GT: Lie/symplectique 2008

Exposés 5,6 (S. P.)

Rappel symplectique linéaire:

Un espace symplectique linéaire est un espace vectoriel réel V muni d'une forme bilinéaire

$$\omega : V \times V \to \mathbf{R}$$

antisymétrique et non dégénérée.

Pour un sous-espace $W \subset V$ on note W^ω son orthogonal symplectique:

$$W^\omega = \{u \in V,\, \omega(u, w) = 0,\, \forall w \in W\}.$$

On a $(W^\omega)^\omega = W$ et $dim\, W + dim\, W^\omega = dim\, V$.

W est dit isotrope si $W \subset W^\omega$, coisotrope si $W^\omega \subset W$, Lagrangien si $W = W^\omega$.

On note $L(V)$ l'ensemble des Lagrangiens de V.

Prop: $L(V) \neq \emptyset$.

Démo: l'argument est classique: si $v \in V \setminus \{0\}$, on a $< v > \subset < v >^\omega$ i.e. les isotropes existent. Soit $L \subset V$ un sous-espace isotrope maximal (i.e $L \subset L^\omega$ et $L \subset L' \subset L'^\omega \Rightarrow L = L'$) alors L est Lagrangien. En effet, si $L \neq L^\omega$, alors pour $v \in L^\omega \setminus L$ on aurait $L \subset L\oplus < v > \subset (L\oplus < v >)^\omega$ et L ne serait pas maximal.

Conséquence: $Dim\, V$ est paire. En effet, pour tout sous-espace Lagrangien L on a $dim\, V = 2dim\, L$.

Prop: Tout Lagrangien $L \subset V$ admet un supplémentaire Lagrangien $L' \subset V$.

(démo disponible non reprise ici)

Conséquence: il existe une base où la matrice $[\omega] = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$. Ici I est la matrice unité de taille $\frac{dim\, V}{2}$. Une telle base est dite symplectique.

Si $\iota : L \to V : x \mapsto x$ désigne l'inclusion, l'application

$$L' \to L^\star : x' \mapsto \iota^\star\, \omega(x', \cdot)$$

induit un isomorphisme entre (V, ω) et $(L \oplus L^\star, \omega_0)$ où ω_0 est la forme symplectique standard

$$\omega_0((x, \alpha), (y, \beta)) = < \alpha, y > - < \beta, x > .$$

Groupe symplectique:

$$Sp_\omega = \{l \in End\, V,\, l^\star \omega = \omega\}$$

Ici, $l^\star \omega\,(u, v) = \omega(l(u), l(v))$.

Prop: Sp_ω agit transitivement sur l'espace $L(V)$.

Démo: pour la transitivité: si $L_1, L_2 \in L(V)$, choisir $L'_1, L'_2 \in L(V)$ et deux bases symplectiques adaptées à $V = L_1 \oplus L'_1 = L_2 \oplus L'_2$. L'application l envoyant base symplectique sur base symplectique est dans Sp_ω.

Remarque: Par ce qui précède, pour tout $L \in L(V)$ on a $V \simeq L \oplus L^\star$. Si $l \in Gl(L)$, l'application

$$L \oplus L^\star \to L \oplus L^\star : (x, \alpha) \mapsto (lx, {l^{-1}}^\star \alpha)$$

est symplectique i.e. on a un plongement naturel de $Gl(L)$ dans Sp_ω, en particulier le groupe symplectique n'est pas compact. On verra plus loin que ce plongement correspond au *lift* cotangent.

Rappel symplectique différentiel:

Variété symplectique: une paire (X, ω) où X est une variété réelle lisse et $\omega \in \Omega^2(X)$ est une $2-$forme fermée non dégénérée.

Exemples très classiques: $\mathbf{R}^{2n}$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ avec

$$\omega_0 = \sum_{1 \le i \le n} dx_i \wedge dy_i.$$

Toute surface lisse munie d'une forme volume. Par exemple la sphère S_2 avec $\omega = r^2 sin\theta \, d\theta \wedge d\phi$.

