Singularité simple en dimension 2

Contents

1 Théorie de Grothendieck-Brieskorn-Slodowy

1.1 Singularité simple

Soit G un sous groupe fini non-trivial de $SL_2(\mathbb{C})$. G opère sur $\mathbb{C}^2$ et cette action est libre sauf $0 \in \mathbb{C}^2$. On voit que le quotient $\mathbb{C}^2/G$ est singulier à $\bar{0} \in \mathbb{C}^2/G$.

Définition 1.1 (cf. [D]). *On appelle* $(\mathbb{C}^2/G, \bar{0})$ *une* ***singularité simple****.*

Rappelons que G est isomorphe à un sous-groupe de $SU(2)$ car une représentation d'un groupe fini sur $\mathbb{C}$ est unitarisable. Donc, à l'aide du revêtement double $\phi : SU(2) \longrightarrow SO(3)$, on obtient la classification de G à un conjugé près:

$G \subset SU(2)$	$\phi(G) \subset SO(3)$
Groupe cyclique	$C_n = \langle a \vert a^n = 1 \rangle$
$\widetilde{\mathcal{D}}_n$ $(n \geq 2)$	$\mathcal{D}_n = \langle a, b, c \vert a^2 = b^2 = c^n = abc = 1 \rangle$ (groupe diédraux)
$\widetilde{\mathcal{T}}$	$\mathcal{T} = \langle a, b, c \vert a^2 = b^3 = c^3 = abc = 1 \rangle$ (groupe tétrahèdre)
$\widetilde{\mathcal{O}}$	$\mathcal{O} = \langle a, b, c \vert a^2 = b^3 = c^4 = abc = 1 \rangle$ (groupe octahèdre)
$\widetilde{\mathcal{I}}$	$\mathcal{O} = \langle a, b, c \vert a^2 = b^3 = c^5 = abc = 1 \rangle$ (groupe icosahèdre)

On sait que $\mathbb{C}[\mathbb{C}^2/G] = \mathbb{C}[\mathbb{C}^2]^G$ est engendré par 3 éléments, i.e., $\mathbb{C}^2/G \subset \mathbb{C}^3$.

Exemple 1.1. *Soient $G = C_n$ $(n \geq 2)$ et $\mathbb{C}[\mathbb{C}^2] = \mathbb{C}[x, y]$. Comme $C_n \subset SU(2)$ est engendré par $\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}$, où ω est n-ième racine d'unité, on obtient*

$$\mathbb{C}[x, y]^G = \mathbb{C}[xy, x^n, y^n] \cong \mathbb{C}[X, Y, Z]/\langle X^n - YZ \rangle.$$

C'est une variété torique.

Soient $\pi : X \longrightarrow \mathbb{C}^2/G$ la résolution minimale et $\pi^{-1}(\bar{0}) = \cup_{i=1}^n E_i$ la décomposition de l'ensemble exceptionel en composantes irréductibles. Donc, en particulier, on a $\pi^{-1}(\mathbb{C}^2/G \setminus \{\bar{0}\}) \cong \mathbb{C}^2/G \setminus \{\bar{0}\}$ et $E_i \cong \mathbb{P}^1$. En 1934, P. Du Val [DuV] a montré que la matrice $(-(E_i \cdot E_j))_{i=1}^n$ est une matrice de Cartan de type décrit ci-dessous:

G	Type de Configuration	Equation dans $\mathbb{C}^3$
C_{n+1} $(n \geq 1)$	A_n	$X^n + YZ = 0$
$\widetilde{\mathcal{D}}_{n-2}$ $(n \geq 4)$	D_n	$X^{n-1} + XY^2 + Z^2 = 0$
$\widetilde{\mathcal{T}}$	E_6	$X^4 + Y^3 + Z^2 = 0$
$\widetilde{\mathcal{O}}$	E_7	$X^3Y + Y^3 + Z^2 = 0$
$\widetilde{\mathcal{I}}$	E_8	$X^5 + Y^3 + Z^2 = 0$

Donc, ici se pose les problèmes suivants:

1. Etablir une relation entre une singularité simple et le système de racine du type correspondant.

2. Trouver une relation directe entre un sous-groupe fini et le système de racine du type correspondant.

Ici, on traitera le premier problème. Le deuxième problème est la **correspondance de McKay** et une approche intéressante est donnée par H. Cassen et P. Slodowy [CS].

1.2 Quotient adjoint

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de dimension finie sur $\mathbb{C}$, $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ la décomposition de Levi, i.e., $\mathfrak{h}$ un sous-algèbre de Cartan et $\mathfrak{n}$ une sous-algèbre nilpotente. Soient G un groupe de Lie correspondant à $\mathfrak{g}$ et B le sous-groupe de Borel correspondant à $\mathfrak{b}$. Sauf cette section, on suppose que l'algèbre $\mathfrak{g}$ est de type A_l, D_l ou E_l.

Soit $\mathcal{N}$ le cône nilpotent de $\mathfrak{g}$, l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$.

Exemple 1.2. *1. Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, on a*

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \middle| \, x^2 + yz = 0 \right\}.$$

2. Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, on a

$$\mathcal{N} = \{A \in \mathfrak{g} | \operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(A^3) = \cdots = \operatorname{tr}(A^n) = 0\}.$$

Notons que $\operatorname{tr}(A^k)$ est G-invarinate.

Remarque 1.1. *En 1963, B. Kostant [K] a montré que* $(\mathcal{N}, 0)$ *est une singularité normale.*

Maintenant, on va généraliser Exemple 1.2.2. La clef est du théorème de la restriction de C. Chevalley:

Théorème 1.1. $S(\mathfrak{g})^G \cong S(\mathfrak{h})^W$.

Un isomorphisme est donné en associant $f \in S(\mathfrak{g})^G = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G$ à $f|_{\mathfrak{h}^*} \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W = S(\mathfrak{h})^W$. D'ici maintenant, on identifie $\mathfrak{g}$ à son duale $\mathfrak{g}^*$ par la forme de Killing.

