha_{\varphi(k)}$.

Remarque 3. Pour que la limite $\widetilde{u}$ satisfasse l'inégalité d'énergie (3), il suffit d'ajouter les hypothèses $u^{\alpha_k}(0) \to \widetilde{u}_0$ fortement dans L^2 et $\alpha_k^{1/2} u^{\alpha_k}(0) \to 0$ fortement dans H^1.

Remarque 4. La preuve qu'on va donner n'utilise pas de manière essentielle le fait qu'on se place dans l'espace entier au lieu d'un domaine borné. En effet, les estimations ¡¡a priori¿¿ (4) et l'équation équivalente (5) qui sont les ingrédients essentiels de la démonstration, restent vrais dans des domaines bornés. Ensuite, les techniques du passage à la limite peuvent être remplacées par des techniques similaires adaptées aux domaines bornées sans trop de modifications.

1. Préliminaires

On note par H^s l'espace de Sobolev suivant :

$$H^s = \Big\{ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}; \quad \|g\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{g}(\xi)|^2 \, d\xi < +\infty \Big\},$$

où $\widehat{g}$ désigne la transformée de Fourier de g et $|\cdot|$ la norme euclidienne. La version homogène de ces espaces est

$$\dot{H}^s = \Big\{ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}; \ \widehat{g} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \text{ et } \|g\|_{\dot{H}^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\widehat{g}(\xi)|^2 \, d\xi < +\infty \Big\}.$$

L'espace homogène $\dot{H}^s$ est un espace de Banach pour $s < n/2$. Pour des fonctions à valeurs vectorielles $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, on dira que $h \in H^s$ si et seulement si chaque composante h_i de h appartient à H^s et on notera

$$\|h\|_{H^s}^2 = \sum_{i=1}^m \|h_i\|_{H^s}^2.$$

On utilisera la même notation pour les espaces de Sobolev homogènes.

On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire L^2, le produit de dualité entre H^s et H^{-s} ou encore le produit de dualité entre $\dot{H}^s$ et $\dot{H}^{-s}$. Pour des fonctions à valeurs vectorielles $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, on notera

$$\langle g, h \rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle g_i, h_i \rangle.$$

Le projecteur de Leray $\mathbb{P}$ désigne la projection orthogonale L^2 sur les champs de vecteurs à divergence nulle.

Le théorème de produit suivant est classique (voir par exemple [1]) :

Théorème 2. *Soient s et t des réels tels que $s + t > 0$, $s < n/2$, $t < n/2$. Il existe une constante $C > 0$ telle que si $u \in H^s$ et $v \in H^t$ alors $uv \in H^{s+t-n/2}$ et*

$$\|uv\|_{H^{s+t-n/2}} \leq C \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^t}.$$

Si $|s| < n/2$ et $\epsilon > 0$, il existe une constante $C' > 0$ telle que si $u \in H^s$ et $v \in H^{-s}$ alors $uv \in H^{-n/2-\epsilon}$ et

$$\|uv\|_{H^{-n/2-\epsilon}} \leq C' \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^{-s}}.$$

Enfin, on a le lemme suivant très simple :

Lemme 1. *Soit H un espace de Hilbert et $A \subset H$ un sous ensemble dense. Si u_n est une suite bornée de H telle que $\langle u_n, a \rangle \to \langle v, a \rangle$ pour tout élément a de A, alors u_n converge faiblement vers v.*

Rappelons l'équation du fluide de grade 2 :

$$\partial_t v - \nu \triangle u + u \cdot \nabla v + \sum_j v_j \nabla u_j = -\nabla p + f, \quad v = u - \alpha \triangle u. \tag{6}$$

