Numéro d'ordre : 29-2010

Université Claude Bernard Lyon 1

Habilitation À Diriger des Recherches

Spécialité : mathématiques pures

Frédéric JOUHET

Soutenue le 22 septembre 2010

Quelques propriétés arithmétiques et combinatoires de fonctions spéciales

Après avis des rapporteurs :

M. Masao ISHIKAWA	Professeur à l'Université de Tottori
M. Christian KRATTENTHALER	Professeur à l'Université de Vienne
M. Ole WARNAAR	Professeur à l'Université de Queensland

Devant le jury composé de :

M. Philippe FLAJOLET	Directeur de recherche à l'INRIA
M. Masao ISHIKAWA	Professeur à l'Université de Tottori
M. Christian KRATTENTHALER	Professeur à l'Université de Vienne
M. Jeremy LOVEJOY	Chargé de Recherche au CNRS
M. Tanguy RIVOAL	Chargé de Recherche au CNRS
M. Jiang ZENG	Professeur à l'Université Lyon 1

Remerciements

Je remercie de façon générale toutes les personnes ayant contribué, de près ou de loin, à mes travaux de recherches ainsi qu'à l'élaboration de ce texte.

J'ai rencontré Philippe Flajolet il y a quelques années à l'occasion d'un exposé aux journées du GDR Informatique-Mathématiques à l'Institut Henri Poincaré, puis lorsqu'il m'a invité au séminaire de l'INRIA Rocquencourt, dont je garde un souvenir très agréable. C'est un grand honneur pour moi qu'il ait accepté de faire partie du jury de cette habilitation.
Je connais Masao Ishikawa depuis un certain temps, pour avoir fait sa connaissance lors de différents Séminaires Lotharingien de Combinatoire ou lors de ses nombreux séjours à l'Université Lyon 1. Les échanges et discussions professionnelles que nous avons eus ont toujours été riches et fructueux. Je le remercie vivement d'avoir accepté de rapporter cette habilitation et de participer à ce jury.
Christian Krattenthaler est sans doute l'un des mathématiciens dont j'ai le plus appris, ses travaux furent depuis le début de ma carrière et sont encore une grande source d'inspiration pour moi. Je lui exprime toute ma reconnaissance d'avoir été rapporteur de cette habilitation et je suis très heureux qu'il soit membre de ce jury.
Un grand merci à Jeremy Lovejoy, que j'ai eu le plaisir de rencontrer lors de la première conférence internationale à laquelle j'ai participé durant ma thèse, pour sa participation à ce jury.
Mes travaux récents sont en partie issus d'échanges avec Tanguy Rivoal, qui s'est systématiquement rendu disponible pour répondre aux diverses questions que je pouvais avoir à lui poser. Je lui en suis très reconnaissant, ainsi que d'avoir accepté d'être membre de ce jury.
Je tiens aussi à remercier Ole Warnaar, avec qui j'ai toujours eu plaisir à communiquer car nos échanges furent toujours riches d'enseignements, et qui a accepté de rapporter cette habilitation.
J'exprime bien entendu toute ma gratitude à Jiang Zeng, qui m'a permis de faire mes premiers pas dans la recherche, et qui me fait le plaisir de participer à ce jury.

Je me dois de mentionner l'ambiance fort agréable dans laquelle j'ai pu travailler au sein de l'Institut Camille Jordan. Toutes les conditions furent réunies pour que je puisse préparer sereinement cette habilitation, à commencer par ma relation avec mes collègues ou l'aide du personnel administratif. Je les remercie donc tous, et j'ai une pensée spéciale pour ceux de mes collègues qui sont aussi devenus des amis. Je tiens absolument à nommer particulièrement Boris et Elie, avec qui c'est une joie de partager des moments, à l'intérieur comme à l'extérieur de l'institut.

Je remercie enfin ma famille et mes amis, qui par leur seule présence apaisante et leur affection ont contribué à me mettre dans des conditions idéales pour réaliser ce travail. J'embrasse tendrement Kerien ; le voir grandir est un bonheur de chaque instant.

Éclaire ce que tu aimes sans toucher à son ombre.

Christian Bobin, *Éloge du rien.*

Table des matières

Chapitre 1

Introduction et notations

1.1 Préambule

Ce texte présente les travaux de recherche que j'ai effectués depuis ma thèse, c'est-à dire durant une période s'écoulant entre 2004 et 2009. De ce fait, les articles [61, 62, 63] issus de ma thèse ne seront pas présentés. Quant à l'article [57], bien qu'il fasse partie de la période mentionnée ci-dessus, il ne sera pas évoqué car il est un peu marginal par rapport au reste de mes recherches.

Mon travail se situe à l'intersection de la combinatoire, des q-séries et de la théorie des nombres. Plus précisément, je me suis intéressé à certains problèmes d'énumération pour lesquels les fonctions symétriques s'avèrent être un outil approprié. J'expliquerai comment l'étude de bases particulières de l'algèbre des fonctions symétriques m'a naturellement conduit vers le riche domaine des q-séries, qui m'ont elles-mêmes ensuite permis de résoudre quelques problèmes arithmétiques.

La suite de cette introduction sera consacrée aux notations, définitions et propriétés classiques concernant à la fois les fonctions symétriques et les q-séries. Dans le deuxième chapitre je décrirai mes travaux liés aux fonctions symétriques, ainsi que les problèmes combinatoires sous-jacents. Le troisième chapitre est entièrement dédié aux q-séries et aux résultats que j'ai obtenus dans ce domaine. Enfin, dans le quatrième et dernier chapitre, j'évoquerai les problèmes arithmétiques et diophantiens que j'ai résolus, et qui sont liés à des valeurs aux entiers positifs de fonctions L, comme par exemple la fonction zêta de Riemann, aux q-séries, ainsi qu'au monde modulaire.

Nous regroupons ici sous la dénomination de *fonctions spéciales* les différentes fonctions évoquées ci-dessus que sont les fonctions symétriques, les q-séries, les fonctions L et leurs q-analogues étudiés au chapitre 4.

