

Proposition de cours pour le M2 Recherche  
HYPERGÉOMÉTRIE,  $q$ -SÉRIES ET FONCTION ZÊTA DE RIEMANN

**Enseignants :** THERESIA EISENKOELBL, FRÉDÉRIC JOUHET

**Titre du cours :** HYPERGÉOMÉTRIE,  $q$ -SÉRIES ET FONCTION ZÊTA DE RIEMANN

**Grand domaine scientifique :** COMBINATOIRE ET THÉORIE DES NOMBRES

**Adresses électroniques :** {eisenkoelbl,jouhet}@math.univ-lyon1.fr

**Semestre désiré :** 1ER OU 2ÈME

**Pre-requis :** Notions de base sur les séries.

**Resumé du cours :** Le but du cours est d'étudier :

1. les fonctions hypergéométriques et les  $q$ -séries
2. l'irrationalité des valeurs aux entiers des fonctions  $\zeta$  et  $\zeta_q$

### Programme

- Fonctions hypergéométriques :  
symbole de Pochhammer, notation hypergéométrique,  $q$ -analogues, identités élémentaires et leurs  $q$ -analogues
- Lemme de Bailey :  
partitions d'entiers, paires de Bailey, chaîne de Bailey, identités de Rogers-Ramanujan, formule d'Andrews
- Fonction zêta et  $q$ -analogue aux entiers :  
définitions de  $\zeta$  et  $\zeta_q$ , théorème de Lindemann et théorème d'indépendance algébrique de Nesterenko, transcendance des valeurs aux entiers pairs
- Valeurs aux entiers impairs :  
critères d'irrationalité, utilisation des séries hypergéométriques et des  $q$ -séries, conjecture des dénominateurs, résultats récents, problèmes ouverts

### Références

1. Andrews, Askey, Roy, *Special functions*
2. Gasper, Rahman, *Basic Hypergeometric Series*

3. Fischler, *Irrationalité de valeurs de zêta (d'après Apéry, Rivoal, ...)*, Sem. Bourbaki 2002-2003, exposé no. 910, Astérisque **294** (2004), 27-62
4. Jouhet, Mosaki, *Irrationalité aux entiers impairs positifs d'un q-analogue de la fonction zêta de Riemann*, preprint
5. Krattenthaler, Rivoal, Zudilin, *Séries hypergéométriques basiques, q-analogues des valeurs de la fonction zêta et séries d'Eisenstein*, J. Inst. Jussieu **5.1** (2006), 53-79