Dans un premier temps, on va donner une autre forme à cette équation où la régularité H^1 en espace pour u suffira pour donner un sens à l'équation. Pour cela, remarquons d'abord que $u \cdot \nabla v$ est un vecteur dont la i-ème composante vaut

$$\begin{aligned}
\sum_j u_j \partial_j v_i &= \sum_j u_j \partial_j u_i - \alpha \sum_{j,k} u_j \partial_j \partial_k^2 u_i \\
&= \sum_j u_j \partial_j u_i - \alpha \sum_{j,k} \partial_j (u_j \partial_k^2 u_i) \\
&= \sum_j u_j \partial_j u_i - \alpha \sum_{j,k} \partial_j \partial_k (u_j \partial_k u_i) + \alpha \sum_{j,k} \partial_j (\partial_k u_j \partial_k u_i).
\end{aligned} \tag{7}$$

De même, la i-ème composante de $\sum_j v_j \nabla u_j$ est égale à

$$\begin{aligned}
\sum_j v_j \partial_i u_j &= \sum_j u_j \partial_i u_j - \alpha \sum_{j,k} \partial_k^2 u_j \partial_i u_j \\
&= \frac{1}{2}\partial_i |u|^2 - \alpha \sum_{j,k} \partial_k(\partial_k u_j \partial_i u_j) + \alpha \sum_{j,k} \partial_k u_j \partial_i \partial_k u_j \qquad (8)\\
&= \frac{1}{2}\partial_i (|u|^2 + \alpha |\nabla u|^2) - \alpha \sum_{j,k} \partial_k(\partial_k u_j \partial_i u_j).
\end{aligned}$$

Les relations (7) et (8) utilisées dans (6) donnent une forme équivalente à (6) :

$$\begin{aligned}
(9)\quad \partial_t v - \nu \triangle u + u \cdot \nabla u - \alpha \sum_{j,k} \partial_j \partial_k (u_j \partial_k u) + \alpha \sum_{j,k} \partial_j (\partial_k u_j \partial_k u) \\
- \alpha \sum_{j,k} \partial_k (\partial_k u_j \nabla u_j) = -\nabla p + f,
\end{aligned}$$

où on a incorporé dans la pression le terme $\frac{1}{2}\nabla(|u|^2 + \alpha|\nabla u|^2)$ qui apparaît dans $\sum_j v_j \nabla u_j$. Remarquons qu'il suffit de supposer que $u \in L^2_{loc}(0,T;H^1)$ pour définir l'équation (9) au sens des distributions. En effet, $\partial_t v$ et $\triangle u$ sont toujours définis si u est une distribution. Ensuite, un terme du type $Du\, D'u$, où Du et $D'u$ désignent une composante de u ou une dérivée d'ordre 1 d'une telle composante, est dans $L^1_{loc}(0,T;L^1)$ et, par conséquent, définit une distribution. Ses dérivées aussi et on a ainsi épuisé tous les termes de (9). Nous travaillerons désormais sur l'équation (9).

On a mentionné dans l'introduction que toute solution obtenue par un procédé de régularisation vérifie l'inégalité d'énergie (4). En effet, si l'on multiplie formellement (6) par u et qu'on intègre, on trouve, après quelques intégrations par parties, la relation (4) (voir aussi [4]). Rigoureusement, (4) sera vérifiée par la solution approchée (ce sera même une égalité). Le terme de droite passe à la limite sans problème. Pour le terme de gauche, après avoir fait les extractions habituelles, il suffit d'utiliser le fait que si $x_m \to x$ faiblement dans un espace de Hilbert, alors $\|x\| \leq \liminf \|x_m\|$.

En ce qui concerne la continuité faible à valeurs dans H^1, on a classiquement que $u \in L^\infty(0,\theta;H^1)$ (par extraction d'une suite convergente dans $L^\infty(0,\theta;H^1)$ faible*). A partir de l'équation, il est facile de voir que $\partial_t u \in L^1(0,\theta;H^{-k})$, pour k assez grand ; par conséquent $u \in C(0,\theta;H^{-k})$. Comme H^k est dense dans H^1, le lemme 1 implique $u \in C_w\big([0,\theta];H^1\big)$ pour tout $\theta < T$.