1.2 L'algèbre des fonctions symétriques

1.2.1 Partitions d'entiers

Une notion élémentaire qui fait l'objet de recherches foisonnantes en combinatoire et en théorie des nombres est celle de *partition d'entiers*. Pour un entier $n \geq 0$ fixé, une partition λ de n, que l'on note généralement $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l) \in \mathbb{N}^l$, est une suite décroissante finie d'entiers naturels de somme n, c'est-à dire que l'on a :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l > 0 \qquad \text{et} \qquad |\lambda| := \sum_{i=1}^{l} \lambda_i = n\,.$$

Ici, l est la *longueur* de λ (parfois notée $l(\lambda)$), et pour $i \in \{1, \ldots, l\}$, les entiers λ_i sont les *parts* de λ. Il est parfois commode d'autoriser un certain nombre (fini ou infini) de parts nulles, en notant $\lambda = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0$. La longueur de λ est alors $l(\lambda) = |\{i \geq 1 | \lambda_i > 0\}|$. On peut aussi écrire toute partition λ à l'aide de la *multiplicité* de chaque part i, qui est notée traditionnellement $m_i = m_i(\lambda) \geq 0$ et qui compte le nombre d'occurences de la part i dans λ. Ainsi toute partition d'entiers peut s'écrire $\lambda = 0^{m_0} 1^{m_1} 2^{m_2} \ldots$.

Les partitions d'entiers apparaissent naturellement lorsque, comme le fit Euler, on considère le développement formel du produit infini $\prod_{k \geq 1} (1 - q^k)^{-1}$. En effet, en utilisant l'écriture des partitions à l'aide des multiplicités, on obtient :

$$\prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - q^k} = \sum_{n \geq 0} p(n) q^n, \tag{1.1}$$

où $p(n)$ est le nombre de partitions de l'entier n. Malgré la simplicité de cette fonction génératrice, la seule formule explicite connue pour $p(n)$ est une expression complexe sous forme de série convergente due à Rademacher en 1937, qui raffine fortement l'expression asymptotique de Hardy-Ramanujan datant de 1918. Cependant, de nombreuses propriétés sont aujourd'hui connues sur les nombres $p(n)$, dont certaines pour lesquelles on dispose d'une démonstration combinatoire (voir par exemple le livre d'Andrews [4], et le survol de Pak [93]). Euler a aussi établi la formule suivante, qui a le même membre de gauche que (1.1) :

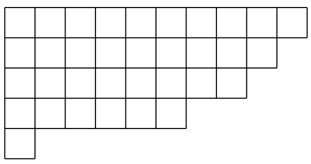
$$\prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - q^k} = \sum_{n \geq 0} \frac{q^n}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}\,. \tag{1.2}$$

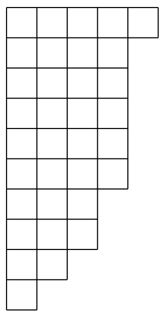
Cette égalité se démontre combinatoirement, en observant que $1/(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)$ est la fonction génératrice des partitions en parts plus petites ou égales à n, et que donc $q^n/(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)$ est celle des partitions de plus grande part n. Les identités (1.1) et (1.2), bien que très simples, établissent à elles seules un lien entre la combinatoire des partitions d'entiers, les *séries hypergéométriques basiques* (appartenant au domaine des q-séries, qui seront définies avec précision au paragraphe 1.3) et le monde des *formes modulaires* : en effet, on peut reconnaître aux membres de gauche de (1.1) et (1.2) l'inverse d'une des *fonctions thetas de Jacobi*, qui, multipliée par $q^{1/24}$, devient une forme modulaire en z de poids 1/2, lorsque l'on a posé $q = \mathrm{e}^{2i\pi z}$ (voir par exemple l'ouvrage introductif de Koblitz [68]). Cette connection entre partitions d'entiers, q-séries et formes modulaires est cruciale dans le sens où elle a entre autres permis d'expliquer et de prouver nombre d'identités découvertes par Ramanujan. Par exemple, les *congruences de Ramanujan* :

$$\begin{aligned} p(5n+4) &\equiv 0 \pmod 5, \\ p(7n+5) &\equiv 0 \pmod 7, \\ p(11n+6) &\equiv 0 \pmod{11}, \end{aligned}$$

furent largement expliquées et généralisées via le monde modulaire (voir par exemple les articles de Ono [91] et Lovejoy-Ono [79]).

Il est souvent pratique d'identifier la partition λ avec son *diagramme de Ferrers*, qui est le sous-ensemble $\{(i,\, j) \,|\, j \geq 1, i \leq \lambda_j\}$ de $\mathbb{N}^2$. Par exemple, les dessins suivants donnent le diagramme de Ferrers de la partition $\lambda = (10, 9, 8, 6, 1)$ de 34 et celui de sa *conjuguée* $\lambda' = (5, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 1)$, obtenue en inversant les lignes et les colonnes dans λ :

$\lambda =$ 

$\lambda' =$ 

Cette visualisation des partitions d'entiers à l'aide des diagrammes de Ferrers est déterminante dans la définition combinatoire des fonctions de Schur qui sera donnée au paragraphe suivant.

1.2.2 Fonctions symétriques

Les notations que j'ai choisi d'adopter sont celles du livre de Macdonald [82].

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble de n variables. Soit $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ l'ensemble des polynômes de n variables à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Un polynôme $P \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ est *symétrique* s'il est invariant sous l'action du groupe des permutations S_n, c'est-à-dire si

$$\forall \sigma \in S_n,\ P(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = P(x_1, \dots, x_n) =: P(X).$$

On note Λ_n cet ensemble de polynômes, qui forme une algèbre pour les lois usuelles, appelée *l'algèbre des polynômes symétriques* à n variables. La base la plus naturelle de cette algèbre est donnée par les polynômes *monomiaux*, notée $m_\lambda(X)$, et indexée par les partitions λ de longueur inférieure ou égale à n (voir [82] pour une définition précise). On peut alors étendre la définition de Λ_n à un nombre infini de variables, en posant $\Lambda := \bigoplus_{k\geq 0} \Lambda^k$ comme étant l'algèbre engendrée par les $(m_\lambda(X))_\lambda$ sans restriction sur la longueur de λ et où X est un ensemble infini de variables. L'ensemble Λ est *l'algèbre des fonctions symétriques*, et ses éléments ne sont plus des polynômes, mais des sommes infinies formelles de monomiales.