Par ce théorème, on peut définir

$$\chi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}//G \cong \mathfrak{h}/W,$$

en associant $x \in \mathfrak{g}$ à $G.x_s \cap \mathfrak{h} \in \mathfrak{h}/W$, où $x = x_s + x_n$ est la décomposition de Jordan et Chevalley, i.e., x_s semi-simple et x_n nilpotent tels que $[x_s, x_n] = 0$.

Définition 1.2. *L'application* χ *est dite le* ***quotient adjoint****.*

Le cône nilpotent $\mathcal{N}$ est donc l'image réciproque de $\bar{0} \in \mathfrak{h}/W$. De plus, on a

Théorème 1.2. *Le quotient adjoint* $\chi : (\mathfrak{g}, 0) \longrightarrow (\mathfrak{h}/W, \bar{0})$ *est une déformation semi-universelle de* $(\mathcal{N}, 0)$*.*

1.3 Théorème de Grothendieck

Rappelons que

1. $\mu : G \times^B \mathfrak{n} \longrightarrow \mathcal{N}$; $(g; x) \mapsto \mathrm{Ad}(g)(x)$ est une résolution de $(\mathcal{N}, 0)$.
   (La **résolution de Springer** [Sp])
2. $G \times^B \mathfrak{n} \cong T^*(G/B)$ via la forme de Killing et l'application μ est l'application moment de l'action $G \curvearrowright G \times^B \mathfrak{n}$ par la multiplication à gauche.

Ici se pose la question

Y a-t-il une déformation (semi-universelle) de la résolution de Springer compatible avec le quotient adjoint ?

Voici la solution. Considérons le diagramme:

$$\begin{tikzcd} G \times^B \mathfrak{n} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\chi"] \\ \mathfrak{h} \arrow[r, "\phi"] & \mathfrak{h}/W \end{tikzcd} \tag{1}$$

, où χ est le quotient adjoint, ϕ la projection canonique de $\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{h}/W$, ψ et θ sont définies par

$$\psi(g; x) := \mathrm{Ad}(g)(x), \qquad \theta(g; h + n) := h,$$

pour $g \in G$, $x \in \mathfrak{b}$, $h \in \mathfrak{h}$ et $n \in \mathfrak{n}$.

Théorème 1.3 (A. Grothendieck)**.** *Le diagramme (1) est une résolution simultanée pour* χ*.*

Pour une démonstration, voir e.g., [Sl1], [Sl2].

1.4 Théorème de Brieskorn et Slodowy

Maintenant, on revient à une singularité simple en dimension 2.

Rappelons que pour tout $x \in \mathfrak{g}$,

1. $\dim G.x$ est pair grâce à la structure de Kirillov-Kostant-Souriau et que
2. $dim Z_{\mathfrak{g}}(x) - \mathrm{rg}\mathfrak{g} \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$, où $Z_{\mathfrak{g}}(x) := \{x \in \mathfrak{g} | [x, z] = 0\}$ est le centralisateur de x.

En particulier, $\mathcal{N}$ est AdG-stable et on sait que

1. Il existe $x \in \mathcal{N}$ tel que $\dim Z_{\mathfrak{g}}(x) = \mathrm{rg}\mathfrak{g}$ (**nilpotent régulier**). L'ensemble de tels éléments forme une orbite unique et $G.x$ est dense dans $\mathcal{N}$.
2. Il existe $xin\mathcal{N}$ tel que $\dim Z_{\mathfrak{g}}(x) = \mathrm{rg}\mathfrak{g} + 2$ (**nilpotent sous-régulier**). L'ensemble de tels éléments forme une orbite unique.

En 1970, E. Brieskorn [B] a annoncé le théorème suivant:

Théorème 1.4. *Soient $x \in \mathcal{N}$ un élément nilpotent sous-régulier et $S \subset \mathfrak{g}$ un slice transversal à G-orbite de x. Alors, la réstriction du quotient adjoint*

$$\chi|_S : (S, x) \longrightarrow (\mathfrak{h}/W, \bar{0})$$

est une déformation semi-universelle de la singularité simple correspondante.

Donc, en particulier, ce théorème implique que

$$\underline{(S \cap \mathcal{N}, x) = (S \cap \chi^{-1}(\bar{0}), x) \text{ est une singularité simple correspondante.}}$$

Une démonstration de ce théorème est publiée par P. Slodowy [Sl1], [Sl2]. Le corollaire suivant est aussi montré par P. Slodowy (loc.cit.):

Corollaire 1.5. *La restriction de la résolution de Grothendieck*

$$\begin{tikzcd} \psi^{-1}(S) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\theta|_{\psi^{-1}(S)}"'] & S \arrow[d, "\chi|_S"] \\ \mathfrak{h} \arrow[r, "\phi"] & \mathfrak{h}/W \end{tikzcd}$$

est une résolution simultanée pour $\chi|_S : (S, x) \longrightarrow (\mathfrak{h}/W, \bar{0})$.

Maintenant, on va construire le slice S explicitement.

Le point de départ est $T_x(G.x) = x + [\mathfrak{g}, x]$.

Lemme 1.6 (Jacobson et Morozov)**.** *Pour tout $x \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ nilpotent, il existe un morphisme $\varphi : \mathfrak{sl}_2 \longrightarrow \mathfrak{g}$ tel que $x \in \mathrm{Im}\varphi$.*

Soit $f \in \mathfrak{g}$ un élément nilpotent. Par le lemme de Jacobson et Morozov, il existe $e, h \in \mathfrak{g}$ tels que

$$[h, e] = 2e, \qquad [h, f] = -2f, \qquad [e, f] = h.$$

Posons $\mathfrak{a} := \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}f \cong \mathfrak{sl}_2$. $\mathfrak{a}$ agit sur $\mathfrak{g}$ par l'action adjoint et il est claire que $[f, \mathfrak{g}] \cap Z_{\mathfrak{g}}(e) = \{0\}$.

Définition 1.3. *L'espace affine $S_f := f + Z_{\mathfrak{g}}(e)$ est dit un* ***slice de Slodowy****.*

1.5 Exemple

Ici, un exmple détaillé pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ sera donné.