2. Preuve du théorème 1

La preuve s'inspire fortement de la démonstration de l'existence des solutions faibles de l'équation de Navier-Stokes, et plus précisément de la partie concernant le passage à la limite, tel qu'on peut la trouver dans [2], voir aussi [11]. Ici, la difficulté consiste en l'obtention d'estimations indépendantes de α et de montrer que les termes supplémentaires par rapport à l'équation de Navier-Stokes convergent vers 0 au sens des distributions.

Dans la suite, l'hypothèse $\nu > 0$ joue un rôle important. Ainsi, C désignera une constante indépendante de ν et α, qui peut changer d'une inégalité à l'autre. Pour alléger la rédaction, on notera $\alpha = \alpha_k$ et $u = u^\alpha = u^{\alpha_k}$. Toutes les limites qui suivent ont lieu pour $\alpha = \alpha_k \to 0$.

La première étape consiste en l'obtention d'estimations indépendantes de α.

Estimations uniformes en α. Soit $\theta < T$ fixé. On va utiliser l'inégalité d'énergie (4). Remarquons que

$$\int_0^t \langle f, u\rangle \le \int_0^t \|f\|_{\dot H^{-1}} \|u\|_{\dot H^1} \le \frac{\nu}{2}\int_0^t \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\nu}\int_0^t \|f\|_{\dot H^{-1}}^2.$$

En utilisant cette relation dans (4) on trouve

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \nu\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{L^2}^2\,d\tau \le \|u_0\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^t \|f\|_{\dot H^{-1}}^2. \tag{10}$$

En tenant compte des hypothèses a), b) et du fait que $f \in L^2_{loc}\big([0,T);\dot H^{-1}\big)$ on obtient de l'inégalité ci-dessus que, pour tout $\theta < T$,

$$u \text{ est borné dans } L^\infty(0,\theta;L^2); \tag{11_{a}}$$

$$\nabla u \text{ est borné dans } L^2(0,\theta;L^2); \tag{11_{b}}$$

$$\alpha^{1/2}\nabla u \text{ est borné dans } L^\infty(0,\theta;L^2). \tag{11_{c}}$$

Avant de pouvoir passer à la limite, il nous faut une certaine convergence forte. Une convergence forte peut s'obtenir si l'on dispose de l'équicontinuité en temps qui, à son tour, peut s'obtenir à partir d'estimations sur $\partial_t u$. Revenons à l'équation (9). On va estimer $\partial_t v$ dans un certain espace H^{-k}, k assez grand. Étudions chaque terme de (9), à l'aide des informations (11) et du théorème de produit 2 :

- $\nu\triangle u$ est borné dans $L^\infty(0,\theta;H^{-2})$ car u l'est dans $L^\infty(0,\theta;L^2)$;
- $\|u\cdot\nabla u\|_{H^{-1-d/2}} \le C\|u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}$ donc $u\cdot\nabla u$ est borné dans $L^2(0,\theta;H^{-1-d/2})$;
- de même, $u_j\partial_k u$ est borné dans $L^2(0,\theta;H^{-1-d/2})$ donc

$$\alpha\sum_{j,k}\partial_j\partial_k(u_j\partial_k u) \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0,\theta;H^{-3-d/2});$$

- $\|\partial_k u_j\,\partial_k u\|_{H^{-1-d/2}} \le C\|\nabla u\|_{L^2}^2$ donc $\alpha^{1/2}\partial_k u_j\,\partial_k u$ est borné dans $L^2(0,\theta;H^{-1-d/2})$, d'où

$$\alpha\sum_{j,k}\partial_j(\partial_k u_j\partial_k u) \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0,\theta;H^{-2-d/2});$$

- de même,

$$\alpha\sum_{j,k}\partial_k(\partial_k u_j\nabla u_j) \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0,\theta;H^{-2-d/2}).$$