Définition 1.1 (Jacobi) *Pour tout ensemble $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ de n variables et toute partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0)$ de longueur $\leq n$, le* polynôme de Schur *$s_\lambda(X)$ est défini par :*

$$\begin{aligned} s_\lambda(X) &:= \sum_{w\in S_n} w\left(x_1^{\lambda_1}\cdots x_n^{\lambda_n}\prod_{i<j}\frac{x_i}{x_i-x_j}\right) \\ &= \frac{\det\left(x_i^{\lambda_j+n-j}\right)_{1\leq i,j\leq n}}{\det\left(x_i^{n-j}\right)_{1\leq i,j\leq n}}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

où $w(P)(x_1, \dots, x_n) := P(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ et toute permutation $\sigma \in S_n$.

On montre directement par le biais de cette définition que $s_\lambda(X) \in \Lambda_n$ et que $(s_\lambda(X))_{l(\lambda)\leq n}$ est une $\mathbb{Z}$-base de Λ_n (voir [82]). On peut étendre de manière formelle cette définition à un ensemble infini de variables, pour obtenir cette fois une $\mathbb{Z}$-base $(s_\lambda(X))_\lambda$ de Λ, où X est infini, appelée base des *fonctions de Schur*. Notons qu'il est possible de récrire cette définition sous une forme plus moderne en utilisant l'opérateur π_i (où $i \geq 1$) de i-ème *différence divisée isobare*, qui agit sur toute fonction f des variables de X de la façon suivante :

$$\pi_i f(X) := \frac{x_i f(X) - x_{i+1} f(\dots, x_{i+1}, x_i, \dots)}{x_i - x_{i+1}}.$$

Alors on a $s_\lambda(X) = \pi_\omega(x_1^{\lambda_1}\cdots x_n^{\lambda_n})$, où π_ω est le *symétriseur maximal* s'écrivant

$$\pi_\omega := (\pi_1)(\pi_2\pi_1)\cdots(\pi_{n-1}\dots\pi_1).$$

La propriété remarquable satisfaite par les polynômes de Schur est donnée par leur interprétation combinatoire en termes de *tableaux de Young semi-standards.*

Définition 1.2 *Soit λ une partition. Un tableau de Young semi-standard T de forme λ est constitué du diagramme de Ferrers de λ que l'on a rempli à l'aide d'entiers strictement positifs de façon croissante sur les lignes et strictement croissante sur les colonnes. Le poids de T est défini par $\omega(T) := (m_1(T), m_2(T), \dots)$, où $m_i(T)$ est la multiplicité de l'entier i dans T.*

Par exemple, le tableau T suivant a pour forme $\lambda = (10, 9, 8, 6, 1)$ et pour poids $\omega(T) = (5, 8, 7, 6, 8)$:

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ \cline{1-9} 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ \cline{1-8} 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ \cline{1-6} 5 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

On a alors l'interprétation combinatoire suivante, qui peut se démontrer à l'aide de l'*identité de Jacobi-Trudi* [82], et de la méthode des *chemins non-intersectants* due à Gessel-Viennot [47] :

$$s_\lambda(X) = \sum_T X^{\omega(T)} = \sum_T x_1^{m_1(T)} \cdots x_n^{m_n(T)}, \tag{1.4}$$

où les sommes portent sur tous les tableaux de Young semi-standards T de forme λ et remplis d'entiers pris dans $\{1, 2, \dots, n\}$.

Cette interprétation permet de choisir de manière équivalente (1.3) ou (1.4) comme définition des polynômes de Schur, suivant l'objectif que l'on s'est fixé. Par exemple, comme signalé auparavant, (1.3) permet de prouver simplement la symétrie, alors que ce n'est plus du tout évident à partir de (1.4). Notons enfin que malgré leur nom, les polynômes de Schur ont bien été considérés en premier lieu sous la forme (1.3) par Jacobi, mais c'est plus tard que Schur a mis en évidence leur lien fondamental avec la *théorie des représentations*. Pour plus de détails sur les aspects combinatoires et algébriques des polynômes de Schur, le lecteur est invité à consulter les livres de Fulton [44] et Stanley [118].

Il est possible de construire une $\mathbb{Z}$-base de Λ_n (respectivement Λ) généralisant les polynômes (respectivement fonctions) de Schur, en définissant les *polynômes de Hall-Littlewood* (respectivement *fonctions de Hall-Littlewood*) de la manière suivante. Pour $|q| < 1$, λ partition et X un ensemble fini ou infini de variables ayant plus d'éléments que $l(\lambda)$, on pose comme dans [82] :

$$P_\lambda(X, q) := \prod_{i \geq 1} \frac{(1-q)^{m_i}}{(1-q)\cdots(1-q^{m_i})} \sum_{w \in S_n} w \left(x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \prod_{i<j} \frac{x_i - q x_j}{x_i - x_j} \right),$$

où le facteur est ajouté pour assurer que le terme en $x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$ dans $P_\lambda(X, q)$ soit égal à 1, et où on rappelle que m_i est la multiplicité de la part i dans λ.

Remarque 1.3 *On a bien ici une généralisation des polynômes (et des fonctions) de Schur, qui sont obtenus pour $q = 0$. L'analogue de la définition combinatoire* (1.4)

prend la forme
$$P_\lambda(X,q)=\sum_T \phi_T(q)X^{\omega(T)},$$
où la somme porte sur les tableaux T de forme λ, et le coefficient $\phi_T(q)$ dépend de la structure du tableau T (voir [82]).

Dans la définition des polynômes de Hall-Littlewood, notre choix du nom du paramètre q n'est pas anodin (ce paramètre est noté t dans [82]), car comme nous le verrons au chapitre 2, les propriétés des polynômes de Hall-Littlewood permettront, en spécialisant les variables de X en fonction de q, d'obtenir des applications intéressantes en termes de q-séries. Ces dernières font l'objet du paragraphe suivant.