Symplectomorphisme: tout difféomorphisme $f : X \to X'$ tel que $f^\star \omega' = \omega$.

Ici $f^\star \omega'$ signifie:

$$(f^\star \omega')(m)\,(u, v) = \omega'(f(m))\,(d_m f u,\, d_m f v), \quad m \in X,\, u, v \in T_m X.$$

Thm (Forme normale de Darboux): Localement toute variété symplectique est symplectomorphe à $(\mathbf{R}^{2n}, \omega_0)$.

Exemples très classiques (suite): $X = T^\star Q$ où Q est une variété lisse. Voici comment définir la structure symplectique usuelle: On dispose de la projection

$$p : T^\star Q \to Q : \alpha_q \mapsto q$$

et de ses tangente/cotangente

$$dp : T(T^\star Q) \to TQ, \qquad dp^\star : T^\star Q \to T^\star(T^\star Q).$$

On note $\Theta = dp^\star$ (la $1-$ forme de Liouville). Pour $\alpha_q \in T^\star Q$ et $Z \in T_{\alpha_q} T^\star Q$ on a donc

$$< \Theta(\alpha_q), Z > = < \alpha_q, T_{\alpha_q} p\, Z > .$$

La structure symplectique standard est alors

$$\omega_0 = -d\Theta.$$

Expression locale: on note (q^i, p_i), $1 \le i \le n$, les coordonnées locales sur $T^\star Q$ i.e. $q^i(\alpha_q) = q^i(q)$ et $p_i(\alpha_q) = < \alpha_q, \frac{\partial}{\partial q^i} >$.

On a

$$\Theta = \sum_{1 \le i \le n} p_i \, dq^i, \qquad \omega_0 = \sum_{1 \le i \le n} dq^i \wedge dp_i.$$

Remarque: Si $Q = V$ (un espace vectoriel), $T^\star V \simeq V \oplus V^\star$ avec la structure du paragraphe 1.

Prop (*lift* cotangent): Le groupe $Diff(Q)$ des difféomorphismes de Q se plonge naturellement dans le groupe des symplectomorphismes $Sp(T^\star Q, \omega_0)$.

Voici comment: la cotangente du difféo $f^{-1} : Q \to Q$ i.e. l'application

$$d_{f(q)} f^{-1\star} : T^\star_q Q \to T^\star_{f(q)} Q$$

préserve la $1-$ forme de Liouville Θ et donc aussi ω_0.

Champs Hamiltoniens et crochet de Poisson:
Soit $V(X)$ les champs de vecteurs sur X. On a l' application naturelle

$$V(X) \to \Omega^1(X) : Y \mapsto \omega(Y, \cdot).$$

Notation: On note souvent la contraction $\omega(Y, \cdot)$ par $i_Y\, \omega$.
Le champ Hamiltonien de $f \in C^\infty(X)$ est l'unique champ de vecteur $X_f \in V(X)$ tel que $\omega(X_f, \cdot) = df$.
L'application

$$C^\infty(X) \times C^\infty(X) \to C^\infty(X) : (f, g) \mapsto \{f, g\} =< df, X_g >= \omega(X_f, X_g)$$

est un crochet de Lie (Jacobi équivaut à $d\omega = 0$) vérifiant $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$. De plus l'application

$$C^\infty(X) \to V(X) : f \mapsto X_f$$

est un antimorphisme i.e. $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$.
Actions symplectiques et moments:
Une action

$$\phi : G \times X \to X : (g, x) \mapsto \phi_g(x)$$

d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique (X, ω) est dite symplectique si

$$\phi_g^\star \omega = \omega, \quad \forall g \in G.$$

Si $\omega = -d\theta$ pour $\theta \in \Omega^1(X)$, l'action est dite exacte si

$$\phi_g^\star \theta = \theta, \, \forall g \in G.$$

(Une action exacte est symplectique.)
Exemple très classique (suite): Par *lift* cotangent toute action $\phi : G \times Q \to Q$ se relève en une action exacte

$$G \times T^\star Q \to T^\star Q : (g, \alpha_q) \mapsto (d_{\phi_g(q)} \phi_{g^{-1}})^\star \alpha_q.$$

