COHOMOLOGIE EQUIVARIANTE : G* AND W* ALGEBRES.

1 Introduction

Le but de cet exposé était de présenter les résultats des premiers chapitres du livre de Victor W.Guillemin et Shlomo Sternberg : “Supersymmetry and Equivariant de Rham Theory”, résultats dûs en grande partie à Henri Cartan.

Soit M une variété et G un groupe de Lie compact qui agit sur M. Si l'action de G est libre, l'espace quotient $X = M/G$ est une variété et la cohomologie équivariante de M est définie comme la cohomologie de la variété X. Par contre si l'action n'est pas libre, l'espace quotient X peut être plus pathologique. Une solution est de remplacer M par $M \times E$ où E est un espace contractile sur lequel G agit librement et de définir la cohomologie équivariante de M comme $H^*_G(M) = H^*((M \times E)/G)$. En effet, on peut montrer que d'une part l'espace $H^*((M \times E)/G)$ est bien défini car indépendant de E et d'autre part, qu'il coïncide avec $H^*(X)$ lorsque l'action de G est libre.

Une autre possibilité pour calculer la cohomologie équivariante de M consiste à déterminer celle-ci directement à partir de la cohomologie de De Rham $H^*(M)$ de la variété. Lorsque l'action du groupe est libre, la cohomologie équivariante correspond à la cohomologie du sous-complexe des formes horizontales invariantes. Dans le cas où l'action du groupe ne serait pas libre, on cherche à déterminer quel pourrait-être l'équivalent “algébrique” de la construction précédente.

La première idée est de regarder l'algèbre des formes différentielles $\Omega(M \times E)$, où E est un espace contractile sur lequel G agit librement, et à l'approximer dans un premier temps par la sous algèbre $\Omega(M) \bigotimes \Omega(E)$. La première difficultée est que E est généralement de dimension infinie, ce qui complique alors la définition de $\Omega(E)$. L'idée est alors d'essayer de lui trouver un équivalent algébrique simple : les G^*-algèbres, définies à partir de certaines propriétés de l'action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\Omega(M)$.

On peut alors définir la cohomologie équivariante de M comme la cohomologie, en tant que G^*-algèbre, du complexe des éléments basiques de $\Omega(M) \bigotimes A$, où A est une G^*-algèbre avec certaines propriétés. Un des candidats possibles pour l'algèbre A est l'algèbre de Weil de $\mathfrak{g}^*$. Ceci devrait nous conduire aux notions de W^*-modules et au modèle de Weil, ainsi qu'à un modèle équivalent : le modèle de Cartan.

2 G^*-modules et G^*-algèbres

2.1 Rappels

Soit Mune variété et G un groupe de Lie qui agit sur M.

L'action de G sur M induit une action de G sur $\Omega(M)$:

$$\forall g \in G \subset Diff(M), \forall \omega \in \Omega(M), g.\omega = (g^{-1})^*(\omega)$$

.

L'action infinitésimale correspondante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe G sur $\Omega(M)$ s'écrit :

$$\forall \xi \in \mathfrak{g}, L_\xi(\omega) = \frac{d}{dt}((exp(-t\xi)^*(\omega)) \mid_{t=0}$$

On peut remarquer que L_ξ est une dérivation d'ordre 0 (et donc paire), càd $L_\xi : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$ et $L_\xi(\mu\nu) = L_\xi(\mu)\nu + \mu L_\xi(\nu), \forall \mu, \nu \in \Omega(M)$.

De plus chaque vecteur ξ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ définit le champs de vecteur sur M suivant : $\xi_M(x) = \frac{d}{dt}((exp(-t\xi)(x)) \mid_{t=0}$. On peut alors définir la dérivation de degrè -1 (et donc impaire) suivante : $\iota_\xi : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M), \iota_\xi(\omega) = \iota_{\xi_M}(\omega)$, (où le ι de droite représente la contraction de la forme différentielle par le champs de vecteur ι_{ξ_M}).

Enfin, l'algèbre $\Omega(M)$ est munie d'une autre dérivation impaire mais de degrè $+1$; il s'agit de la différenciation extérieure : $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$.

Soit $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ une base de $\mathfrak{g}$ et c_{ij}^k les constantes de structure associées, càd $[\xi_i, \xi_j] = c_{ij}^k \xi_k$. On notera ι_i et L_i respectivement les dérivations ι_{ξ_i} et L_{ξ_i}.

On a alors les relations de (super)commutation suivantes :

$[\iota_i, \iota_j] = 0$
$[L_i, \iota_j] = c_{ij}^k \iota_k$
$[L_i, L_j] = c_{ij}^k L_k$
$[d, \iota_i] = L_i$
$[d, L_i] = 0$
$[d, d] = 0$

Si l'on note $\mathfrak{g}_{-1} = Vect(\iota_i)$, $\mathfrak{g}_0 = Vect(L_i)$, $\mathfrak{g}_1 = Vect(d)$, alors le superespace $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ muni des relations de commutation précédentes est une super-algèbre de Lie.

2.2 De la géométrie à l'algèbre

Les considérations précédentes nous amènent à la définition suivante :

Définition 1

Une G^*-algèbre A est une superalgèbre commutative munie d'une représentation $\rho : G \to Aut(A)$ et d'une action de $\tilde{\mathfrak{g}}$ comme (super)dérivations de A telles que :

1. $\forall \xi \in \mathfrak{g}, \frac{d}{dt}((exp(-t\xi)^*(\omega)) \mid_{t=0} = L_\xi(\omega)$
2. $\forall a \in G, \forall \xi \in \mathfrak{g}, \rho(a) L_\xi \rho(a^{-1}) = L_{Ad_a \xi}$
3. $\forall a \in G, \forall \xi \in \mathfrak{g}, \rho(a) \iota_\xi \rho(a^{-1}) = \iota_{Ad_a \xi}$
4. $\forall a \in G, \forall \xi \in \mathfrak{g}, \rho(a) d \rho(a^{-1}) = d$

Un G^*-module A est un superespace muni d'une représentation $\rho : G \to Aut(A)$ et d'une représentation linéaire de $\mathfrak{g}$ sur A qui vérifient les quatres conditions ci-dessus.