1.3 Les q-séries

1.3.1 Quelques explications

Les premières apparitions d'identités invoquant ce que l'on nomme aujourd'hui les *q-séries* remontent à Euler, Cauchy et Gauss. Rappelons que le formalisme des *séries hypergéométriques* fut introduit dans le but de classifier les identités faisant intervenir des termes du type $a(a+1)\cdots(a+n-1)$ (les *factoriels montants*, définis pour tout nombre complexe a et tout entier positif n, et souvent notés à l'aide du *symbole de Pocchammer* $(a)_n$), c'est à dire des extensions de la factorielle d'un entier (consulter le livre d'Andrews-Askey-Roy [12] pour plus de précisions). Les *séries hypergéométriques basiques*, qui seront définies ci-dessous, sont des généralisations des séries hypergéométriques, où pour résumer les factoriels montants sont remplacés par $(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})$. Même s'il n'existe pas de définition rigoureuse des q-séries, ce terme regroupe communément toutes les séries hypergéométriques basiques, ainsi que d'autres classes de fonctions comme les *fonctions thêtas*, qui furent introduites en toute généralité par Ramanujan sous la forme :
$$f(a,b):=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{n(n+1)/2}b^{n(n-1)/2} \quad \text{pour} \quad |ab|<1\,.$$
Cette définition permet, en spécialisant a et b en fonction de q, de recouvrir bon nombre de q-séries, certaines ayant des liens avec la théorie des partitions d'entiers, d'autres avec la théorie des formes modulaires. Par exemple, le *théorème pentagonal d'Euler* :
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{n(3n-1)/2}=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) \tag{1.5}$$
a pour membre de gauche le cas particulier $f(-q,-q^2)$, et pour membre de droite l'inverse de la série génératrice des partitions d'entiers (1.1). Notons au passage qu'en multipliant (1.1) par (1.5), on obtient une formule récursive pour calculer le nombre de partitions d'un entier fixé.

1.3.2 Séries hypergéométriques basiques

Les notations adoptées ici sont celles du livre de Gasper-Rahman [46].

Dans toute la suite de ce texte, on fixe le nombre complexe q (appelé la *base*, et le choix de la lettre q provient du mot « quantique ») tel que $|q| < 1$ (cette condition peut dans certains cas être enlevée, ce qui sera précisé en cas de nécessité, comme par exemple au chapitre 4). On peut alors déformer tout nombre entier n en posant $[n]_q := (1-q^n)/(1-q)$, qui tend bien entendu vers n lorsque q tend vers 1. Il est alors aisé de construire la q-déformation (ou q-analogue) de $n!$. C'est en partant de cette constatation que l'on définit pour tout complexe a le *q-factoriel montant infini* par :

$$(a;q)_\infty := \prod_{n\geq 1}(1-aq^n)\,,$$

et plus généralement pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, le *q-factoriel montant* (ou *q-analogue du symbole de Pocchammer*) :

$$(a;q)_k := \frac{(a;q)_\infty}{(aq^k;q)_\infty}\,.$$

La base q peut être omise lorsqu'il n'y a pas de confusion (en notant $(a)_k$ pour $(a;q)_k$, etc), tout changement de base (par exemple q remplacé par une puissance de q) sera précisé dans les paragraphes concernés. Pour alléger certaines écritures, notons pour $k \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$:

$$(a_1,\ldots,a_m)_k := (a_1)_k \cdots (a_m)_k\,.$$

Rappelons aussi le *coefficient q-binomial* :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k, n-k \end{bmatrix}_q := \frac{(q)_n}{(q)_k(q)_{n-k}}\,,$$

qui, chacun peut s'en convaincre aisément, tend vers le coefficient binomial lorsque q tend vers 1. Le raffinement prend plus de sens lorsque l'on remarque que ceci est un polynôme en q, à coefficients entiers positifs, que l'on sait interpréter en termes de partitions d'entiers, ou de statistiques sur le groupe symétrique (voir par exemple [117, 120]). L'égalité suivante, qui est due à Cauchy, est appelée *identité q-binomiale* (pour une preuve, voir par exemple le livre d'Andrews [4], ou [46]) :

$$\sum_{k\geq 0}\frac{(a)_k}{(q)_k}z^k = \frac{(az)_\infty}{(z)_\infty}\,, \tag{1.6}$$

pour $|z| < 1$. Outre le fait que (1.6) généralise bien la somme binomiale classique (obtenue en posant $a = q^{-n}$, où $n \in \mathbb{N}$, puis $z \to zq^n$ et $q \to 1$), son importance réside dans le fait qu'elle donne un premier exemple de sommation q-hypergéométrique.

Comme dans le cas classique (c'est-à dire $q = 1$), une identité du type (1.6) peut prendre bien des formes, pouvant parfois sembler différentes les unes des autres. Ceci argumente dans le sens de la nécessité de classifier ce genre d'égalités, en utilisant une notation systématique. Bien qu'Euler, Gauss ou Cauchy découvrirent des théorèmes importants dans ce contexte, Heine fut le premier à entamer une étude systématique, et c'est suite à cela que l'on définit aujourd'hui la notion de *série hypergéométrique basique* ${}_{r+1}\phi_s$, pour $r \geq -1$ et $s \geq 0$ entiers :

$$ {}_{r+1}\phi_s\left[\begin{matrix} a_0, a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_s \end{matrix}; q, z\right] := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_0, a_1, \ldots, a_r)_k}{(q, b_1, \ldots, b_s)_k} \left((-1)^k q^{\binom{k}{2}}\right)^{s-r} z^k \,, $$

où les a_j et les b_j sont des nombres complexes. Pour une étude rigoureuse et précise concernant la convergence de telles séries, le lecteur est invité à se référer à [46]. Rappelons simplement que le cas $r = s$ revêt une importance particulière, car le terme quadratique en q disparaissant, la convergence n'est à priori valable que pour $|z| < 1$.

Le membre de gauche de (1.6) s'écrit ainsi par exemple ${}_1\phi_0\left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}; q, z\right]$, et cette identité révèle un autre aspect du cas particulier $r = s$, à savoir le fait qu'il comporte la quasi totalité des identités classiques de sommation et de transformation de séries hypergéométriques basiques.

Rappelons que pour $r = s$, on dit que ${}_{s+1}\phi_s$ est :
- *bien équilibrée* (en anglais, well-poised) si $qa_0 = a_1 b_1 = \cdots = a_s b_s$
- *très bien équilibrée* (en anglais, very-well-poised) si elle est bien équilibrée et de plus $a_1 = q\sqrt{a_0} = -a_2$.