Champ fondamental: pour $Z \in \mathbf{g} = Lie(G)$ et $m \in X$, il s'agit du champ

$$Z^-_m = \frac{d}{dt}_{|t=0} \phi_{exp(tZ)}(m).$$

L'application $\mathbf{g} \to V(X) : Z \mapsto Z^-$, est un antimorphisme i.e. $[Z, Z']^- = -[Z^-, Z'^-]$.
Observation: En dérivant la condition $\phi^\star_{exptZ} \omega = \omega$ en $t = 0$, il vient

$$L_{Z^-} \omega = 0, \quad (L \text{ est la dérivée de Lie })$$

La formule de Cartan

$$L_X = i_X \circ d + d \circ i_X$$

donne

$$d(\omega(Z^-, \cdot)) = 0, \quad \forall Z \in \mathbf{g}.$$

La question naturelle est alors de savoir si l'on peut rendre la $1-$ forme fermée $\omega(Z^-, \cdot)$ globalement exacte pour tout $Z \in \mathbf{g}$. C'est précisément ici qu'intervient la notion de moment.

Un *co-moment* est une application ($\mathbf{R}$ -) linéaire

$$\overline{j} : \mathbf{g} \to C^\infty(X) : Z \mapsto j_Z$$

telle que

$$\omega(Z^-, \cdot) = dj_Z, \quad \forall Z \in \mathbf{g}$$

i.e.

$$Z^- = X_{j_Z}, \quad \forall Z \in \mathbf{g}.$$

D'un point de vue mécanicien, un comoment réalise donc les symétries infinitésimales (les Z^-) comme champs Hamiltoniens.

L'application duale

$$j : X \to \mathbf{g}^\star$$

définie par

$$< j(m), Z >= j_Z(m), \quad \forall m \in X.$$

est appelée *moment* (en référence aux moments de la mécanique du point. cf infra).

Existence d'une application moment: Un moment existe ssi l'application

$$\frac{\mathbf{g}}{[\mathbf{g}, \mathbf{g}]} \to H^1(X) : [Z] \mapsto [\omega(Z^-, \ )]$$

est nulle.

En particulier, elle existe toujours pour G semi-simple.

Equivariance du moment: $j : X \to \mathbf{g}^\star$ telle que $Ad^\star_{g^{-1}} \circ j = j \circ \phi_g$, $\forall g \in G$. Ici $Ad^\star_g$ est l'adjointe de $Ad_g(Z) = \frac{d}{dt}_{|t=0}\, g\, exp(tZ)\, g^{-1}$, $Z \in \mathbf{g}$.

Prop: On suppose G connexe. Le moment j est équivariant ssi le comoment $\overline{j} : \mathbf{g} \to C^\infty(X)$ est un morphisme de Lie i.e. $j_{[Z,Z']} = \{j_Z, j_{Z'}\}$.

Moment équivariant pour une action exacte sur $(X, \omega = -d\theta)$:

Puisque $\phi^\star_g \theta = \theta$ on a $L_{Z^-}\theta = 0$, $\forall Z \in \mathbf{g}$. La formule de Cartan s'écrit: $i_{Z^-} d\theta = -d < \theta, Z^- >$ i.e. $\omega(Z^-, \ ) = d < \theta, Z^- >$. Dès lors

$$j_Z(m) =< \theta_m, Z^-_m >, \; m \in X$$

est un comoment.

Exemple très classique (suite): Pour l'action exacte par *lift* cotangent de l'action $\phi : G \times X \to X$ sur $T^\star Q$, ce moment s'écrit

$$j_Z(\alpha_q) =< \alpha_q, \frac{d}{dt}_{|t=0} \phi_{exp(tZ)}(q) > .$$

Remarquer que ce moment ne voit pas le *lift*.