Les quatres relations assurent une certaine cohérence entre l'action du groupe G et celle de l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$. Elles sont bien entendues vérifiées dans le cas où $A = \Omega(M)$ ce qui fait de $\Omega(M)$ le premier exemple de G^*-algèbre.

Remarque 1 *Si le groupe G est connexe la première relation implique les trois suivantes.*

Exemple 1

Soit G un groupe de Lie, l'algèbre extérieure $\Lambda(\mathfrak{g}^*)$ du dual de de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est une G^*-algèbre de la manière suivante.

Le groupe G agit sur lui-même à gauche donc $\Omega(G)$ est une G^*-algèbre comme toute algèbre des formes extérieures d'une variété sur laquelle G agit.

On peut inclure $\Lambda(\mathfrak{g}^*)$ dans $\Omega(G)$ comme l'algèbre des formes invariantes à droite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathfrak{g}^*) &\hookrightarrow \Omega(G) \\ \omega &\mapsto \tilde{\omega} \end{aligned} \qquad \text{avec} \quad \forall g \in G, \forall X \in T_g G, \tilde{\omega}(g)(X) = \omega(R_{g^{-1}} X).$$

Il suffit donc de montrer que $\Lambda(\mathfrak{g}^*) \subset \Omega(G)$ est une algèbre stable par les actions de G et $\tilde{\mathfrak{g}}$. Soit $g' \in G$, $g'.\tilde{\omega} = (L_{g'^{-1}}^*)(\omega)$.

$(g'.\tilde{\omega})(g)(X)$
$= \tilde{\omega}(g'^{-1}g)(L_{g'^{-1}}X)$
$= \omega(R_{g^{-1}g'}L_{g'^{-1}}X)$
$= \omega(R_{g'}R_{g^{-1}}L_{g'^{-1}}X)$
$= \omega(R_{g'}L_{g'^{-1}}R_{g^{-1}}X)$
$= \omega(Ad_{g'^{-1}}(R_{g^{-1}}X))$
$= (Ad^*_{g'^{-1}}\omega)(R_{g^{-1}}X)$
$= (\widetilde{Ad^*_{g'^{-1}}\omega})(g)(X)$
donc $g'.\tilde{\omega} = (\widetilde{Ad^*_{g'^{-1}}\omega})$.

Ainsi l'action du groupe G sur $\Lambda(\mathfrak{g}^*) \subset \Omega(G)$ est en fait simplement l'action co-adjointe : $\forall g \in G, \forall \omega \in \Lambda(\mathfrak{g}^*), g.\omega = (Ad^*_{g'^{-1}}\omega)$.

Et puisque l'action de $\mathfrak{g}_0$ est l'action infinitésimale de G en l'identité, $\frac{d}{dt}((exp(-t\xi)^*(\omega))\,|_{t=0}= L_\xi(\omega)$, *on a* $\mathfrak{g}_0.(\Lambda(\mathfrak{g}^*)) \subset \Lambda(\mathfrak{g}^*)$.

Si $\xi_1, \cdots, \xi_n$ est une base de $\mathfrak{g}$, et $\theta^1, \cdots, \theta^n$ la base duale de $\mathfrak{g}^*$, càd $\theta^j(\xi_i) = \delta_i^j$, on a :
$L_i\theta^j(\zeta) = \frac{d}{dt}(exp(-t\xi_i).\theta^j)(\zeta) = \theta^j(-[\xi_i, \zeta]) = -c^j_{ik}\zeta^k$ *càd* $L_i\theta^j = -c^j_{ik}\theta^k$.

Soit $\xi \in \mathfrak{g}$. Le champs de vecteurs associé est $\xi_G(g) = \frac{d}{dt}exp(-t\xi)(g)\,|_{t=0}= -R_g(\xi)$ et ainsi ξ_G est un champs de vecteurs invariant à droite. La forme $\iota_\xi.\omega = \iota_{\xi_G}\omega, \omega \in \Lambda(\mathfrak{g}^*)$ est donc encore invariante à doite et ainsi $\mathfrak{g}_{-1}.(\Lambda(\mathfrak{g}^*)) \subset \Lambda(\mathfrak{g}^*)$.

La dérivation extérieure d commute avec l'action de G donc $d(\Lambda(\mathfrak{g}^*)) \subset \Lambda(\mathfrak{g}^*)$.

Finalement, $\Lambda(\mathfrak{g}^*)$ est bien une G^*-algèbre !

On peut d'efinir la catégorie des G^*-algèbres/modules en définissant les morphismes de G^*-algèbres/modules de la manière suivante :

Définition 2

Soient A et B deux G^*-algèbres/modules. Une application $f : A \to B$ est un morphisme de G^*-algèbres/modules si f est un morphisme d'algèbres/modules et si :
$\forall a \in G, \forall \xi \in \mathfrak{g}$,

1. $[\rho(a), f] = 0$
2. $[L_\xi, f] = 0$
3. $[\iota_\xi, f] = 0$
4. $[d, f] = 0$

Il reste maintenant à retranscrire les propriétées de l'espace E dans le cas des G^*-algèbres, à savoir que E est un espace contractile et que l'action du groupe G sur E est libre.

2.3 Acyclicitée

Si A est une G^*-algèbre, A est une algèbre graduée munie de la dérivation d d'ordre -1 telle que $d^2 = 0$. On peut donc considérer les groupes de cohomologie $H^k(A) = H^k(A, d)$.

Dans le cas d'un espace contractile E de dimension finie, l'algèbre des formes différentielles sur E est acyclique, càd que sa cohomologie de De Rham est donnée par :
$H^k_{DR}(E) = \begin{cases} \mathbb{R} \text{ } si \text{ } k = 0 \\ 0 \text{ } si \text{ } k \neq 0 \end{cases}$ avec $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On dira alors qu'une G^*-algèbre A est acyclique si sa cohomologie est de la forme :
$H^k(A) = \begin{cases} \mathbb{F} \text{ } si \text{ } k = 0 \\ 0 \text{ } si \text{ } k \neq 0 \end{cases}$.