En guise d'illustration de ces définitions, écrivons la *transformation de Watson* (voir [46, Appendix (III.17)], [130]) entre une série hypergéométrique ${}_8\phi_7$ très bien équilibrée et une série ${}_4\phi_3$:

$$ {}_8\phi_7\left[\begin{matrix} a,\, q\sqrt{a}, -q\sqrt{a}, b, c, d, e, q^{-n} \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq/d, aq/e, aq^{n+1} \end{matrix}; q, \frac{a^2 q^{n+2}}{bcde}\right] = \frac{(aq, aq/de)_n}{(aq/d, aq/e)_n}\, {}_4\phi_3\left[\begin{matrix} aq/bc, d, e, q^{-n} \\ aq/b, aq/c, deq^{-n}/a, \end{matrix}; q, q\right] . \quad (1.7) $$

Avant de poursuivre, précisons que dans le cadre des q-séries, le terme de *transformation* désigne habituellement une identité reliant deux sommes, alors qu'une *sommation* correspond à une égalité entre une somme et un produit.

Remarque 1.4 *L'identité* (1.7) *est en fait une transformation entre deux sommes finies, ce qui est dû à la présence du terme* $(q^{-n})_k$*, valant par définition 0 dès que l'indice de sommation* k *dépasse strictement* n*.*

L'importance de (1.7), ainsi qu'une méthode générale pour la prouver, seront expliquées au paragraphe suivant.

Pour clore le présent paragraphe, introduisons la notion de *série hypergéométrique basique bilatérale*, qui fera l'objet d'une attention particulière au chapitre 3 :

$$ {}_r\psi_s\left[\begin{matrix} a_1,\ldots,a_r \\ b_1,\ldots,b_s \end{matrix};q,z\right] := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(a_1,\ldots,a_r)_k}{(b_1,\ldots,b_s)_k} \left((-1)^k q^{\binom{k}{2}}\right)^{s-r} z^k . $$

Pour une étude précise de la convergence, le lecteur peut se référer à [46] ; notons simplement que dans le cas particulier $r = s$, la série ci-dessus converge dès que $|b_1 \cdots b_r/a_1 \cdots a_r| < |z| < 1$. Ces séries bilatérales permettent de relier les mondes hypergéométrique et modulaire, lien dont Ramanujan fut sans conteste le précurseur. Un exemple illustrant ses travaux dans ce cadre est donné par la *sommation* ${}_1\psi_1$ *de Ramanujan* [46, Appendix (II.29)] :

$$ {}_1\psi_1\left[\begin{matrix} a \\ b \end{matrix};q,z\right] = \frac{(q,b/a,az,q/az)_\infty}{(b,q/a,z,b/az)_\infty}, \tag{1.8} $$

valide pour $|b/a| < |z| < 1$. Notons que le théorème pentagonal d'Euler (1.5), ainsi que l'identité q-binomiale (1.6) sont des cas particuliers de (1.8). Cependant, la combinatoire de cette dernière n'a pu être expliquée à l'aide des partitions d'entiers, il a fallu attendre l'introduction de la notion de *surpartitions d'entiers* par Corteel-Lovejoy dans [40] pour en obtenir une interprétation combinatoire.

La sommation la plus générale (contenant le plus de paramètres) de séries hypergéométriques basiques bilatérales est donnée par la *sommation* ${}_6\psi_6$ *de Bailey* [46, Appendix (II.33)] :

$$ \begin{aligned} &{}_6\psi_6\left[\begin{matrix} q\sqrt{a},-q\sqrt{a},b,c,d,e \\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq/d,aq/e \end{matrix};q,\frac{qa^2}{bcde}\right] \\ &\qquad = \frac{(q,aq,q/a,aq/bc,aq/bd,aq/be,aq/cd,aq/ce,aq/de)_\infty}{(q/b,q/c,q/d,q/e,aq/b,aq/c,aq/d,aq/e,a^2q/bcde)_\infty}, \end{aligned} \tag{1.9} $$

où $|qa^2/bcde| < 1$. Il est intéressant de mentionner que (1.9), bien que contenant plus de paramètres que la sommation ${}_1\psi_1$ de Ramanujan (1.8), n'en est pas une généralisation. De nombreuses démonstrations de la sommation ${}_6\psi_6$ de Bailey ont été établies, comme en témoignent par exemple les articles de Bailey [19], Slater-Lakin [115], Andrews [2], Askey-Ismail [16], Askey [15] et Schlosser [107]. Au chapitre 3, nous décrirons deux méthodes générales pour prouver ce genre d'identités bilatérales.

1.3.3 Le lemme de Bailey

Ce dernier paragraphe introductif est dédié à une technique fondamentale de démonstration d'identités de q-séries, qui est basée sur un résultat élémentaire, le *lemme de Bailey*, introduit par ce dernier dans [20]. Quand Bailey écrivit cet article en 1949, son but était de prouver simplement des sommations classiques de q-séries, comme en particulier les célèbres *identités de Rogers-Ramanujan* :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2}}{(q)_k} = \frac{1}{(q, q^4; q^5)_\infty}, \tag{1.10}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2+k}}{(q)_k} = \frac{1}{(q^2, q^3; q^5)_\infty}. \tag{1.11}$$

La première démonstration de ces identités par Rogers en 1894 dans [105] est restée méconnue jusqu'à ce que Ramanujan les redécouvre en 1917. C'est ensuite qu'elles firent l'objet d'une attention toute particulière, devenant sans doute les identités les plus connues en théorie des partitions d'entiers. Elles ont ainsi été prouvées et généralisées de nombreuses façons (voir par exemple les articles [8, 27, 29, 45, 93, 95, 124] et les références qui y sont citées). Notons que (1.10) et (1.11) établissent, à l'image de (1.5), un lien entre q-séries (membres de gauche) et formes modulaires (membres de droite).

La méthode de Bailey repose sur la notion de *paire de Bailey*, que l'on peut définir comme suit (voir par exemple le livre [12]). On dit que deux q-séries $(\alpha_n(a,q),\ \beta_n(a,q))$ forment une paire de Bailey relative à a et q lorsqu'elles sont reliées de la manière suivante :

$$\beta_n(a,q) = \sum_{r=0}^{n} \frac{\alpha_r(a,q)}{(q)_{n-r}(aq)_{n+r}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1.12}$$

Le lemme de Bailey décrit alors comment, à partir d'une paire de Bailey, on peut en construire automatiquement une autre, contenant plus de paramètres.