Dans ce cas,

$$f := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont d'éléments nilpotents sous-réguliers dans $\mathfrak{g}$. Un slice de Slodowy à f est paramétrisé par

$$S_f := f + Z_{\mathfrak{g}}(e) = \left\{ \begin{pmatrix} x & t & z \\ 1 & x & 0 \\ 0 & y & -2x \end{pmatrix} \middle| (x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 \right\}.$$

Soit $A \in S_f$ une matrice avec la paramétrisation ci-dessus. Comme $\det(\lambda \mathrm{Id} - A) = \lambda^3 - (3x^2 + t)\lambda + 2x^3 - 2tx - yz$, la réstriction du quotient adjoint à S_f est donnée par

$$\chi|_{S_f} : S_f \longrightarrow \mathfrak{h}/W \cong \mathbb{C}^2; \quad A \longmapsto (3x^2 + t, 2x^3 - 2tx - yz).$$

Donc, pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2 \cong \mathfrak{h}/W$, on obtient

$$\chi^{-1}\{(a, b)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 | yz = 8x^3 - 2ax - b\}.$$

Le discriminant $\mathbb{D}$ de $\chi|_{S_f}$ est donc donné par

$$\begin{aligned} \mathbb{D} = & \left\{ (a, b) \in \mathbb{C}^2 \middle| F = 0, \ \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \right\} \\ = & \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 | 4a^3 - 27b^2 = 0\}. \end{aligned}$$

Rappelons qu'on a aussi la projection canonique

$$\phi : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}/W \cong \mathbb{C}^2; \quad h = \mathrm{diag}(h_1, h_2, h_3) \longmapsto (-(h_1h_2 + h_2h_3 + h_3h_1), -h_1h_2h_3).$$

Posons $a := -(h_1h_2 + h_2h_3 + h_3h_1)$ et $b := -h_1h_2h_3$. On peut vérifier que

$$4a^3 - 27b^2 = (h_1 - h_2)^2(2h_1 + h_2)^2(h_1 + 2h_2)^2 = \prod_{1 \le i < j \le 3} (h_i - h_j)^3.$$

Ceci dit que

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(\mathbb{D}) = & \left\{ \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h} \middle| \prod_{1 \le i < j \le 3} (h_i - h_j)^2 = 0 \right\} \\ = & \bigcup_{\alpha \in \Delta_+} H_\alpha, \end{aligned}$$

où Δ_+ est l'ensemble des racines positives de $\mathfrak{g}$ et H_α est l'hyperplan normal à α. C'est à dire, $\underline{\phi^{-1}(\mathbb{D}) \text{ est l'ensemble des murs des chambres de Weyl}}$.

2 Interpretation à la géométrie symplectique

Le but de cette section est de reformuler le théorème 1.3 et le corollaire 1.5. En suite, on expliquera une raison pour laquelle ces déscriptions ont un avantage. Ici, on reprend les notations utilisées dans la section précédente. Voir [Y] pour le détail.

2.1 Réformulation

Par le théorème de la restriction de C. Chevalley (cf. Théorème 1.1), on a le quotient adjoint

$$J : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{h}^*/W.$$

Soient H, U le sous-groupe de G correspondant à $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}$, respectivement.
L'action à gauche $G \curvearrowright G/U$ induite par la multiplication soulève à une action symplectique sur $T^*(G/U) \cong G \times^U \mathfrak{n}^\perp$: $\quad g'.(g;x) := (g'g;x)$ pour $g, g' \in G$ et $x \in \mathfrak{n}^\perp$.
L'action à droite $G/U \curvearrowleft H$ induite par la multiplication soulève à une action symplectique sur $G \times^U \mathfrak{n}^\perp$: $\quad (g;x).h := (gh; \mathrm{Ad}_h^*(x))$ pour $g \in G,\ h \in H$ et $x \in \mathfrak{n}^\perp$.

Lemme 2.1. *Les deux actions ci-dessus admettent des applications moments équivariantes et elles sont données par*

$$\begin{aligned} J_G :\ T^*(G/U) &\longrightarrow \mathfrak{g}^*; \quad (g;x) \ \longmapsto\ \mathrm{Ad}_{g^{-1}}^*(x), \\ J_H :\ T^*(G/U) &\longrightarrow \mathfrak{h}^*; \quad (g;x) \ \longmapsto\ x|_{\mathfrak{h}}. \end{aligned}$$

Donc, on obtient le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
T^*(G/U) \arrow[r, "J_G"] \arrow[d, "J_H"'] & \mathfrak{g}^* \arrow[d, "J"] \\
\mathfrak{h}^* \arrow[r, "\phi_W"] & \mathfrak{h}^*/W
\end{tikzcd}$$

, où ϕ_W est la projection canonique de $\mathfrak{h}^*$ sur $\mathfrak{h}^*/W$.
Puisque l'action de H sur $T^*(G/U)$ est lisse, libre et propre, le quotient $T^*(G/U)/H$ est lisse et la projection canonique $\pi_H :\ T^*(G/U) \longrightarrow T^*(G/U)/H$ est submersion. De plus, comme les deux applications moments sont H-invariantes, il existe les applications lisses

$$\hat{J}_G :\ T^*(G/U)/H \longrightarrow \mathfrak{g}^*, \qquad \hat{J}_H :\ T^*(G/U)/H \longrightarrow \mathfrak{h}^*,$$

telles que $J_G = \hat{J}_G \circ \pi_H$ et $J_H = \hat{J}_H \circ \pi_H$. Comme $T^*(G/U)/H \cong G \times^B \mathfrak{n}^\perp$, on obtient le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
G \times^U \mathfrak{n}^\perp \arrow[dr, "\pi_H"] \arrow[drr, bend left, "J_G"] \arrow[ddr, bend right, "J_H"'] & & \\
& G \times^B \mathfrak{n}^\perp \arrow[r, "\hat{J}_G"] \arrow[d, "\hat{J}_H"'] & \mathfrak{g}^* \arrow[d, "J"] \\
& \mathfrak{h}^* \arrow[r, "\phi_W"] & \mathfrak{h}^*/W
\end{tikzcd} \tag{2}$$

Le lemme suivant est facile de vérifier:

Lemme 2.2. *Le diagramme (2) est la résolution simultanée de Grothendieck (cf. Théorème 1.3).*

Identifiant $\mathfrak{g}$ à son duale $\mathfrak{g}^*$, on regarde S_f comme un sous-espace affine de $\mathfrak{g}^*$. Posons $\widetilde{S}_f := J_G^{-1}(S_f)$, $\widehat{S}_f := \hat{J}_G^{-1}(S_f) = \widetilde{S}_f/H$, $J_G^f := J_G|_{\widetilde{S}_f}$, $\hat{J}_G^f := \hat{J}_G|_{\widehat{S}_f}$, $J_H^f := J_H|_{\widetilde{S}_f}$, $\hat{J}_H^f := \hat{J}_H|_{\widehat{S}_f}$ et $J_f := J|_{S_f}$. Par Corollaire 1.5, on voit que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \widehat{S}_f \arrow[r, "\hat{J}_G^f"] \arrow[d, "\hat{J}_H^f"'] & S_f \arrow[d, "J_f"] \\ \mathfrak{h}^* \arrow[r, "\phi_W"] & \mathfrak{h}^*/W \end{tikzcd} \tag{3}$$

est une résolution simultanée pour $J_f : (S_f, f) \longrightarrow (\mathfrak{h}^*/W, \bar{0})$.

2.2 Formes symplectiques

Soit ω une forme symplectique holomorphe sur $T^*(G/U)$ pour laquelle les actions de G et H sont symplectiques. On voit que tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est une valeur régulière de J_H. Par la réduction symplectique, ceci implique qu'il existe une forme symplectique $\widehat{\omega}(\lambda)$ sur $\hat{J}_H^{-1}(\lambda)$ telle que $\pi_H^*\widehat{\omega}(\lambda) = \omega|_{J_H^{-1}(\lambda)}$. De plus, on a la proposition suivante:

Proposition 2.3. *Il existe une unique 2-forme relative $\widehat{\omega}$ sur $\hat{J}_H : T^*(G/U)/H \longrightarrow \mathfrak{h}^*$ telle que $\widehat{\omega}|_{\hat{J}_H^{-1}(\lambda)} = \widehat{\omega}(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.*

Soit K un sous-groupe compact maximal de G et T un tore maximal de K. En identifiant $\mathfrak{n}^\perp$ à $\mathfrak{b}$ via la forme de Killing, on a

$$\begin{aligned} T^*(G/U)/H \underset{\text{hol.}}{\cong} G \times^B \mathfrak{b} \underset{\mathcal{C}^\infty}{\cong} K \times^T \mathfrak{b} = K \times^T (\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}) \\ \cong \mathfrak{h} \times K \times^T \mathfrak{n} \cong \mathfrak{h} \times (G \times^B \mathfrak{n}), \end{aligned}$$

qui implique que $T^*(G/U)/H$ est $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphe à $\mathfrak{h} \times T^*(G/B)$. En particulier, il existe un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme

$$\hat{\varphi}_\lambda : \hat{J}_H^{-1}(\lambda) \longrightarrow T^*(G/B) = \hat{J}_H^{-1}(0).$$

Par A. Borel et F. Hirzebruch [BH] (cf. Proposition 14.6), on sait que

Proposition 2.4. *Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, il existe une $(1,1)$-forme $\Omega(\lambda)$ sur G/B telle que l'application*

$$\mathfrak{h}^* \longrightarrow H^2(G/B, \mathbb{C}); \quad \lambda \longmapsto [\Omega(\lambda)]$$

est un isomorphisme linéaire W-équivariant.

Notons ω_B une forme symplectique sur $T^*(G/B)$ et $\pi : T^*(G/B) \longrightarrow G/B$ la projection canonique. On a

Proposition 2.5. *1. Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\widehat{\omega}(\lambda) = \hat{\varphi}_\lambda^*(\omega_B + \pi^*\Omega(\lambda))$.*

2. *En particulier,* $\hat{\varphi}_0^* : (\hat{J}_H^{-1}(0), \widehat{\omega}(0)) \longrightarrow (T^*(G/B), \omega_B)$ *est un complexe-symplectique isomorphisme.*

Par Proposition 2.4 et cette proposition, on a

Corollaire 2.6. *L'application linéaire*

$$P_{\widehat{\omega}} : \ \mathfrak{h}^* \longrightarrow H^2(T^*(G/B), \mathbb{C}); \quad \lambda \ \longmapsto \ (\hat{\varphi}_\lambda^*)^{-1}([\widehat{\omega}(\lambda)]) = [\pi^*\Omega(\lambda)]$$

est un isomorphisme linéaire W*-équivariant.*

Soient $\tilde{\iota} : \widetilde{S}_f \hookrightarrow T^*(G/U)$ une immersion fermée et $\widetilde{\omega}_f := \tilde{\iota}^*\omega$ une 2-forme induite. Le lemme suivant est une étape importante:

Lemme 2.7. $(\widetilde{S}_f, \widetilde{\omega}_f)$ *est une variété symplectique holomorphe.*

Donc, par la réduction symplectique, on voit que, pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, il existe une unique forme symplectique holomorphe $\widehat{\omega}_f(\lambda)$ sur $(\hat{J}_H^f)^{-1}(\lambda)$. Le théorème suivant est obtenu par H. Yamada [Y]:

Théorème 2.8. *1. (3) est une résolution simultanée pour* $J_f : \ (S_f, f) \longrightarrow (\mathfrak{h}^*/W, \bar{0})$.