2.4 G^*-algèbres de type C

Vérifier que l'action d'un groupe G sur un espace E est libre est généralement chose difficile.

Une possibilité pour affaiblir cette notion est de seulement demander à ce que l'action soit libre à un niveau infinitésimal : c'est la notion de localement libre.

Définition 3

L'action d'un groupe de Lie G sur un espace E est localement libre si :

$\forall x \in E, \forall \xi \in \mathfrak{g}, \xi \neq 0,\ \xi_E(x) \neq 0.$

Remarque 2 *Si l'action est libre alors elle est localement libre...*

Proposition 1

L'action d'un groupe de Lie G sur E est localement libre ssi $\exists \theta_1, \cdots, \theta_n \in \Omega^1(E)$ telles que $\iota_i\theta^j = \delta_i^j$.

L'existence de ces n 1-formes permet de décomposer le fibré cotangent en une somme directe $T^*(E) = Vect(\theta^i) \bigoplus H(E)$, où $H(E)$ est le sous-fibré des formes horizontales, càd $H(E) = \{\omega \in \Omega^1(E) \mid \forall \xi \in \mathfrak{g}, \iota_\xi\omega = 0\}$.

Dans le cas où le groupe G agit librement sur E, $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ E/G \end{array}$ est un fibré principal. Le choix d'une connexion, càd d'un élément $\theta = \theta^i \otimes \xi_i \in \Omega(E) \bigotimes \mathfrak{g}$ avec $\iota_{\xi_j}\theta^i = \delta_j^i$ permet une décomposition similaire du fibré cotangent. De plus, l'espace engendré par les θ^i est G-invariant : c'est une propriétée que l'on aimerait conserver. Ce qui nous amène à la définition suivante :

Définition 4

*Une G^*-algèbre A est dite de type **(C)** si il existe $\theta_1, \cdots, \theta_n \in A_1$ appelés éléments de connection, tels que $\iota_j\theta^i = \delta_j^i$ et $C = Vect(\theta^i)$ soit G-invariant.*

Remarque 3

1. *La propriétée de G-invariance se traduit au niveau infinitésimal par $L_i\theta^j = -c_{ik}^j\theta^k$*

   Preuve 1

   $0 = L_i\delta_k^j = L_i\iota_k\theta^j = ((L_i\iota_k - \iota_k L_i) + \iota_k L_i)\theta^j = c_{ik}^b\iota_b\theta^j + \iota_k L_i\theta^j = c_{ik}^j + \iota_k L_i\theta^j$

   $\Rightarrow L_i\theta^j = -c_{ik}^j\theta^k + \omega_i^j$ *avec* ω_i^j *horizontal. Or* C *est* G*-invariant donc* $L_i\theta^j \in C$ *et donc* $\omega_i^j = 0$

   Si le groupe G est connexe, on a alors l'équivalence :

   C est G-invariant $\Leftrightarrow L_i\theta^j = -c_{ik}^j\theta^k$

2. *Si G est compact, être une G^*-algèbre de type **(C)** se restreint à la condition d'existence de $\theta_1, \cdots, \theta_n \in A_1$ tels que $\iota_j\theta^i = \delta_j^i$ car en moyennant ces éléments au moyen de la mesure de Haar, on obtient de nouveaux éléments $\theta'_1, \cdots, \theta'_n \in A_1$ tels que $\iota_j\theta'^i = \delta_j^i$ tels que $C = Vect(\theta'^i)$ soit G-invariant.*

Proposition 2 *Si A est une G^*-algèbre et B une G^*-algèbre de type **(C)** alors $A \bigotimes B$ est une G^* algèbre de type **(C)** avec éléments de connexion $1 \otimes \theta_B^i$.*

Remarque 4 *Si A et B sont deux G^*-algèbres, $A \bigotimes B$ est une G^* algèbre avec $d_{A \bigotimes B} = d_A \otimes 1 + 1 \otimes d_B$, $L_\xi = L_\xi \otimes 1 + 1 \otimes L_\xi$ et $\iota_\xi = \iota_\xi \otimes 1 + 1 \otimes \iota_\xi$.*

2.5 Sous complexe basique

Dans le cas où l'action du groupe G sur la variétée M est libre, la cohomologie équivariante est la cohomologie du sous complexe $\pi^*(\Omega(X)) \subset \Omega(M)$ des formes basiques, avec $\pi : M \to X = M/G$.

Ces formes basiques ont deux propriétées caractéristiques :

1. Elles sont G-invariantes. Si G est connexe, la propriétée de G-invariance est équivalente à $L_\xi\omega = 0$, $\forall \omega \in \pi^*(\Omega(X)), \forall \xi \in \mathfrak{g}$.
2. Elles sont horizontales, càd $\forall \xi \in \mathfrak{g},\ \iota_\xi = 0$.

Les éléments basiques d'une G^*-algèbre A sont alors définis de la manière suivante.

Définition 5
Soit A une G^*-algèbre. On définit l'ensemble des éléments basiques de A comme $A_{bas} = \{a \in A \mid a \texttt{ est } G \texttt{ invariant et } \iota_\xi\omega = 0, \forall \xi \in \mathfrak{g}\}$

Il reste à montrer que A_{bas} est bien un sous-complexe de A.
Tout d'abord, A_{bas} hérite de la $\mathbb{Z}$ graduation de A. Il reste à montrer que $dA_{bas} \subset A_{bas}$.
Soit $a \in A_{bas}$ et $\xi \in \mathfrak{g}$. L'action de d et de G commutent donc da est encore G invariant. $\iota_\xi da = -L_\xi a - d\iota_\xi a = -0 - 0 = 0$ (car a G-invariant $\Rightarrow L_\xi a = 0$).
Donc on a bien : $dA_{bas} \subset A_{bas}$ et on note $H_{bas}(A) = H(A_{bas}, d)$.