Lemme 1.5 (Bailey) *Si $(\alpha_n(a,q),\ \beta_n(a,q))$ est une paire de Bailey relative à a et q, alors il en est de même pour $(\alpha'_n(a,q),\ \beta'_n(a,q))$, où*

$$\alpha'_n(a,q) := \frac{(\rho_1,\rho_2)_n (aq/\rho_1\rho_2)^n}{(aq/\rho_1, aq/\rho_2)_n}\, \alpha_n(a,q)$$

et

$$\beta'_n(a,q) := \sum_{j\geq 0} \frac{(\rho_1,\rho_2)_j (aq/\rho_1\rho_2)_{n-j} (aq/\rho_1\rho_2)^j}{(q)_{n-j}(aq/\rho_1, aq/\rho_2)_n}\, \beta_j(a,q).$$

Notons que cette écriture du lemme de Bailey est en fait due à Andrews, qui s'est aperçu le premier du caractère itératif de ce résultat (voir [9, 10]) : en effet, il est clair que si l'on trouve une paire de Bailey, alors ce lemme en donne une infinité, et chacune de ces paires de Bailey produit une identité via la relation (1.12). Depuis, le lemme de Bailey a été très étudié et généralisé de nombreuses façons par entre autres Agarwal-Andrews-Bressoud [1], Andrews-Berkovich [11], Bressoud-Ismail-Stanton [29], Paule [94], Sills [111] ou Warnaar [127] (voir aussi à ce propos le survol de Warnaar [123]). Une démonstration du lemme de Bailey consiste, comme dans [10, 12], à utiliser l'identité *q-Pfaff-Saalschütz* [46, Appendix (II.12)], due à Jackson, et valide pour $n \in \mathbb{N}$:

$$ {}_3\phi_2\left[\begin{matrix} a, b, q^{-n} \\ c, abq^{1-n}/c \end{matrix}; q, q\right] = \frac{(c/a, c/b)_n}{(c, c/ab)_n} \cdot \tag{1.13}$$

Une question naturelle est bien entendu de trouver des paires de Bailey intéressantes, c'est-à dire telles que α_n et β_n aient une forme simple. Rappelons dans ce sens la *paire de Bailey unitaire* (voir [12]) :

$$\alpha_n = (-1)^n q^{n(n-1)/2} \frac{(a)_n(1-aq^{2n})}{(1-a)(q)_n}, \qquad \beta_n = \delta_{n,0}, \tag{1.14}$$

où $\delta_{n,0}$ désigne le *symbole de Kronecker*. Pour prouver que (1.14) vérifie (1.12), on peut soit utiliser une identité élémentaire due à Agarwal (voir [12]), soit inverser la relation (1.12) en utilisant par exemple une inversion de matrices de Krattenthaler [70]. Remarquons ensuite que deux itérations du lemme de Bailey à la paire (1.14) fournit une paire de Bailey à cinq paramètres a, ρ_1, ρ_2, ρ_3 et ρ_4. L'écriture de (1.12) pour cette dernière correspond exactement à la transformation de Watson (1.7).

Il est temps de remarquer que (1.7) est une généralisation finie à six paramètres des identités de Rogers-Ramanujan (1.10) et (1.11). En effet, il suffit de faire tendre b, c, d, e, et ensuite n vers l'infini dans (1.7), puis de s'apercevoir que le membre de droite se factorise pour donner (1.10) (respectivement (1.11)) lorsque $a = 1$ (respectivement $a = q$), grâce au *triple produit de Jacobi* [46, Appendix (II.28)], que l'on peut écrire sous la forme :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n z^n q^{\binom{n}{2}} = (q, z, q/z)_\infty. \tag{1.15}$$

En utilisant cette méthode, Slater [112, 113] a établi une liste de 130 identités de type Rogers-Ramanujan, qui se prouvent toutes via le lemme de Bailey et différentes paires de Bailey. Ceci illustre l'efficacité de cette approche pour prouver des identités de q-séries, et il en sera donné une extension au chapitre 3.

En suivant le raisonnement d'Andrews, qui exploite tout le caractère itératif du lemme de Bailey en l'appliquant $m+1$ fois à la paire de Bailey (1.14), on obtient le résultat ci-dessous.

Théorème 1.6 (Andrews) *Pour tous entiers $m \geq 0$ et $N \geq 0$, pour tous nombres* *complexes a, $b_1, c_1, \ldots, b_{m+1}, c_{m+1}$, on a :*

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1-aq^{2k}}{1-a} \frac{(a, b_1, c_1, \ldots, b_{m+1}, c_{m+1}, q^{-N})_k}{(q, aq/b_1, aq/c_1, \ldots, aq/b_{m+1}, aq/c_{m+1}, aq^{N+1})_k} \times \left(\frac{a^{m+1} q^{m+1+N}}{b_1 c_1 \cdots b_{m+1} c_{m+1}} \right)^k$$
$$= \frac{(aq, aq/b_{m+1}c_{m+1})_N}{(aq/b_{m+1}, aq/c_{m+1})_N} \sum_{0 \le l_1 \le \cdots \le l_m \le N} \frac{a^{l_1+\cdots+l_{m-1}} q^{l_1+\cdots+l_m}}{(b_2c_2)^{l_1} \cdots (b_m c_m)^{l_{m-1}}} \times \frac{(q^{-N})_{l_m}}{(b_{m+1}c_{m+1}q^{-N}/a)_{l_m}} \prod_{i=1}^{m} \frac{(b_{i+1}, c_{i+1})_{l_i}}{(aq/b_i, aq/c_i)_{l_i}} \frac{(aq/b_i c_i)_{l_i - l_{i-1}}}{(q)_{l_i - l_{i-1}}} . \quad (1.16)$$