Une remarque sur l'origine mécanicienne du *moment*: Typiquement on se donne un espace dit de *configuration* - une variété Q - et certaines symétries d'espace - une action d'un groupe G sur Q - et il s'agit de résoudre les équations de Hamilton sur $T^\star Q$

$$\frac{d}{dt}F_t(m) = X_h(F_t(m)), \quad m \in T^\star Q$$

qui en coordonnées locales s'écrivent (au moins au signe près)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \overrightarrow{q}(t) \\ \overrightarrow{p}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \nabla h$$

où le Hamiltonien $h \in C^\infty(T^\star Q)$ est invariant sous l'action du *lift* cotangent de l'action de G.

Le théorème de Noether assure alors que le moment j est préservé par le flot i.e. $j(F_t(m)) = j(m)$, $m \in T^\star Q$. Il correspond dans ce cas aux *moments* usuels de la mécanique classique.

Rappels préliminaires au quotient symplectique:

Soit $f : M \to N$ une application lisse entre deux variétés. Un point $m \in M$ est dit *régulier* si la tangente $d_m f : T_m M \to T_{f(m)}N$ est surjective. Un point non régulier est dit *singulier* ou *critique*. Un point $n \in N$ est dit *valeur régulière* si tout point $m \in f^{-1}(n)$ est régulier ou si $n \in N \setminus f(M)$. Si n est une valeur régulière, la partie $f^{-1}(n) \subset M$ (supposée ici non vide) est une sous-variété fermée et $\forall m \in f^{-1}(n)$, $T_m(f^{-1}(n)) = Ker(T_m f)$.

Soit $\phi : G \times M \to M$ une action lisse, propre et libre. Alors M/G est une variété lisse et la projection naturelle $p : M \to M/G$ est une submersion (i.e. tout $m \in M$ est régulier).

Quotient symplectique:

Voici les données: une variété symplectique (X, ω) munie d' une action symplectique $G \times X \to X$ admettant un moment équivariant $j : X \to \mathbf{g}^\star$.

Un tel quadruple (X, ω, G, j) est appelé un $G-$ espace Hamiltonien.

Notation: L'orbite du point $m \in X$ est notée $G \cdot m \subset X$. Son stabilisateur est noté G_m. C' est un sous-groupe fermé (donc de Lie) de G d'algèbre de Lie notée $\mathbf{g}_m$. Enfin $\mathbf{g}_m^\perp \subset \mathbf{g}^\star$ désigne l'annulateur de $\mathbf{g}_m$ dans $\mathbf{g}^\star$.

Lemme I: Pour tout $m \in X$ on a

$$(\iota)\ Kerd_m j = (T_m(G \cdot m))^\omega \qquad (\iota\iota)\ Im(d_m j) = \mathbf{g}_m^\perp \subset \mathbf{g}^\star$$

Démo: On a $T_m(G \cdot m) =< Z_m^-, Z \in \mathbf{g} >$. Soit $v \in T_m X$ et $m(t)$ une courbe dans X telle que $\frac{d}{dt}_{|t=0} m(t) = v$. On a

$$\omega(Z_m^-, v) = d_m j_Z\, v = \frac{d}{dt}_{|t=0} j_Z(m(t)) = \frac{d}{dt}_{|t=0} < j(m(t)), Z >=< d_m j\, v, Z > .$$

Dès lors, $d_m j\, v = 0$ ssi $v \in (T_m(G \cdot m))^\omega$.

Quant à $Im\, d_m j$, on a $Z \in \mathbf{g}_m$ ssi $Z_m^- = 0$. En particulier pour tout $Z \in \mathbf{g}_m$, $v \in T_m X$, on a (trivialement) $0 = \omega(Z_m^-,\, v) =< d_m j\, v, Z >$, i.e.

$$Im\, d_m j \subset \mathbf{g}_m^\perp.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} dim\, Im\, d_m j &= dim\, T_m X - dim\, Ker\, d_m j \\ &= dim\, X - dim\, (T_m\, G \cdot m)^{\omega} \\ &= dim\, X - (dim\, X - dim\, T_m(G \cdot m)) \\ &= dim\, (G \cdot m) = dim\, G - dim\, G_m \\ &= dim\, \mathbf{g}_m^{\perp}. \end{aligned}$$

Corollaire immédiat: $\mu \in \mathbf{g}^{\star}$ est une valeur régulière du moment $j : X \to \mathbf{g}^{\star}$ ssi pour tout $m \in j^{-1}(\mu)$ le stabilisateur $G_m < G$ est un sous-groupe discret.