En ce qui concerne le terme de pression, le plus simple est d'appliquer la projection de Leray $\mathbb{P}$ à (9) pour obtenir

$$\partial_t v = \mathbb{P}\Big(\nu\triangle u - u\cdot\nabla u + \alpha\sum_{j,k}\partial_j\partial_k(u_j\partial_k u) - \alpha\sum_{j,k}\partial_j(\partial_k u_j\partial_k u) \\ + \alpha\sum_{j,k}\partial_k(\partial_k u_j\nabla u_j) + f\Big).$$

Comme $\mathbb{P}$ est une projection orthogonale dans tout espace de Sobolev H^s, il découle de la discussion ci-dessus que

$$\partial_t v \text{ est borné dans } L^2(0,\theta;H^{-3-d/2}). \tag{12}$$

Or, on a la relation suivante :

$$\|\partial_t u\|_{H^s} \leq \|\partial_t v\|_{H^s}, \tag{13}$$

pour tout $s\in\mathbb{R}$. En effet, si l'on note $\check{v} = \partial_t(1-\triangle)^{s/2}v$ et $\check{u} = \partial_t(1-\triangle)^{s/2}u$, on a

$$\begin{aligned}\|\partial_t v\|^2_{H^s} = \|\check{v}\|^2_{L^2} &= \|\check{u} - \alpha\triangle\check{u}\|^2_{L^2}\\ &= \langle\check{u}-\alpha\triangle\check{u}, \check{u}-\alpha\triangle\check{u}\rangle\\ &= \|\check{u}\|^2_{L^2} + \alpha^2\|\triangle\check{u}\|^2_{L^2} - 2\alpha\langle\check{u},\triangle\check{u}\rangle\\ &= \|\check{u}\|^2_{L^2} + \alpha^2\|\triangle\check{u}\|^2_{L^2} + 2\alpha\langle\nabla\check{u},\nabla\check{u}\rangle\\ &= \|\check{u}\|^2_{L^2} + \alpha^2\|\triangle\check{u}\|^2_{L^2} + 2\alpha\|\nabla\check{u}\|^2_{L^2} \geq \|\check{u}\|^2_{L^2} = \|\partial_t u\|^2_{H^s}.\end{aligned}$$

On déduit de (12) et (13) que

$$\partial_t u \text{ est borné dans } L^2(0,\theta;H^{-3-d/2}). \tag{14}$$

On dispose maintenant de tous les éléments nécessaires pour passer à la limite.

Passage à la limite. On a déjà vu que

$$\alpha\sum_{j,k}\partial_j\partial_k(u_j\partial_k u) - \alpha\sum_{j,k}\partial_j(\partial_k u_j\partial_k u) + \alpha\sum_{j,k}\partial_k(\partial_k u_j\nabla u_j) \to 0 \text{ dans } L^2(0,\theta;H^{-3-d/2}),$$

donc la convergence a lieu aussi au sens des distributions.

Avec les informations (11_{a}) et (11_{b}) on peut extraire une sous-suite, encore notée u, telle que

$$u \rightharpoonup \widetilde{u} \text{ dans } L^\infty(0,\theta;L^2) \text{ faible*} \tag{15}$$

et

$$u \rightharpoonup \widetilde{u} \text{ dans } L^2(0,\theta;H^1) \text{ faible,} \tag{16}$$

pour tout $\theta < T$. De plus, grâce à (14), on peut aussi supposer que

$$\partial_t u \rightharpoonup \partial_t\widetilde{u} \text{ dans } L^2(0,\theta;H^{-3-d/2}) \text{ faible .} \tag{17}$$

Comme $u \to \widetilde{u}$ au sens des distributions, on aura $\partial_t \triangle u \to \partial_t \triangle \widetilde{u}$ au sens des distributions donc $\alpha \partial_t \triangle u \to 0$ au sens des distributions. Les seuls termes qui restent dans (9) sont exactement les mêmes que ceux de l'équation de Navier-Stokes. Les mêmes arguments s'appliquent donc ici. Il n'est pas nécessaire de les reproduire en détail ; on en donnera les grandes lignes seulement.