Andrews a découvert et prouvé (1.16) dans [3], avant de la redémontrer dans [8] comme une conséquence directe du lemme de Bailey (voir aussi [9]). La présence de nombreux paramètres libres donne à cette égalité un degré de généralité très élevé dans le contexte des séries hypergéométriques basiques très bien équilibrées. En effet, lorsque pour tout $i \in \{1, \ldots, m+1\}$, $aq/b_i \neq q^{-N}$ et $aq/c_i \neq q^{-N}$, le membre de gauche de (1.16) peut s'écrire :

$$_{2m+6}\phi_{2m+5} \left[\begin{matrix} a, q\sqrt{a}, -q\sqrt{a}, b_1, c_1, \ldots, b_{m+1}, c_{m+1}, q^{-N} \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b_1, aq/c_1, \ldots, aq/b_{m+1}, aq/c_{m+1}, aq^{N+1} \end{matrix} ; q, z \right] ,$$

avec $z = a^{m+1} q^{m+1+N} / b_1 c_1 \cdots b_{m+1} c_{m+1}$. Si l'un des facteurs b_i ou c_i, par exemple b_1, s'écrit aq^{1+N}, alors la série hypergéométrique ci-dessus n'est plus une somme finie. En effet, le facteur $(q^{-N})_k$ du numérateur, garantissant cette finitude, se simplifie avec le dénominateur $(aq/b_1)_k$. Le membre de gauche de (1.16), qui est toujours une somme finie, peut alors être vu comme limite d'une série hypergéométrique basique très bien équilibrée :

$$\lim_{\delta \to 0} {}_{2m+6}\phi_{2m+5} \left[\begin{matrix} a, q\sqrt{a}, -q\sqrt{a}, aq^{1+N+\delta}, c_1, \ldots, q^{-N} \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, q^{-N-\delta}, aq/c_1, \ldots, aq^{N+1} \end{matrix} ; q, zq^{-\delta} \right] .$$

Remarque 1.7 *Dans le cas $m = 1$, l'égalité* (1.16) *est exactement la transformation finie de Watson* (1.7), *ce qui permet d'affirmer que* (1.16) *est une généralisation à $2m+4$ paramètres des identités de Rogers-Ramanujan.*

Chapitre 2

Sommations de fonctions symétriques

2.1 Combinatoire et fonctions symétriques

2.1.1 Fonctions de Schur et partitions planes

L'interprétation combinatoire des fonctions de Schur en termes de tableaux semi-standards (1.4) permet, via la *correspondance de Robinson-Schensted-Knuth* (voir par exemple [44, 118], ainsi que [82]), de montrer combinatoirement les sommations suivantes :

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda}(X) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i} \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{1}{1-x_i x_j}, \tag{2.1}$$

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda}(X) s_{\lambda}(Y) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{1-x_i y_j}, \tag{2.2}$$

où n et m sont des entiers positifs ou nuls, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ sont des ensembles indépendants de variables, et les sommes portent sur toutes les partitions d'entiers. L'identité (2.1) (respectivement (2.2)) est dite de *type Littlewood* (respectivement *type Cauchy*), du fait de la forme des produits aux membres de droite.

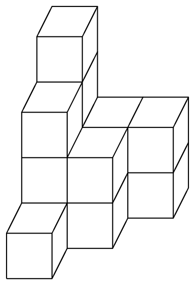
De telles égalités établissent un lien entre les fonctions symétriques et les problèmes d'énumération de *partitions planes*, qui furent introduites par MacMahon au début du vingtième siècle [83]. Celles-ci sont des généralisations en trois dimensions des diagrammes de Ferrers représentant les partitions d'entiers.

Définition 2.1 *Une partition plane π est un ensemble fini de points de $\mathbb{N}^3$ tels que*

$$((r,s,t) \in \pi \text{ et } 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq s,\ 1 \leq k \leq t) \Rightarrow (i,j,k) \in \pi.$$

La représentation graphique des partitions planes est donnée par un empilement de cubes, et le *poids* d'une partition plane π est le nombre de cubes, noté $|\pi|$. Stanley a montré dans [116] (voir aussi [82]) comment utiliser les fonctions de Schur dans la théorie des partitions planes. En effet, dans le plan, on peut représenter une partition plane π par un diagramme de Ferrers λ (la *forme de* π) où chaque cellule est munie d'un entier représentant le nombre de cubes correspondants dans l'axe vertical, c'est-à-dire qu'on a un tableau T_λ constitué d'un diagramme de Ferrers rempli d'entiers de manière décroissante (mais pas nécessairement strictement) sur les lignes et les colonnes.

Par exemple, les dessins suivants représentent une partition plane π de poids 14, de forme $\lambda = (3, 2, 1)$, et le tableau T_λ correspondant :

$\pi =$ 

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} 1 & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Il est alors clair que l'interprétation combinatoire des fonctions de Schur (1.4) permet d'affirmer que la fonction génératrice (de la variable q, suivant le poids) des partitions planes en colonnes strictes (restriction due à la définition des tableaux semi-standards), et de forme λ (telle que $l(\lambda) \leq n$) est égale à $s_\lambda(q^n, q^{n-1}, \ldots, q)$. Comme l'explique Macdonald dans [82], il n'est alors pas difficile d'en déduire la fonction génératrice des partitions planes, trouvée par MacMahon [83] :

$$\sum_{\pi} q^{|\pi|} = \prod_{n \geq 1} \frac{1}{(1-q^n)^n} \cdot$$

Les partitions planes et les problèmes d'énumération les concernant ont trouvé un regain d'intérêt suite à la découverte de leur lien avec un autre objet combinatoire, mais issu de la mécanique statistique : les *matrices à signes alternants*. Celles-ci furent définies par Mills-Robbins-Rumsey [86] de la façon suivante.

Définition 2.2 *Pour $n \in \mathbb{N}$, une matrice à signe alternant de taille n, est une matrice carrée $n \times n$ constituée uniquement de 0, 1 et -1, ces deux derniers alternant suivant chaque ligne et chaque colonne, et telle que la somme des valeurs de chaque ligne et chaque colonne vaille 1.*

Zeilberger, dans [132], a prouvé la conjecture des matrices à signes alternants de taille n, stipulant que leur nombre est :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(3k+1)!}{(n+k)!},$$

et Kuperberg en a donné une démonstration simplifiée dans [75] en utilisant le *modèle de glace à six sommets*. La chose la plus frappante dans ce résultat est le fait que ce nombre compte aussi les *partitions planes descendantes d'ordre* n introduites par Andrews [5, 6, 7] dans le but de démontrer la forme faible de la conjecture de Macdonald comptant le nombre de *partitions planes cycliquement symétriques dans une boîte* $n \times n \times n$ [6]. Cette conjecture, qui donne la fonction génératrice de ces objets, fut ensuite démontrée par Mills-Robbins-Rumsey [85] dans toute sa généralité. On sait donc aujourd'hui qu'il y a autant de partitions planes descendantes d'ordre n que de matrices à signes alternants de taille n, mais on ne connait pas de bijection reliant ces deux familles d'objets.