Démo: μ régulière signifie $\forall m \in j^{-1}(\mu)$, $Im\, d_m j = \mathbf{g}^{\star}$. Le lemme donne $\mathbf{g}_m = 0$ i.e. G_m est discret dans G.

Pour $\mu \in \mathbf{g}^{\star}$ régulière, notons $i_{\mu} : j^{-1}(\mu) \to X$ l'inclusion de sous-variété et $G_{\mu} < G$ le stabilisateur de μ pour l'action adjointe

$$G \times \mathbf{g}^{\star} \to \mathbf{g}^{\star} : (g, \mu) \mapsto Ad^{\star}_{g^{-1}}\, \mu.$$

Puisque j est équivariante, la G action se restreint en l'action

$$G_{\mu} \times j^{-1}(\mu) \to j^{-1}(\mu) : (g, m) \mapsto \phi_g(m).$$

Lemme II: Pour tout $m \in j^{-1}(\mu)$, on a

$$T_m\, j^{-1}(\mu) \bigcap (T_m\, j^{-1}(\mu))^{\omega} = T_m\, (G_{\mu} \cdot m).$$

Démo: Par le rappel et le lemme I on a

$$T_m\, j^{-1}(\mu) \bigcap (T_m\, j^{-1}(\mu))^{\omega} = Ker\, d_m j \bigcap T_m\, (G \cdot m).$$

Or

$$d_m j\, Z^-_m = \frac{d}{dt}_{|t=0} j(\phi_{exp\, tZ}(m)) = \frac{d}{dt}_{|t=0} Ad^{\star}_{exp\, -tZ}(j(m)) = -ad^{\star}_Z\, \mu.$$

Dès lors $d_m j\, Z^-_m = 0$ ssi $Z \in \mathbf{g}_{\mu}$ (l'algèbre de Lie de G_{μ}) ssi $Z^-_m \in T_m\, (G_{\mu} \cdot m)$.

Thm (réduction symplectique de Marsden-Weinstein-Meyer)

Supposons $\mu \in \mathbf{g}^{\star}$ régulière et l'action $G_{\mu} \times j^{-1}(\mu) \to j^{-1}(\mu)$ propre et libre. Notons

$$p_{\mu} : j^{-1}(\mu) \longrightarrow j^{-1}(\mu)/G_{\mu}$$

la projection. Alors la variété quotient $j^{-1}(\mu)/G_{\mu}$ est munie d'une unique structure symplectique ω_{μ} telle que $i^{\star}_{\mu}\, \omega = p^{\star}_{\mu}\omega_{\mu}$.

Démo: Pour rappel:

(1) Pour une action lisse propre et libre $G \times M \to M$ on a $T_{p(m)}\, M/G \simeq T_m M/T_m(G \cdot m)$ où $p : M \to M/G$ est la projection.

(2) Soit V un espace vectoriel et $i : W \to V$ un sous-espace. Toute $2-$ forme sur V induit une $2-$ forme non dégénérée $\overline{\omega}$ sur le quotient $W/(W \cap W^{\omega})$ uniquement déterminée par $p^{\star}\overline{\omega} = \iota^{\star}\omega$ où $p : W \to W/(W \cap W^{\omega})$ est la projection.