2. *Il existe une unique* 2*-forme relative holomorphique* $\widehat{\omega}_f$ *sur* $\hat{J}_H^f : \widetilde{S}_f/H \longrightarrow \mathfrak{h}^*$ *telle que* $\widehat{\omega}_f|_{(\hat{J}_H^f)^{-1}(\lambda)} = \widehat{\omega}_f(\lambda)$ *pour tout* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

3. *La forme* $\widehat{\omega}_f$ *est une forme primitive, i.e., un analogue d'une différentielle abélienne de la première espèce (cf. [Sa]).*

2.3 Application des périodes

Soit $\mathbb{D}$ le discriminant de $J_f : \ (S_f, f) \longrightarrow (\mathfrak{h}^*/W, \bar{0})$ et posons $\mathfrak{h}_r^* := \phi_W^{-1}(\mathfrak{h}^*/W \setminus \mathbb{D}) = \mathfrak{h}^* \setminus \phi_W^{-1}(\mathbb{D})$ et $S_f^r := S_f \setminus J_f^{-1}(\mathbb{D})$. (Comme on a vu en § 1.5, $\phi_W^{-1}(\mathbb{D})$ est l'ensemble des murs des chambres de Weyl.) Notons que la projection $\mathfrak{h}_r^* \twoheadrightarrow \mathfrak{h}_r^*/W$ est un revêtement galoisien de groupe W.

Proposition 2.9 (cf. §.4.2 de [Sl1])**.** *1. Le fibré* $\hat{J}_H^f : \widehat{S}_f \longrightarrow \mathfrak{h}^*$ *est* $\mathcal{C}^\infty$*-trivial.*

2. *Soit* J_f^r *la réstriction de* J_f *à* S_f^r*. Alors,* $J_f^r : S_f^r \longrightarrow \mathfrak{h}_r^*/W$ *est un* $\mathcal{C}^\infty$*-fibré et le fibré image réciproque de* S_f^r *par* $\phi_W^r : \mathfrak{h}_r^* \twoheadrightarrow \mathfrak{h}_r^*/W$ *est trivial.*

Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et $\overline{\lambda} \in \mathfrak{h}^*/W$, posons $\widehat{S}_f(\lambda) := (\hat{J}_H^f)^{-1}(\lambda)$ et $S_f(\overline{\lambda}) := (J_f)^{-1}(\overline{\lambda})$.

Par Proposition 2.9 2., le faisceau $R^2(J_f^r)_*\mathbb{C}_{S_f^r}$ est localement constant, donc en fixant $\overline{\lambda_0} \in \mathfrak{h}_r^*/W$, on obtient une action monodromique de $\pi_1(\mathfrak{h}_r^*/W, \overline{\lambda_0})$ sur le fibre

$$(R^2(J_f^r)_*\mathbb{C}_{S_f^r})_{\overline{\lambda_0}} = H^2(S_f(\overline{\lambda_0}), \mathbb{C}).$$

De plus, $\phi_W^* R^2(J_f^r)_*\mathbb{C}_{S_f^r}$ est contant par la même proposition, on en déduit qu'il existe un isomorphisme, pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}_r^*$,

$$\Phi_{\lambda,\lambda_0} : (R^2(J_f^r)_*\mathbb{C}_{S_f^r})_{\overline{\lambda}} \longrightarrow (R^2(J_f^r)_*\mathbb{C}_{S_f^r})_{\overline{\lambda_0}}.$$

Pour tout $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, soit $\omega(\lambda)$ la forme de Kirillov-Kostant-Souriau sur l'orbite $G.\lambda$. On peut définir l'application des périodes associée à la forme ω comme suit:

$$\widehat{P} : \mathfrak{h}_r^* \longrightarrow H^2(S_f(\overline{\lambda_0}), \mathbb{C}); \qquad \lambda \longmapsto \Phi_{\lambda,\lambda_0}([\omega(\lambda)]).$$

On va construire le prolongement analytique de $\widehat{P}$ sur $\mathfrak{h}^*$.

Par Proposition 2.9 1., le faisceau $R^2(\hat{J}_H^f)_*\mathbb{C}_{\widehat{S}_f}$ est constant, donc on a un isomorphisme, pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}_r^*$,

$$\Phi_\lambda^f : \ (R^2(\hat{J}_H^f)_*\mathbb{C}_{\widehat{S}_f})_\lambda \longrightarrow (R^2(\hat{J}_H^f)_*\mathbb{C}_{\widehat{S}_f})_0,$$

qui nous permet de définir

$$P_{\widehat{\omega}_f} : \ \mathfrak{h}^* \longrightarrow H^2(\widehat{S}_f(0), \mathbb{C}); \qquad \lambda \longmapsto \Phi_\lambda^f([\widehat{\omega}_f(\lambda)]).$$

L'immersion fermée $\hat{\iota} : \widehat{S}_f \hookrightarrow T^*(G/U)/H$ induit un homomorphisme

$$\hat{\iota}^* : \ R^2(\hat{J}_H)_*\mathbb{C}_{T^*(G/U)/H} \longrightarrow R^2(\hat{J}_H^f)_*\mathbb{C}_{\widehat{S}_f},$$

de plus, on a le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{h}^* \arrow[r, "P_{\widehat{\omega}_f}"] \arrow[dr, "P_{\widehat{\omega}}"'] & H^2(\widehat{S}_f(0), \mathbb{C}) \\ & H^2(T^*(G/B), \mathbb{C}). \arrow[u, "\hat{\iota}_0^*"'] \end{tikzcd} \tag{4}$$

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des sous-algèbres de Borel auquel s'identifie la variété de drapaeux G/B. Pour $x \in \mathcal{N}$, on pose $\mathcal{B}_x := \{\mathfrak{b}' \in \mathcal{B} | x \in \mathfrak{b}'\}$.

Remarque 2.1. *1. On peut identifier $G \times^B \mathfrak{n}$ à $\{(\mathfrak{b}, x) \in \mathcal{B} \times \mathfrak{g} | x \in [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]\}$.*

2. La résolution de Springer n'est que la projection canonique:

$$\mu : G \times^B \mathfrak{n} \longrightarrow \mathcal{N} : \quad (\mathfrak{b}, x) \longmapsto x.$$

En particulier, on a $\mu^{-1}(x) = \mathcal{B}_x$ pour tout $x \in \mathcal{N}$.

Notons aussi que si $x \in \mathcal{N}$ est régulier, alors $\mathcal{B}_x$ est un singleton, et si $x \in \mathcal{N}$ est sous-régulier, alors $\mathcal{B}_x$ est la réunion de droites projectives et la configuration de ses droites est décrite en fonction du Diagramme de Dynkin (cf. [St].) En particulier, $\mathcal{B}_f = (\hat{J}_G^f)^{-1}(f)$ est le **diviseur exceptionel** de la résolution $\widehat{S}_f(0) \longrightarrow S_f(\bar{0})$.