Soit θ fixé et $t,\ t' \in [0, \theta]$ arbitraires. On part de

$$u(t) - u(t') = \int_t^{t'} \partial_t u,$$

d'où

$$\|u(t) - u(t')\|_{H^{-3-d/2}} \leq \int_t^{t'} \|\partial_t u\|_{H^{-3-d/2}} \leq |t - t'|^{1/2} \|\partial_t u\|_{L^2(0,\theta;H^{-3-d/2})}.$$

En se rappelant (14), il s'ensuit que les $u = u^\alpha$ sont équicontinus (par rapport à α) dans $C([0,\theta]; H^{-3-d/2})$. Par le théorème d'Ascoli, pour tout compact K on peut extraire une sous-suite, encore notée u, telle que $u|_K$ converge fortement dans $C([0,\theta]; H^{-4-d/2}(K))$. En prenant une suite croissante de réels $\theta_m \to T$, de compacts $K_m = \overline{B(0,m)}$, des sous-suites successives et en extrayant une suite diagonale, on voit qu'on peut supposer que $u|_K$ converge fortement dans $C([0,\theta]; H^{-4-d/2}(K))$ pour tout $\theta < T$ et K compact. Une inégalité d'interpolation simple ainsi que la relation (11_{a}) montrent maintenant que

$$u|_U \to \widetilde{u}|_U \text{ fortement dans } C([0,\theta]; H^s(U)) \tag{18}$$

pour tout $s < 0$, $\theta < T$, et U ouvert relativement compact. Soit $\varphi \in C_0^\infty\big((0,T) \times \mathbb{R}^n\big)$. On a, après une intégration par parties,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \nabla u \, \varphi = -\sum_{i,j} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u_i u_j \partial_i \varphi_j.$$

Comme le domaine d'intégration ci-dessus est un compact de $(0,T) \times \mathbb{R}^n$, on peut utiliser les relations (16) et (18) pour déduire que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \nabla u \, \varphi \to \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{u} \cdot \nabla \widetilde{u} \, \varphi,$$

ce qui revient à dire que

$$u \cdot \nabla u \to \widetilde{u} \cdot \nabla \widetilde{u}$$

au sens des distributions. Enfin, on a clairement que $\partial_t u \to \partial_t \widetilde{u}$ et $\triangle u \to \triangle \widetilde{u}$ au sens des distributions. Comme la limite d'une suite de gradients est un gradient, on obtient, après passage à la limite dans (9),

$$\partial_t \widetilde{u} - \nu \triangle \widetilde{u} + \widetilde{u} \cdot \nabla \widetilde{u} = -\nabla p + f,$$

donc $\widetilde{u}$ est une solution de l'équation de Navier-Stokes qui vérifie

$$\widetilde{u} \in L^\infty_{loc}\big([0,T); L^2\big) \cap L^2_{loc}\big([0,T); H^1\big), \quad \partial_t \widetilde{u} \in L^2_{loc}\big([0,T); H^{-3-d/2}\big),$$

où on a utilisé (15), (16) et (17). La continuité faible résulte de la continuité forte $\widetilde{u} \in C\big([0,T); H^{-3-d/2}\big)$ (conséquence de $\partial_t \widetilde{u} \in L^2_{loc}\big([0,T); H^{-3-d/2}\big)$), de l'appartenance de $\widetilde{u}$ à $L^\infty_{loc}\big([0,T); L^2\big)$ et du lemme 1 :

$$\widetilde{u} \in C_w\big([0,T); L^2\big).$$

La donnée initiale de $\widetilde{u}$ vérifie, grâce à la relation (18),

$$u(0)|_U \to \widetilde{u}(0)|_U,$$

au sens des distributions pour tout U ouvert relativement compact. Comme on a aussi que

$$u(0) \to \widetilde{u}_0,$$

au sens des distributions, il s'ensuit que $\widetilde{u}_0|_U = \widetilde{u}(0)|_U$ pour tout U ouvert relativement compact. Par conséquent, $\widetilde{u}_0 = \widetilde{u}(0)$. Pour terminer la preuve, il reste a montrer la remarque 3. Supposons que $u(0) \to \widetilde{u}_0$ fortement dans L^2 et $\alpha^{1/2} u(0)$ tend vers 0 dans H^1. Sous ces hypothèses, en utilisant aussi (16), la partie droite de (4) tend vers

$$\|\widetilde{u}_0\|^2_{L^2} + 2\int_0^t \langle f(\tau), \widetilde{u}(\tau)\rangle \, d\tau.$$