2.6 Cohomologie équivariante d'une G^*-algèbre

Définition 6
Soit A une G^*-algèbre.
*La cohomologie équivariante de A est l'algèbre : $H_G(A) = H_{bas}(A \bigotimes E) = H((A \bigotimes E)_{bas}, d)$, où E est une G^*-algèbre acyclique de type **(C)**.*

Pour que cette définition ait un sens, il y a deux choses à vérifier.

1. La définition est bien indépendante de la G^*-algèbre acyclique de type **(C)** E.
2. Il existe bien au moins un tel E.

C'est ceux à quoi s'attachent les prochaines parties. On verra tout d'abord qu'un premier candidat pour E est l'algèbre de Weil $W(\mathfrak{g}^*)$ ce qui nous mènera à la notion de W^*-algèbre, qui nous permettra de démontrer que la définition est bien indépendante de E.
Bien entendu, on a le théorème suivant que l'on se contentera ici d'énoncer.

Théorème 1
Soit G un groupe de Lie compact qui agit sur une variété M, alors $H_G^*(M) = H_G(\Omega(M))$.
Autrement dit la cohomologie équivariante de la variété M est égale à la cohomologie équivariante en tant que G^*-algèbre de l'algèbre des formes différentielles de la variété M.

3 W^*-algèbres, modèles de Weil et de Cartan

3.1 L'algèbre de Weil et les W^*-algèbres

L'algèbre de Weil est simplemement l'algèbre de Koszul du dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Plus précisément, soient $\Lambda(\mathfrak{g}^*)$ l'algèbre extérieure de $\mathfrak{g}^*$ munie de sa graduation habituelle et $S(\mathfrak{g}^*)$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}^*$ munie de sa graduation d'algèbre supercommutative càd, si $x \in S^k(\mathfrak{g}^*)$ alors le degré de x vaut $2k$.

Définition 7 *L'algèbre de Weil est l'algèbre $W(\mathfrak{g}^*) = \Lambda(\mathfrak{g}^*) \bigotimes S(\mathfrak{g}^*)$.*

Soit $\theta'^1, \cdots, \theta'^n$ une base de $\mathfrak{g}^*$, l'algèbre $W(\mathfrak{g}^*)$ est engendrée par les éléments $\theta^i := \theta'^i \otimes 1 \in \Lambda^1 \bigotimes S^0$ et $z^i := 1 \otimes \theta'^i \in \Lambda^0 \bigotimes S^1$. On peut remarquer que $d^\circ(\theta^i) = 1$ et que $d^\circ(z^i) = 2$.
Le but de cette partie est de montrer que l'algèbre de Weil est une G^*-algèbre acyclique de type **(C)** et donc un candidat simple pour calculer la cohomologie équivariante d'une G^*-algèbre.
Tout d'abord, l'algèbre de Weil munie de l'opérateur de Koszul d_K est une algèbre différentielle graduée. L'opérateur d_K que l'on notera simplement d dans la suite est une dérivation impaire de degrè 1, telle que $d^2 = 0$ et définie sur les éléments générateurs par $d(\theta^i) = z^i$ et $d(z^i) = 0$.
On peut introduire la dérivation Q de degrè -1 définie par $Q(\theta^i) = 0$ et $Q(z^i) = 0$. On a alors $Q^2 = 0$ et $[Q, d] = id$ sur les générateurs. Comme $[Q, d]$ est une dérivation paire, on a que $[Q, d]_{|\Lambda^k \otimes S^l} = (k + l)id$ ce qui entraine que (W, d) est une algèbre acyclique.

L'action du groupe G sur $\mathfrak{g}^*$ et donc sur $\Lambda(\mathfrak{g}^*)$ est l'action co-adjointe. On vérifie que d est G-équivariante : soit $g \in G$, $g.\theta^i \in \Lambda^1 \bigotimes S^0$ donc $d(g.\theta^i) = g.z^i = g.d\theta^i$ et $g.z^i \in \Lambda^0 \bigotimes S^1$ donc $d(g.z^i) = 0 = g.dz^i$.

On en déduit l'action de $\mathfrak{g}_0$ sur $\Lambda(\mathfrak{g}^*)$, qui s'écrit sur les générateurs : $L_i\theta^j = -c^j_{ik}\theta^k$ et $L_iz^j = -c^j_{ik}z^k$.

Les relations de commutation $[L_i, L_j] = c^k_{ij}L_k$, $[d, L_i] = 0$ sont bien vérifiées. En effet, d'une part, $[L_i, L_j]\theta^k = c^l_{im}c^k_{jl}\theta^m - c^l_{jm}c^k_{il}\theta^m = -c^l_{ij}c^k_{lm}\theta^m = c^l_{ij}L_l\theta^k$ (où l'on a utilisé la relation de Jacobi dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$) et $[L_i, L_j]z^k = c^l_{im}c^k_{jl}z^m - c^l_{jm}c^k_{il}z^m = -c^l_{ij}c^k_{lm}z^m = c^l_{ij}L_lz^k$.

Et d'autre part, $[d, L_i] = 0$ car d est G-équivariante.

Il reste à déterminer l'action de $\mathfrak{g}_1$ sur $\Lambda(\mathfrak{g}^*)$.

On peut déjà remarquer que l'action du groupe G préserve la graduation et donc que $Vect(\theta^i) = \Lambda^1 \bigotimes S^0$ est invariant par l'action de G. Les éléments θ^i sont alors de bons candidats pour être des éléments de connection : il suffit d'imposer l'action de $\mathfrak{g}_1$ sur ces éléments en prenant $\iota_j\theta^i = \delta^i_j$ et de vérifier qu'il n'y a pas de contradiction avec les actions précédentes.

La relation $[d, \iota_i] = L_i$ appliquée aux éléments θ^j permet de déterminer l'action de $\mathfrak{g}_{-1}$ sur les éléments z^j. En effet, $\iota_jz^i = \iota_jd\theta^i = L_j\theta^i - d\iota_j\theta^i = -c^i_{jk}\theta^k - 0 = -c^i_{jk}\theta^k$.