Exemple 2.1. *Ici, on traite le cas $G = SL_{n+1}(\mathbb{C})$. Rappelons que la variété G/B , donc la variété $\mathcal{B}$ aussi, s'identifie à la variété de drapeaux*

$$\mathcal{F} := \{\{0\} \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n \subset \mathbb{C}^{n+1} | \dim V_i = i\}.$$

En particulier, $\mathcal{B}_x$ *s'identifie à* $\mathcal{F}_x := \{(V_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{F} | x.V_i \subset V_i\}$ *pour* $x \in \mathcal{N}$. *Soit* $\{e_i\}_{0\leq i\leq n} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ *la base canonique et posons*

$$x := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}.$$

Pour $1 \leq i \leq n$ *et* $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$, *soit* $\mathcal{F}_x^i[\lambda, \mu]$ *le drapeau* $(V_j)_{1\leq j\leq n}$ *défini par*

$$V_j := \begin{cases} \mathrm{Vect}\{e_1, \cdots, e_j\} & j < i, \\ \mathrm{Vect}\{e_1, \cdots, e_{i-1}, \lambda e_i + \mu e_0\} & j = i, \\ \mathrm{Vect}\{e_0, \cdots, e_{j-1}\} & j > i. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que $\mathcal{F}_x = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_x^i$, *où on pose* $\mathcal{F}_x^i = \{\mathcal{F}_x^i[\lambda, \mu] | [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1\}$.

La proposition suivante est une étape essentielle:

Proposition 2.10 (cf. §4.3 et 4.5 de [Sl1])**.**

1. *Tous les fibres de* $\hat{J}_H^f$ *(, donc* J_f^r *aussi,) ont même type d'homotopie que* $\mathcal{B}_f$. *Donc, la représentation monodromique de* $\pi_1(\mathfrak{h}_r^*/W)$ *sur* $H^2(S_f(\overline{\lambda_0}), \mathbb{C})$ *induit une action de* W *sur* $H^2(\mathcal{B}_f, \mathbb{C})$.

2. *Le morphisme* $\iota^* : H^2(\mathcal{B}, \mathbb{C}) \longrightarrow H^2(\mathcal{B}_f, \mathbb{C})$ *induit de l'immersion fermée* $\iota : \mathcal{B}_f \hookrightarrow \mathcal{B}$ *est un isomorphisme linéaire* W*-équivariant.*

Par Corollaire 2.6, Proposition 2.10 et le diagramme (4), on voit que $P_{\widehat{\omega}_f}$ est un isomorphisme linéaire W-équivariant.

Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, soit $\hat{J}_{G,\lambda}^f$ la restriction de $\hat{J}_G^f$ à $\widehat{S}_f(\lambda)$. Vu le Corollaire 1.5 (cf. le diagramme (3)), pour $\lambda_0 \in \mathfrak{h}_r^*$, l'application $\hat{J}_{G,\lambda_0}^f : \widehat{S}_f(\lambda_0) \longrightarrow S_f(\overline{\lambda_0})$ est un isomorphisme analytique qui induit un isomorphisme:

$$(\hat{J}_{G,\lambda_0}^f)^{-1*} : H^2(\widehat{S}_f(\lambda_0), \mathbb{C}) \longrightarrow H^2(S_f(\overline{\lambda_0}), \mathbb{C}).$$

Définissons

$$\widehat{P} : \mathfrak{h}^* \longrightarrow H^2(S_f(\overline{\lambda_0}), \mathbb{C}); \quad \lambda \longmapsto (\hat{J}_{G,\lambda_0}^f)^{-1*} \circ (\Phi_{\lambda_0}^f)^{-1} \circ P_{\widehat{\omega}_f}(\lambda),$$

on obtient le théorème suivant:

Théorème 2.11 (cf. [Y])**.** *L'application des périodes* $\widehat{P} : \mathfrak{h}_r^* \longrightarrow H^2(S_f(\overline{\lambda_0}), \mathbb{C})$ *prolonge à l'isomorphisme linéaire* W*-équivariant*

$$P : \mathfrak{h}^* \longrightarrow H^2(S_f(\overline{\lambda_0}), \mathbb{C}).$$

A Rappel sur Période

Ici, on rappelle brièvement ce qu'on appelle la période (ou l'application période) en traitant une courbe elliptique et sa famille. Voir, e.g., [BK] pour le détail. Un petit rappel de la définition d'application des périodes sera aussi donné.

A.1 Une courbe

Soient $\omega_1,\ \omega_2 \in \mathbb{C}^*$ tels que $\omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{R}$ et $\Omega := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ un réseau dans $\mathbb{C}$.

Le tore complexe $\mathbb{C}/\Omega$ est une variété complexe analytique compacte, donc toute fonction holomorphe est constante. On sait que le corps de fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}/\Omega$ est engendré par la fonction elliptique définie ci-dessous et sa dérivée:

Définition A.1. *La* ***$\wp$-fonction de Weierstrass*** *de la période Ω est la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ définie par*

$$\wp(u) := \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Quelques propriétés fondamentales de cette fonction est donnée par la proposition suivante:

Proposition A.1. *1. La fontion $\wp(u)$ satisfait l'équation différentielle*

$$\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3,$$

où g_2 et g_3 sont les constants définis par

$$g_2 = 60 \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4}, \qquad g_3 = 140 \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6}.$$

2. $\wp'(u) = 0$ si et seulement si $u \in \frac{1}{2}\Omega \setminus \Omega$.