Dans la situation du thm on a (cf lemme II)

$$T_m\, j^{-1}(\mu)/\big(T_m\, j^{-1}(\mu) \bigcap (T_m\, j^{-1}(\mu))^{\omega}\big) = T_m\, j^{-1}(\mu)/T_m\, (G_{\mu} m) \simeq T_{p_{\mu}(m)}\, (j^{-1}(\mu)/G_{\mu}).$$

On peut donc définir en chaque point $p_{\mu}(m) \in j^{-1}(\mu)/G_{\mu}$ une $2-$ forme non dégénérée ω_{μ} vérifiant $i^{\star}_{\mu}\omega = p^{\star}_{\mu}\omega_{\mu}$. Le fait que ω_{μ} est lisse et fermée résulte des propriétés suivantes: p_{μ} est une submersion et $d(p^{\star}_{\mu}\omega_{\mu}) = p^{\star}_{\mu} d\, \omega_{\mu} = i^{\star}_{\mu} d\omega = 0$.

Exemples:

(1) Supposons que $h \in C^\infty(X)$ soit telle que le flot F_t du champ Hamiltonien X_h soit défini pour tout $t \in \mathbf{R}$. Puisque $F_{t+t'} = F_t \circ F_{t'}$ ce flot induit une action

$$F : \mathbf{R} \times X \to X : (t, m) \mapsto F_t(m),$$

le champ fondamental $\overline{z_m}$, $z \in \mathbf{R}$ étant $\overline{z_m} = z\, X_h(m)$.

Cette action est symplectique: en effet

$$\frac{d}{dt} F_t^\star\, \omega = F_t^\star\, \frac{d}{ds}_{|s=0} F_s^\star\, \omega = F_t^\star L_{X_h}\, \omega = F_t^\star (i_{X_h}\, d\omega + d(i_{X_h} \omega)) = F_t^\star (0 + d^2\, h) = 0.$$

On vérifie que $h : X \to \mathbf{R}^\star = \mathbf{R}$ est un moment équivariant (en fait l'action adjointe est ici triviale et $h(F_t(m)) = h(m)$, $m \in X$, $t \in \mathbf{R}$).

(2) Comme cas particulier de (1), prenons $X = \mathbf{R}^{2n}$ muni de la forme standard $\omega_0 = \sum_{1 \le i \le n} dq_i \wedge dp_i$ et

$$h(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = \frac{1}{2} \sum_{1 \le i \le n} (q_i^2 + p_i^2)$$

le Hamiltonien de n oscillateurs harmoniques découplés (presqu'un champ de bosons libres!).

Le flot du champ $X_h = \sum_{1 \le i \le n} (q_i \frac{\partial}{\partial p_i} - p_i \frac{\partial}{\partial q_i})$ est la rotation $\begin{pmatrix} cos\, t & -sin\, t \\ sin\, t & cos\, t \end{pmatrix}$ dans chaque plan $(q_k, p_k), 1 \le k \le n$. En écrivant

$$\mathbf{R}^{2n} \simeq \mathbf{C}^n : (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) \mapsto (z_1 = q_1 + ip_1, \ldots, z_n = q_n + ip_n)$$

ce flot périodique induit l'action du cercle

$$S^1 \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n : (e^{it}, \overrightarrow{z}) \mapsto e^{it} \overrightarrow{z}.$$

La sous-variété $h^{-1}(\frac{1}{2})$ coincide avec la sphère $S^{2n-1} \subset \mathbf{C}^n$ et le thm de réduction implique que $S^{2n-1}/S^1 \simeq P_n\mathbf{C}$ est symplectique.

Remarque: Cette forme symplectique coincide avec la $2-$ forme de Fubini Study induite sur $P_n\mathbf{C}$ via la forme $\omega_{fs} = \frac{i}{2} \partial\overline{\partial}\, ln(\sum_i z_i \overline{z_i} + 1)$ sur $\mathbf{C}^n$ (détails disponibles mais non repris ici.)

(3) Pour un sous-groupe fermé $H < G$, le fibré cotangent $T^\star(H \backslash G)$ est un quotient symplectique de $(T^\star G,\, \omega_0)$.