Et ainsi $[d, \iota_i]z^k = -c^k_{il}z^l + \iota_i 0 = L_iz^k$.

Puis, $[\iota_i, \iota_j]z^k = \delta^l_ic^k_{jl} + \delta^l_jc^k_{il} = c^k_{ij} + c^k_{ji} = 0$ et $[\iota_i, \iota_j]\theta^k = 0$.

Enfin $[L_i, \iota_j]\theta^k = L_i(\delta^k_j) - (-\delta^l_jc^k_{il}) = c^l_{ij}\iota_l\theta^k$ et $[L_i, \iota_j]z^k = c^l_{im}c^k_{jl}\theta^m - c^l_{jm}c^k_{il}\theta^m = c^l_{ij}(-c^k_{lm}\theta^m) = c^l_{ij}\iota_mz^k$.

Ainsi, $W(\mathfrak{g}^*)$ est une G^*algèbre acyclique de type **(C)**.

Dans la suite, cette G^*-algèbre va jouer un rôle capital puisqu'elle va nous permettre de montrer que la définition de la cohomologie équivariante d'une G^*-algèbre est bien définie indépendamment du choix de la G^*-algèbre E choisie.

L'idée est que dans un sens $W(\mathfrak{g}^*)$ est la plus “simple” des G^*-algèbre acyclique de type **(C)**.

Proposition 3

$$W(\mathfrak{g}^*) = \Lambda(\mathfrak{g}^*) \bigotimes W_{hor}$$

Preuve 2

L'idée de la démonstration est que $W_{hor} \approx S(\mathfrak{g}^*)$.

Les éléments z^i *ne sont pas horizontaux puisque* $\iota_jz^i = -c^i_{jk}\theta^k$. *Mais les éléments* $\mu^i = z^i + \frac{1}{2}c^i_{jk}\theta^j\theta^k \in W^2(\mathfrak{g}^*)$ *eux le sont :* $\iota_j\mu^i = 0$.

Puisque θ^i *et* z^i *engendrent* $W(\mathfrak{g}^*)$ *et que* $z^i = \mu^i - \frac{1}{2}c^i_{jk}\theta^j\theta^k$, θ^i *et* μ^i *engendrent* $W(\mathfrak{g}^*)$. *Donc* $W(\mathfrak{g}^*) = \Lambda(\mathfrak{g}^*) \bigotimes \mathbb{F}[\mu_1, \cdots, \mu_n]$.

Tout élément de $W(\mathfrak{g}^*)$ *s'écrit comme une somme de termes de la forme* $\theta_{i_1}\cdots\theta_{i_k}\otimes\mu_{j_1}\cdots\mu_{j_l} \in \Lambda^k(\mathfrak{g}^*) \bigotimes (\mathbb{F}[\mu_1, \cdots, \mu_n])^l$. . *Maintenant* $\iota_j(\theta_{i_1}\cdots\theta_{i_k} \otimes \mu_{j_1}\cdots\mu_{j_l}) = \iota_j(\theta_{i_1}\cdots\theta_{i_k}) \otimes \mu_{j_1}\cdots\mu_{j_l}$.

Les termes $\iota_j(\theta_{i_1}\cdots\theta_{i_k})$ *ne se compensent pas. Soit, ils sont nul si un des indices* i_m *vaut* j, *soit ils correspondent au signe près au même terme où le coefficient* θ^j *a été omis. Donc des termes qui s'annuleraient après action de* ι_j *s'annulaient déjà avant. Ainsi un élément* ω *de* $W(\mathfrak{g}^*)$ *est horizontal ssi* $\omega \in \mathbb{F}[\mu_1, \cdots, \mu_n]$, *càd* $W_{hor} = \mathbb{F}[\mu_1, \cdots, \mu_n] \approx S(\mathfrak{g}^*)$.

De la démonstration on déduit le résultat suivant :

Proposition 4

$$W_{bas} = S(\mathfrak{g}^*)^G.$$

De plus, l'action de $\mathfrak{g}_1$ est triviale sur W_{bas}, en effet :

Proposition 5

$$\forall w \in W_{hor},\ dw = \theta^iL_iw$$

Preuve 3

Calculons chaque terme de l'égalité.

Tout d'abord, $d\mu^i = dz^i + \frac{1}{2}c^i_{jk}d(\theta^j\theta^k) = 0 + \frac{1}{2}c^i_{jk}z^j\theta^k - \frac{1}{2}c^i_{jk}\theta^j z^k = c^i_{jk}z^j\theta^k$.

Puis, $L_j\mu^i = L_j z^i + \frac{1}{2}c^i_{kl}L_j(\theta^k\theta^l) = -c^i_{jk}z^k - \frac{1}{2}c^i_{kl}c^k_{jm}\theta^m\theta^l - \frac{1}{2}c^i_{kl}c^l_{jm}\theta^k\theta^m = -c^i_{jk}z^k - \frac{1}{2}c^i_{kl}c^k_{jm}\theta^m\theta^l - \frac{1}{2}c^i_{lk}c^k_{jm}\theta^l\theta^m = -c^i_{jk}z^k - c^i_{kl}c^k_{jm}\theta^m\theta^l$

Et donc : $\theta^j L_j\mu^i = -c^i_{jk}z^k\theta^j - c^i_{kl}c^k_{jm}\theta^m\theta^l\theta^j = c^i_{jk}z^j\theta^k - 0 = d\mu^i$.

En effet, par antisymétrie du tenseur $\theta^m\theta^l\theta^j$*, le terme* $c^i_{kl}c^k_{jm}\theta^m\theta^l\theta^j$ *s'annule par l'identité de Jacobi.*

Soit A une G^*-algèbre de type **(C)**, et θ^i_A des éléments de connection, donc tels que $\iota_j\theta^i_A = \delta^i_j$ et $L_j\theta_A = -c^i_{jk}\theta^k$. On a $d\theta^i_A \in A^2$ et d'après les axiomes vérifiés par les G^*-algèbres l'action de $\tilde{\mathfrak{g}}$ sur les éléments θ^i_A et $d\theta^i_A$ est identique à l'action de $\tilde{\mathfrak{g}}$ sur les élḿents θ^i et $z^i = d\theta^i$ de l'algèbre de Weil W. Puisque W est engendrée comme G^*-algèbre par les éléments θ^i et z^i, l'application $\rho : W \to A$, définie par $\rho(\theta^i) = \theta^i_A$ et $\rho(z^i) = d\theta^i_A$, s'étend (au moins si G est connexe) en un morphisme de G^*-algèbre.