3. Le discriminant $\Delta := g_2^3 - 27g_3^2$ n'est jamais zéro.

Remarque A.1. *1. Pour $k \in \mathbb{Z}_{>1}$, la série*

$$G_{2k}(\omega_1, \omega_2) := \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^{2k}},$$

s'appelle une ***série d'Eisenstein****.*

2. Supposons que $\tau := \dfrac{\omega_2}{\omega_1} > 0$. La fonction

$$\left(\frac{2\pi}{\omega_1} \right)^{-12} \Delta = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n = q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24} = \eta(\tau)^{24}, \qquad q := e^{2\pi i \tau}.$$

La fonction $n \mapsto \tau(n)$ s'appelle la ***fonction de Ramanujan*** *et $\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ est la* ***fonction êta de Dedekind****.*

Une consequence géométrique de cette proposition est

Théorème A.2. *Le tore complexe $\mathbb{C}/\Omega$ est isomorophe à la courbe elliptique $\mathcal{E}_{g_2,g_3}$ lisse dans $\mathbb{P}^2 = \{[x, y, t]\}$ définie par*

$$y^2t = 4x^3 - g_2xt^2 - g_3t^3 \qquad \textit{(la forme normale de Weierstrass)}$$

associant $z + \Omega \in \mathbb{C}/\Omega$ à $[\wp(z), \wp'(z), 1]$ pour $z \notin \Omega$ et à $[0, 1, 0]$ pour $z \in \Omega$.

Ici, se pose deux questions suivantes:

1. Soit $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ tels que $\Delta := g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. Existe-t-il un tore complexe $\mathbb{C}/\Omega$ qui est isomorphe à la courbe elliptique $\mathcal{E}_{g_2,g_3}$? Et, si oui,
2. comment peut-on retrouver le tore $\mathbb{C}/\Omega$?

La réponse de la première question est affirmative. La clef est la **fonction modulaire**

$$J(\tau) := \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{1}{12^3}\left[\frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \cdots\right]$$

définie sur le Poincaré demi-plan $\mathcal{P}$ qui a les propriétés suivantes:

Proposition A.3. *1. $J(\tau)$ est $PSL(2, \mathbb{Z})$-invariante.*

2. $J(\tau)$ donne un isomorphisme entre $PSL(2, \mathbb{Z})\backslash\mathcal{P}$ et $\mathbb{C}$.

La deuxième question est le **problème d'inversion de Jacobi**.

Rappelons que la $\wp$-fonction nous donne un revêtement double $\mathbb{C}/\Omega \longrightarrow \mathbb{P}^1$ avec les ramifications $\frac{1}{2}\Omega/\Omega$ et pour tout $u \in \mathbb{C}$, on a (cf. Proposition A.1)

$$\int_{\infty}^{\wp^{-1}(u)} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} \equiv u \mod \Omega.$$

Par le fait que $\{\wp(\gamma)|\gamma \in \frac{1}{2}\Omega \setminus \Omega\}$ est les racines de $4X^3 - g_2X - g_3$, on peut retrouver la moitié de la période de cette courbe.

La forme $\dfrac{dx}{y}$ est une forme différentiel abeliènne de la première espèce et il est naturel d'interpréter l'intégrale ci-dessus comme l'application

$$\int \frac{dx}{y} : H_1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \Omega; \quad [\sigma] \longmapsto \int_\sigma \frac{dx}{y}.$$

Autrement dit, fixant un point $p_0 \in \mathcal{E}_{g_2,g_3}$, on a l'application

$$\int_{p_0} \frac{dx}{y} : \mathcal{E}_{g_2,g_3} \longrightarrow \mathbb{C}/\Omega; \quad p \longmapsto \int_{p_0}^{p} \frac{dx}{y},$$

qui nous permet de retrouver le tore complexe $\mathbb{C}/\Omega$, c'est la **variété jacobienne** de $\mathcal{E}_{g_2,g_3}$.

A.2 Une famille

Après un changement de variables, on voit qu'une courbe ellpitique lisse s'écrit comme

$$\mathcal{C}_\lambda := \{[x,y,t] | y^2 t = x(x-t)(x-\lambda t)\} \qquad \text{(la forme normale de Legendre)}$$

où $\lambda \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$. Ici, on considère la famille

$$\mathcal{C} := \bigcup_{\lambda \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}} \mathcal{C}_\lambda \longrightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\},$$

en particulier, on étudie la variation de la période. Remarquons qu'une relation entre λ et la période est donnée par

$$\lambda = \lambda(\tau) := \left[\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right), \infty\right] = \frac{\wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right) - \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}{\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)},$$

où $[a,b,c,d] := \dfrac{b-c}{b-a} \cdot \dfrac{d-a}{d-c}$ pour $a,b,c,d \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est le birapport, et que la fonction modulaire $J(\tau)$ peut s'écrire comme

$$J(\tau) = \frac{4}{27} \cdot \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2 (\lambda - 1)^2}.$$

(Cette expression est invariante sous l'action de $\mathfrak{S}_3$ engendré par $\lambda \mapsto \dfrac{1}{\lambda}$ et $\lambda \mapsto 1 - \lambda$.) La proposition suivante est importante:

Proposition A.4. *1. La fonction $\lambda(\tau)$ est $\Gamma(2)$-invarinate, où $\Gamma(2) := \mathrm{Ker}[SL(2,\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow SL(2,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})]$ est un sous-groupe d'indice 6 de $SL(2,\mathbb{Z})$.*

2. $\lambda(\tau)$ donne un isomorphisme entre $\Gamma(2)\backslash\mathcal{P}$ et $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$.

Fixons $\lambda_0 \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$, soient $a(\lambda_0), b(\lambda_0) \in H_1(C_{\lambda_0}, \mathbb{Z})$ 1-cycles tournant λ_0 et 0 (, λ_0 et 1, respectivement.). Pour tout $\lambda \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$, soient $a(\lambda), b(\lambda) \in H_1(C_\lambda, \mathbb{Z})$ 1-cycles qui sont homologues à $a(\lambda_0)$ (, $b(\lambda_0)$, repsectivement) via un homéomorphisme $\mathcal{C}_\lambda \to \mathcal{C}_{\lambda_0}$. Pour $\sigma \in \{a(\lambda), b(\lambda)\}$, l'intégral

$$\int_\sigma \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}}$$

est une fonction holomorphe sur tout disque contenu dans $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ et elle sont des solutions de l'**équation de Picard et Fuchs**:

$$\lambda(1-\lambda)\frac{d^2F}{d\lambda^2} + (1-2\lambda)\frac{dF}{d\lambda} - \frac{1}{4}F = 0. \tag{5}$$

Cette équation est un cas particulier de l'**équation hypergéométrique de Gauss** et ses solutions possède 3 singularités régulières en $\lambda = 0,1,\infty$. Donc, en fixant une base de l'espace de solutions de (5), on obtient la **représentation monodromique**

$$\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}, *) \longrightarrow GL(2,\mathbb{C}).$$

Le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}, *)$ est isomorphe au groupe libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, de plus, on a la proposition suivante:

Proposition A.5. *ρ est injective et* $\mathrm{Im}\rho = \Gamma(2)$.