Voici les données explicites:

(i) la multiplication à gauche $l : G \times G \to G : (g, x) \mapsto gx$ se relève (par *lift* cotangent) en l'action symplectique (en fait exacte)

$$G \times T^\star G \to T^\star G : (g, \alpha_x) \mapsto (d_{gx} l_{g^{-1}})^\star \alpha_x.$$

Dans le repère à droite i.e.

$$T^\star G \simeq G \times \mathbf{g}^\star : \alpha_x \mapsto (x, (d_1 r_x)^\star\, \alpha_x)$$

cette action s'écrit

$$G \times (G \times \mathbf{g}^\star) \to G \times \mathbf{g}^\star : (g, (x, \mu)) \mapsto (gx, Ad_{g^{-1}}^\star\, \mu).$$

(ii) Dans le repère à droite la $1-$ forme de Liouville s'écrit

$$< \Theta_{(x,\mu)},\, (u,\alpha) > = < \mu, d_x\, r_{x^{-1}}\, u >, \quad x \in G,\, u \in T_xG,\, \mu, \alpha \in \mathbf{g}^\star$$

et la forme symplectique $\omega = -d\Theta$ s'écrit

$$\begin{gathered}\omega_{(x,\mu)}\big((u,\alpha),(v,\beta)\big) = < \beta, d_x r_{x^{-1}} u > - < \alpha, d_x r_{x^{-1}} v > - < \mu, [d_x r_{x^{-1}} u, d_x r_{x^{-1}} v]_{\mathbf{g}} > \\ x \in G,\, u, v \in T_xG,\, \mu, \alpha, \beta \in \mathbf{g}^\star.\end{gathered}$$

(iii) Le moment $j : G \times \mathbf{g}^\star \to \mathbf{g}^\star$ s'écrit (cf le cas exact plus haut) pour $Z \in \mathbf{g}$,

$$\begin{aligned}< j(x,\mu), Z > &= < \Theta_{(x,\mu)},\, Z^-_{(x,\mu)} > \\ &= < \Theta_{(x,\mu)},\, \frac{d}{dt}_{|t=0} (exp(tZ)\, x, Ad^\star_{exp(-tZ)}\mu) > \\ &= < \mu,\, d_x r_{x^{-1}} d_1 r_x\, Z > \\ &= < \mu, Z > .\end{aligned}$$

(iv) Soit $\mathbf{h}$ l'algèbre de Lie de $H < G$ et $i : \mathbf{h} \to \mathbf{g}$ l'inclusion. La restriction du *lift* cotangent du (i) à H est (bien sûr) exacte avec application moment

$$j_H : G \times \mathbf{g}^\star \to \mathbf{h}^\star : (x,\mu) \to i^\star\mu.$$

j_H étant une submersion, tout point est régulier. En 0 on a

$$j_H^{-1}(0) = \{(x,\, \mu),\, i^\star\mu = 0\} = G \times \mathbf{h}^\perp.$$

Puisque le stabilisateur de $0 \in \mathbf{h}^\star$ pour l'action adjointe est H, le quotient

$$j_H^{-1}(0)/H = (G \times \mathbf{h}^\perp)/H = G \times_H \mathbf{h}^\perp$$

est symplectique.

Quelques observations (non reprises ici) sur l'espace homogène $H\backslash G$ montrent que ce quotient est isomorphe au fibré cotangent $T^\star(H\backslash G)$.

Littérature: Tout ce qui précède est classique. Voici quelques textes:

Abraham, Marsden: Foundations of Mechanics. Benjamin/Cummings.

Arnol'd: Mathematical Methods of Classical Mechanics. GTM. Springer.

Cannas da Silva: Lectures on Symplectic Geometry. LNM 1764. Springer.

Pour les actions de tores voir par exemple:

Audin: The Topology of Torus Actions on Symplectic Manifolds. Progress in Math. Birkhauser.

Pour une recherche plus ciblée sur le même thème + convexité du moment, tapez *V. Guillemin.*

Pour un point de vue théorie de représentations:

Chriss, Ginzburg: Representation Theory and Complex Geometry. Birkhauser.

Pour diverses notes de cours intéressantes (symplectique/actions de groupes/...) voir la page web de E. Meinrenken, Math. Université de Toronto.