C'est dans ce sens que l'algèbre de Weil W peut être vue comme la G^*-algèbre de type **(C)** la plus simple : on a en effet le théorème suivant :

Théorème 2

Soit A une G^*-algèbre de type (C).

Il existe un morphisme de G^*-algèbre, $\rho : W \to A$, unique à homotopie de chaîne près.

Donc toute G^*-algèbre de type **(C)** est ainsi munie d'une structure de W-module.

Ceci nous amène à la définition suivante :

Définition 8

Une W^*-algèbre est une G^*-algèbre B qui est aussi un W-module tel que :

$$W \bigotimes B \to B,$$
$$w \otimes b \mapsto wb$$

soit un morphisme de G^*-algèbre.

Remarque 5 *On définit de même la notion de W^*-module : il suffit de remplacer les occurences du mot algèbre par le mot module dans la définition.*

Corollaire 1

Toute G^*-algèbre de type (C) est une W^*-algèbre.

A partir de maintenant on suppose que le groupe G est **COMPACT**.

L'indépendance du choix de la G^*-algèbre de type **(C)** E dans la définition de la cohomologie équivariante d'une G^*algèbre résulte alors du théorème suivant :

Théorème 3

Soit A une W^*-algèbre et E une W^*-algèbre acyclique, alors $H^*((A \bigotimes E)_{bas}) = H^*(A_{bas})$.

En effet, si E est une G^*-algèbre de type **(C)**, alors $A \otimes E$ est aussi une G^*-algèbre de type **(C)**, et donc $A \otimes E$ est une W^*-algèbre. L'algèbre de Weil W est aussi une W^*-algèbre acyclique, donc en appliquant deux fois le théorème,une fois pour E, une fois pour W l'on a :

$$H^*((A \otimes E)_{bas}) = H^*((A \otimes E \otimes W)_{bas}) = H^*((A \otimes W \otimes E)_{bas}) = H^*((A \otimes W)_{bas})$$

.

Autrement dit, tous les espaces $H^*((A \bigotimes E)_{bas})$ sont isomorphes à un même modèle : le modèle de Weil $H^*((A \bigotimes W)_{bas})$ et ainsi la cohomologie d'une G^*-algèbre est bien définie.

Il reste donc à démontrer le théorème.

3.2 L'isomorphisme de Mathai-Quillen

Soient A une W^*-algèbre et B une G^*-algèbre.

Remarque 6 *A un W^*-module et B un G^*-module suffisent pour dèfinir l'isomorphisme de Mathai-Quillen.*

On définit l'endomorphisme $\gamma \in \mathtt{End}(A \bigotimes B)$ par $\gamma := \theta^i \otimes \iota_i$.

Proposition 6

1. *L'endomorphisme γ est indépendent de la base choisie.*
2. *L'endomorphisme γ est nilpotent : $\gamma^{n+1} = 0$.*
3. *γ est G-équivariant.*

Preuve 4

Les deux premiers points sont sans problèmes.
Pour le troisième, soit $g \in G$, on notera $Ad_g(i) = Ad_g(\xi_i)$.
D'après la définition d'une W^*-algèbre, $\forall g \in G, \forall a \in A, g.(\theta^i.a) = (g.\theta^i).(g.a) = (Ad^*_{g^{-1}}\theta^i).(g.a)$. Autrement dit, $g \circ \theta^i = (Ad^*_{g^{-1}}\theta^i) \circ g$.
On a donc : $g \circ \gamma = g \circ (\theta^i \otimes \iota_i) = (g \circ \theta^i) \otimes (g \circ \iota_i) = (Ad^*_{g^{-1}}\theta^i \circ g) \otimes (\iota_{Ad_g(i)} \circ g) = (Ad^*_{g^{-1}}\theta^i \otimes \iota_{Ad_g(i)}) \circ g$.
Comme G agit par automorphismes, les $Ad^*_{g^{-1}}\theta^i$ forment une nouvelle base de $\mathfrak{g}^*$. De plus, $\iota_{Ad_g g(i)}(Ad^*_{g^{-1}}\theta^j) = \theta^j(Ad^*_{g^{-1}}Ad_g(i)) = \theta^j(\xi_i) = \iota_i\theta^j = \delta^j_i$, donc $Ad^*_{g^{-1}}\theta^i \otimes \iota_{Ad_g(i)}$ n'est rien d'autre que l'écriture de γ dans une autre base, celle des $Ad^*_{g^{-1}}\theta^i$.
Or γ est indépendant de la base choisie, donc on a bien : $g \circ \gamma = \gamma \circ g$.

Définition 9

On définit l'isomorphisme de Mathai Quillen ϕ comme $\phi = \exp(\gamma)$.

Remarque 7

1. *L'isomorphisme ϕ est bien défini car $\phi = 1 + \gamma + \frac{\gamma^2}{2} + \cdots + \frac{\gamma^n}{n!}$*
2. *Comme γ respecte la gradation de $A \otimes B$, il en est de même de ϕ.*
3. *Comme γ est G-équivariant, il en est de même de ϕ.*
4. *ϕ est un automorphisme d'algèbre.*

Le théorème suivant est fondamental pour la suite. Sa démonstration étant un peu longue et calculatoire, elle sera omise ici.