Remarque A.2. *L'action de $\pi_1(\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\},\lambda)$ peut être définie sur $H_1(\mathcal{C}_\lambda,\mathbb{C})$, calculée par la **formule de Picard et Lefschetz**. Cette action est aussi fidèle.*

Explicitement, on a l'expression suivante:

$$\int_{a(\lambda)} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}} = c_2F_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;\lambda),$$
$$\int_{b(\lambda)} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}} = -ic_2F_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;1-\lambda),$$

où $c \in \mathbb{C}^*$ est une constante et ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$ est la **fonction hypergéométrique de Gauss**, le prolongement analytique de la fonction définie par la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n} z^n,$$

où on pose $(x)_n := x(x+1)\cdots(x+n-1)$. Voici le dernier énoncé de cette note:

Corollaire A.6. *La courbe elliptique $\mathcal{C}_\lambda$ est isomorphe au tore complexe $\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$, où $\tau \in \mathcal{P}$ est donné par*

$$\tau = i \cdot \frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;\lambda\right)}{{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;1-\lambda\right)}.$$

A.3 Généralisation

Soit X une variété kählérienne compacte et $\phi : \mathcal{X} \longrightarrow S$ une famille de déformations de X. Ici, on suppose que $\dim F^pH^k(\mathcal{X}_s,\mathbb{C})$ ne dépend pas de $s \in S$ (on la note $b^{p,k}$), où

$$F^pH^k(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{\substack{r+q=k \\ r\geq p}} H^{r,q}(X), \qquad H^{r,q}(X) \cong H^q(X,\Omega_X^r),$$

est la **filtration de Hodge**, et Ω_X^r est le faisceau de p-formes différentielle holomorphe.

Supposons que S est connexe par arc et fixons $s_0 \in S$. Un lacet de base s_0 induit un homéomorphisme sur le fibre de $R^k\phi_*\mathbb{Z}$ qui est compartible avec cup-produits. En particulier, si X est de dimension complexe n, le cup-produit induit la forme d'intersection $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $(R^n\phi_*\mathbb{Z})_{s_0} = H^n(\mathcal{X}_{s_0},\mathbb{Z})$ par la **dualité de Poincaré**. Ceci induit une représentation monodromique

$$\pi_1(S,s_0) \longrightarrow (H^n(\mathcal{X}_{s_0},\mathbb{Z}),\langle\cdot,\cdot\rangle).$$

Pour un espace vectoriel V sur $\mathbb{C}$ et un entier $0 < k < \dim V$, on note $\mathrm{Gr}(k,V)$ la **variété k-grassmanienne de V**.

Définition A.2. *Une **application des périodes** est l'application*

$$\mathcal{P}^{p,k} : S \longrightarrow \mathrm{Gr}(b^{p,k},H^k(X,\mathbb{C})),$$

associant $s \in S$ à $F^pH^k(\mathcal{X}_s,\mathbb{C}) \subset H^k(\mathcal{X}_s,\mathbb{C}) \cong H^k(X,\mathbb{C})$.

On sait que cette application est holomorphe sur un disque dans S. Pour le détail, voir, e.g., [CMP] ou [V].

Références Bibliographiques

[B] E. Brieskorn, *Singular elements of semisimple algebraic groups*, Actes Congrès Intern. Math. **2**, (1970), 279–284.

[BH] A. Borel et F. Hirzebruch, *Characteristic classes and homogeneous spaces I*, Amer Jour. Math. **80**, (1958), 458–538.

[BK] E. Brieskorn et H. Knörrer, *Ebene algebraische Kurven*, Birkhäuser, Boston, (1981), 964 pp., *traduit en anglais*, par John Stillwell, *Plane Algebraic Curves*, (1986), 721 pp.

[CMP] J. Carlson, S. Müller-Stach et C. Peters, *Period mappings and Period Domains*, Cambr. Stud. Adv. Math., **85**, Cambridge, 2003.

[CS] H. Cassens et P. Slodowy, *Kleinian Singularities and Quivers*, in Progr. Math. **162**, Birkhäuser Verlag, Basel, (1998), 263–288.

[D] A. H. Durfee, *Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points*, L'Enseign. Math. **25** (2), (1979), 131–163.

[DuV] P. Du Val, *On isolated singularities of surfaces which do not affect the conditions of adjunction I, II, III*, Proc. Cambr. Phil. Soc. **30**, (1934), 453–465, 483–491.

[K] B. Kostant, *Lie group representations on polynomial rings*, Amer. Jour. Math. **85**, (1963), 327–404.

[Sa] K. Saito, *Period mapping associated to a primitive form*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **19**, (1983), 1231–1264.

[Sl1] P. Slodowy, *Four lectures on Simple Groups and Simple Singularities*, Comm. Math. Inst. Rijksuniversiteit, Utrecht, 1980.

[Sl2] P. Slodowy, *Simple Singularities and Simple Algebraic Groups*, Lect. Notes Math. **815**, Springer, 1980.

[Sp] T. A. Springer, *The unipotent variety of a semisimple group*, Proc. Bombay Colloq. Alg. Geom., ed. S. Abhyankar, London, Oxford Univ. Press, (1969), 373–391.

[St] R. Steinberg, *Conjugacy classes in algebraic groups*, Lect. Notes in Math. **366**, Springer, 1974.

[V] C. Voisin, *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I, II*, Cambr. Stud. Adv. Math., **76**, 2002 et **77**, 2003, Cambridge.

[Y] H. Yamada, *Lie group theoretic construction of period mapping*, Math. Z. **220**, (1995), 231–255.