Quant à la partie de gauche, remarquons d'abord que par (11_{a}), (18) et par le lemme 1 on a que $u(t) \rightharpoonup \widetilde{u}(t)$ faiblement dans L^2 pour tout $t \in [0,T)$. Rappelons maintenant que si $x_m \to x$ faiblement dans un espace de Hilbert, alors $\|x\| \leq \liminf \|x_m\|$. Il ne reste plus qu'à utiliser (16) pour minorer la limite supérieure du terme de gauche de (4) par

$$\|\widetilde{u}(t)\|^2_{L^2} + 2\nu \int_0^t \|\nabla \widetilde{u}(\tau)\|^2_{L^2} \, d\tau,$$

ce qui conclut la preuve de l'inégalité d'énergie (3) pour $\widetilde{u}$. Le théorème 1 est complètement démontré.

Remarque 5. Si $\nu = 0$, alors le passage à la limite ci-dessus ne marche plus. Plus précisément, comme l'information (11_{b}) n'est plus disponible, on ne peut pas affirmer que le terme $\partial_j(\partial_k u_j \partial_k u)$ converge vers 0 dans $L^2(0,\theta; H^{-2-d/2})$; dans ce cas, on est obligé d'utiliser (11_{c}) qui montre que ce terme est seulement borné dans $L^\infty(0,\theta; H^{-2-d/2})$.

Références

[1] J.-Y. Chemin. *Fluides parfaits incompressibles.* Astérisque, n° 230, 1995, p. 177.

[2] J.-Y. Chemin. Mthodes mathmatiques en mcanique des fluides, I. 1997. Cours de DEA et Preprint Laboratoire d'Analyse Numrique A97004.

[3] D. Cioranescu et V. Girault. *Weak and classical solutions of a family of second grade fluids.* Internat. J. Non-Linear Mech., **32**, n° 2, 1997, pp. 317–335.

[4] D. Cioranescu et E. H. Ouazar. *Existence and uniqueness for fluids of second grade. In :* Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France seminar, Vol. VI (Paris, 1982/1983), pp. 178–197. Boston, MA, Pitman, 1984.

[5] P. Constantin et C. Foiaş. *Navier-Stokes equations.* Chicago, University of Chicago Press, 1988.

[6] J.E. Dunn et R.L. Fosdick. *Thermodynamics, stability, and boundedness of fluids of complexity* 2 *and fluids of second grade*. Arch. Rational Mech. Anal., **56**, 1974, pp. 191–252.

[7] G. P. Galdi, M. Grobbelaar-van Dalsen, et N. Sauer. *Existence and uniqueness of classical solutions of the equations of motion for second-grade fluids*. Arch. Rational Mech. Anal., **124**, n° 3, 1993, pp. 221–237.

[8] G. P. Galdi et A. Sequeira. *Further existence results for classical solutions of the equations of a second-grade fluid*. Arch. Rational Mech. Anal., **128**, n° 4, 1994, pp. 297–312.

[9] J. Leray. *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*. Acta Math., **63**, 1934, pp. 193–248.

[10] R.S. Rivlin et J.L. Ericksen. *Stress-deformation relations for isotropic materials*. J. Rational Mech. Anal., **4**, 1955, pp. 323–425.

[11] M. E. Taylor. *Partial differential equations. III*. New York, Springer-Verlag, 1997.

[12] R. Temam. *Navier-Stokes equations*. Amsterdam, North-Holland, 1984.

IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex (France)
Email : iftimie@maths.univ-rennes1.fr