Théorème 4

1. $\forall \xi \in \mathfrak{g},\ \phi(1 \otimes \iota_\xi + \iota_\xi \otimes 1)\phi^{-1} = \iota_\xi \otimes 1$
2. $\phi d \phi^{-1} = d - \mu^k \otimes \iota_k + \theta^k \otimes L_k$

De la première relation du théorème, on déduit que :

$$\phi : (A \otimes B)_{hor} \to A_{hor} \otimes B$$

et donc que :

$$\phi : (A \otimes B)_{bas} \to (A_{hor} \otimes B)^G$$

De la deuxième relation, on déduit que le modèle $((A \otimes B)_{bas}, d)$ est isomorphe au modèle $((A_{hor} \otimes B)^G, \delta)$, avec $\delta = d - \mu^k \otimes \iota_k + \theta^k \otimes L_k$.

Revenons à la preuve du théorème :

Preuve 5

On utilise l'isomorphisme de Mathai-Quillen, $\phi : (A \otimes E)_{bas} \to (A_{hor} \otimes E)^G$ *pour se ramener à l'étude de* $((A_{hor} \otimes E)^G, \delta)$*, avec* $\delta = d - \mu^k \otimes \iota_k + \theta^k \otimes L_k$.

La particularité de ce modèle est qu'il va nous permettre d'exploiter l'acyclicité de E.

En effet, on peut écrire $\delta = \delta_1 + \delta_2$ *avec* $\delta_1 = 1 \otimes d_E$ *et* $\delta_2 = d_A \otimes 1 + \mu^k \otimes \iota_k + \theta^k \otimes L_k$ *et remarquer que* $\delta_1^2 = 0$

On peut alors définir le complexe suivant :

$C^* := (A_{hor} \otimes E)^G = C^0 \bigoplus C^1 \bigoplus \cdots$ *avec* $C^i := (A_{hor} \bigoplus E^i)^G$ *muni de la différentielle* δ_1. *On a bien* $\delta_1 : C^i \to C^{i+1}$.

De plus, on peut remarquer que l'on a : $\delta_2 : C^i \to C^i \bigoplus C^{i-1}$.

Lemme 1

Les groupes de cohomologie du complexe (C^*, δ_1) *sont donnés par :*

$$H^0(C^*, \delta_1) = A_{bas} \qquad \texttt{et} \qquad H^k(C^*, \delta_1) = 0,\ \forall k > 0$$

Preuve 6

Notons $\tilde{C}^* := A_{hor} \otimes E = \tilde{C}^0 \bigoplus \tilde{C}^1 \bigoplus \cdots$ *avec* $\tilde{C}^i := A_{hor} \bigoplus E^i$.

L'espace gradué $\tilde{C}^*$ *muni de la différentielle* δ_1 *est aussi un complexe dont* (C^*, δ_1) *est un sous-complexe.*

Puisque l'espace E *est acyclique, on a :*

$$H^0(\tilde{C}^*, \delta_1) = A_{hor} \qquad \texttt{et} \qquad H^k(\tilde{C}^*, \delta_1) = 0,\ \forall k > 0$$

.

Puisque les èléments de $H^0(C^*, \delta_1) = A_{bas}$ *sont les éléments de* $H^0(\tilde{C}^*, \delta_1)$ *qui sont G-invariants, on déduit de* $H^0(\tilde{C}^*, \delta_1) = A_{hor}$ *que* $H^0(C^*, \delta_1) = A_{bas}$.

Maintenant, soit $\tau \in C^k, k > 0$. *Pusque* $C^k \subset \tilde{C}^k$ *et que* $H^k(\tilde{C}^*, \delta_1) = 0$*, il existe* $\sigma \in \tilde{C}^{k-1}$ *tel que* $\tau = \delta_1 \sigma$. *Puisque* G *est compact et que* δ_1 *est G-équivariante, en moyennant l'égalité précédente sur G, on obtient* $\tau = \delta_1 \sigma'$ *(*$\tau \in C^k$ *donc* τ *est G-invariant) avec* $\sigma' \in C^{k-1}$.

Et ainsi on a bien : $H^k(C^*, \delta_1) = 0$.

Il reste encore à exploiter le δ_2. *Or celui-ci n'est pas homogène par rapport à la graduation précédente :* $\delta_2 : C^i \to C^i \bigoplus C^{i-1}$.

On introduit alors la filtration suivante :

$$C_j := \oplus_{i \leq j} C^i \quad C^* = \cup C_j.$$

Pour terminer la démonstration, il suffit de montrer le lemme suivant :

Lemme 2

Soit $j \geq 1$ *et soit* $\mu \in C_j$ *tel que* $\delta\mu = 0$.

Alors il existe $\nu \in C_{j-1}$ *et* $a \in A_{bas}$ *tel que* $\mu = \delta\nu + a \otimes 1$

De plus a est unique à un cobord près, càd pour deux choix (ν_1*,* a_1*) et (*ν_2*,* a_2*) tels que* $\mu = \delta\nu_i + a_i \otimes 1$ *alors il existe* $b \in A_{bas}$ *tel que* $a_1 - a_2 = d_A b$.

En effet le lemme établit une correspondance entre les cochaînes de C^* *et celles de* A_{bas} *modulo cobords.*

Soit $\mu \in ((A_{hor} \bigotimes E)^G)^i$. *Il existe* $j \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mu \in C^j$ *et d'après le lemme il existe un unique* $a \in A_{bas}$ *à un cobord près tel que modulo un cobord* $\delta\nu$*,* $\mu = \delta\nu + a \otimes 1$. *Or* $\delta\mu = 0$. *implique que* $\delta(a \otimes 1) = \delta_1(a \otimes 1) + \delta_2(a \otimes 1) = d_A a \otimes 1 + 0 = 0$*, autrement dit que a est bien une cochaîne de* A_{bas}.

Il ne reste donc plus quà démontrer le lemme.

Preuve 7

On procède par récurrence. Une première récurrence pour montrer l'existence de ν et a. Une deuxième récurrence pour montrer l'unicité à cobords près.

Tout d'abord, soit $\mu \in C_0 = C^0$ tel que $\delta\mu = 0$.

On a $\delta\mu = \delta_1\mu + \delta_2\mu$ et comme $\delta_1\mu \in C^1$ et $\delta_2\mu \in C^0$, on a que $\delta_1\mu = 0$. D'après le lemme 1, on a $\mu = a \otimes 1$, avec $a \in A_{bas}$.

Soit $j > 0$. On suppose la propriété d'existence de ν et a vraie jusqu'au rang $j-1$.

Maintenant soit $\mu \in C_j$ tel que $\delta\mu = 0$. On peut écrire $\mu = \mu_j + \mu'$ avec $\mu_j \in C^j$ et $\mu' \in C_{j-1}$.

On a alors $0 = \delta\mu = \delta_1\mu_j + \delta_1\mu' + \delta_2\mu_j + \delta_2\mu'$ et $\delta_1\mu_j \in C^{j+1}$ et $\delta_1\mu' + \delta_2\mu_j + \delta_2\mu' \in C_j$. Donc $\delta_1\mu_j = 0$ et d'après le lemme 1, il existe $\mu'' \in C^{j-1}$ tel que $\mu_j = \delta_1\mu''$.

Maintenant, $\delta\mu'' = \mu_j + \delta_2\mu''$ donc $\mu - \delta\mu'' \in C_{j-1}$. On peut alors appliqué l'hypothèse de récurrence et donc il existe $\nu \in C_{j-2}$ et $a \in A_{bas}$ tels que $\mu = \delta\mu'' + \delta\nu + a\otimes 1 = \delta(\mu''+\nu) + a \otimes 1$ avec $\mu'' + \nu \in C_{j-1}$, ce qui conclue la première récurrence.

La deuxième récurrence revient à montrer que si $\delta\nu = a \otimes 1$ avec $\nu \in C_j$ alors il existe $b \in A_{bas}$ tel que $a = d_A b$.

Tout d'abord, si $j = 0$, et $\delta\nu = a \otimes 1$ on a $\delta_1\nu + \delta_2\nu = a \otimes 1$, avec $\delta_1\nu \in C^1$, $\delta_2\nu \in C^0$ et $a \otimes 1 \in C^0$. Par un argument de degrè, on a donc $\delta_1\nu = 0$ et d'après le lemme 1, il existe $b \in A_{bas}$ tel que $\nu = b \otimes 1$. On a ainsi $a \otimes 1 = \delta\nu = \delta_1\nu + \delta_2\nu = \delta_2\nu$. Or $\delta_2\nu = d_A \otimes 1 + \mu^k \otimes \iota_k + \theta^k \otimes L_k(a \otimes 1) = d_A b \otimes 1$. On a donc bien que $a = d_A b$.

On suppose la propriétée vraie jusqu'au rang $j-1$, $j > 0$.

Soit $a \in A_{bas}$ et $\nu \in C_j$ tels que $\delta\nu = a \otimes 1$. Il suffit de montrer qu'il existe $\nu''' \in C_{j-1}$ tel que $\delta\nu''' = a \otimes 1$. On va procéder comme dans la récurrence précédente. On décompose $\nu = \nu_j + \nu'$ avec $\nu_j \in C^j$ et $\nu' \in C_{j-1}$. Comme $\delta_1\nu_j \in C^{j+1}$ et $a\otimes 1 - (\delta_1\nu' + \delta_2\nu_j + \delta_2\nu') \in C_j$, on a $\delta_1\nu_j = 0$ et donc il existe $\nu'' \in C^{j-1}$ tel que $\nu_j = \delta_1\nu''$.

Ainsi, $\delta\nu_j = \delta(\delta\nu'' - \delta_2\nu'') = -\delta(\delta_2\nu'')$ avec $\delta_2\nu'' \in C^{j-1}$ et donc $a \otimes 1 = \delta(\nu' - \delta\nu'') = \delta(\nu''')$ avec $\nu''' = \nu' - \delta\nu'' \in C_{j-1}$, ce qui termine la démonstration.

3.3 Modèle de Cartan

Si le modèle de Weil, vu précédemment s'est imposé (dans ces notes) comme premier modèle pour calculer la cohomologie équivariante de par la simplicité de l'algèbre de Weil en tant que G^*-algèbre acyclique de type **(C)**, il existe aussi d'autres modèles équivalents, notamment le modèle de Cartan.

Revenons à l'isomorphisme de Mathai-Quillen.

L'on a vu que

$$\phi : (A \otimes B)_{hor} \to A_{hor} \otimes B$$

où A est une W^*-algèbre et B une G^*-algèbre.

Regardons le modèle équivalent du modèle de Weil obtenu par l'isomorphisme de Mathai-Quillen, càd choisissons $A = W$.

On a $W_{hor} = \mathbb{F}[\mu^1, \cdots, \mu^n] \approx S(\mathfrak{g}^*)$ et donc l'espace de notre nouveau modèle est $(S(\mathfrak{g}^*) \bigotimes B)^G$.

Comme $d_{W_{hor}} = \theta^i L_i$ et que $L_k \otimes 1 + 1 \otimes L_k = 0$ sur les éléments G-invariants de $S(\mathfrak{g}^*) \bigotimes B$, la différentielle de notre nouveau modèle est :

$d = d_W \otimes 1 + 1 \otimes d_B + \mu^k \otimes \iota_k + \theta^k \otimes L_k = \theta^k L_k \otimes 1 + 1 \otimes d_B + \mu^k \otimes \iota_k + \theta^k \otimes L_k = \theta^k(L_k \otimes 1 + 1 \otimes L_k) + 1 \otimes d_B + \mu^k \otimes \iota_k = 1 \otimes d_B + \mu^k \otimes \iota_k$

Définition 10

Le modèle suivant :

$$(S(\mathfrak{g}^*) \otimes B)^G, 1 \otimes d_B + \mu^k \otimes \iota_k)$$

est appelé modèle de Cartan.

Et on a le théorème suivant :

Théorème 5

$$H^*((W \otimes B)_{bas}, d) = H^*((S(\mathfrak{g}^*) \otimes B)^G, 1 \otimes d_B + \mu^k \otimes \iota_k)$$