Tout cela justifie l'intérêt porté au calcul de fonctions génératrices de classes de partitions planes. En utilisant l'interprétation des fonctions de Schur par les tableaux de Young, on montre (voir par exemple [28]) que la fonction génératrice des partitions planes symétriques (c'est-à dire vérifiant $(r, s, t) \in \pi \Leftrightarrow (s, r, t) \in \pi$) incluses dans la boite $n \times n \times m$ est :

$$G(q) = \sum_{\lambda \subseteq (m^n)} s_\lambda(q^{2n-1}, q^{2n-3}, \ldots, q)\,.$$

Il est alors nécessaire d'évaluer ce type de sommes de fonctions de Schur, qui sont des raffinements (finis) des sommations (infinies) données par (2.1) ou (2.2). MacMahon [83] a conjecturé l'identité suivante, prouvée ensuite par Andrews [5] et Macdonald indépendamment [82] en utilisant les polynômes de Hall-Littlewood et les formules de Weyl, puis plus récemment par Bressoud [26] par récurrence :

$$G(q) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m} \frac{1-q^{1+2i+k-2}}{1-q^{2i+k-2}} \prod_{1\le i<j\le n}\prod_{k=1}^{m} \frac{1-q^{2+2(i+j+k-2)}}{1-q^{2(i+j+k-2)}}\,.$$

D'autres démonstrations et raffinements de cette ex-conjecture de MacMahon peuvent aussi être trouvées dans les articles plus récents de Fischer [42] ou Krattenthaler [69].

2.1.2 Polynômes de Hall-Littlewood et q-séries

Macdonald a donné une méthode pour, à partir de (2.1), en déduire une forme finie [82]. Cette méthode n'utilise pas la combinatoire des fonctions de Schur, mais leur définition (1.3). La conséquence de cette remarque est que l'on peut, comme le fait Macdonald, trouver une forme finie de (2.1) pour les polynômes de Hall-Littlewood directement, en partant de :

$$\sum_{\lambda} P_\lambda(X, q) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{1-qx_ix_j}{1-x_ix_j}\,, \qquad (2.3)$$

qui se prouve par récurrence sur n et à l'aide des *formules de Pieri*. Dans ce qui suit, une partition d'entiers sera dite paire si toutes ses parts le sont. Stembridge, dans

[119], a exploité la méthode de Macdonald pour établir une forme finie de :

$$\sum_{\lambda\,\mathrm{paire}} P_\lambda(X,q) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i^2} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{1-qx_ix_j}{1-x_ix_j}\,, \tag{2.4}$$

qui se déduit de (2.3) et des formules de Pieri (voir [82]). Ces formes finies sont des expressions de $\sum_{\lambda\subseteq(m^n)} P_\lambda(X,q)$ et $\sum_{\lambda\,\mathrm{paire}\subseteq(m^n)} P_\lambda(X,q)$ sous forme de sommes de produits, qui se réduisent à (2.3) et (2.4) lorsque m tend vers l'infini. Outre des applications en termes de fonctions génératrices de partitions planes, la conséquence étonnante qu'en a donné Stembridge dans [119] est que lorsque les variables sont spécialisées en $X=\{z,zq,\dots,zq^{n-1}\}$ (appelée *spécialisation principale*), on obtient les identités de Rogers-Ramanujan (1.10) et (1.11), ainsi qu'une liste de formules du même type. Dans le paragraphe suivant, cette méthode sera illustrée à travers un autre exemple de sommation de polynômes de Hall-Littlewood du à Kawanaka [67].

Dans [14], Andrews-Schilling-Warnaar établissent une généralisation du lemme de Bailey, appelée A_2-*lemme de Bailey*, qui est un premier pas vers une extension au niveau de *l'algèbre de Lie* A_{n-1}. Ces auteurs en déduisent une liste d'identités correspondant aux caractères de l'algèbre W_3 (*l'algèbre* W_n étant une généralisation au niveau A_{n-1} de *l'algèbre de Virasoro*). En toute généralité, les caractères de l'algèbre W_n peuvent être exprimés sous forme de produits via l'identité de Macdonald de type A_{n-1} [81]. Dans le cas particulier $n=3$, une conséquence est donnée dans [14] par l'obtention des trois A_2-*identités de Rogers-Ramanujan*, dont la plus simple s'écrit :

$$\sum_{n_1,\,n_2=0}^{\infty} \frac{q^{n_1^2-n_1n_2+n_2^2}}{(q)_{n_1}} \begin{bmatrix} 2n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}_q = \frac{1}{(q,q,q^3,q^4,q^6,q^6;q^7)_\infty}\,. \tag{2.5}$$

Dans ce contexte, les identités de Rogers-Ramanujan (1.10) et (1.11) correspondent à A_1, et le lemme de Bailey classique pourrait être renommé A_1-lemme de Bailey. Warnaar, dans [129], a établi la sommation de polynômes de Hall-Littlewood suivante :

$$\sum_{\lambda,\,\mu} q^{n(\lambda)+n(\mu)-(\lambda'|\mu')} P_\lambda(X,q)P_\mu(Y,q) = \prod_{i\ge1} \frac{1}{(1-x_i)(1-y_i)} \prod_{i,j\ge1} \frac{1-x_iy_j}{1-x_iy_j/q}\,, \tag{2.6}$$

où X et Y sont infinis, $n(\lambda):=\sum_{i\ge1}(i-1)\lambda_i$ et $(\lambda|\mu):=\sum_{i\ge1}\lambda_i\mu_i$. Dans ce même article, Warnaar déduit (2.5) de (2.6), ce qui semble indiquer que la théorie des polynômes de Hall-Littlewood pourrait être un bon point de vue pour construire une A_{n-1}-généralisation des formules de Rogers-Ramanujan.

Comme signalé dans [129], il semble difficile d'obtenir une version finie de (2.6) par la méthode de Macdonald, même si Warnaar y parvient dans le cas A_1, sous la forme :

$$\sum_{\lambda\subseteq(k^n)} q^{n(\lambda)} P_\lambda(X,q) = \sum_{I\subseteq[n]} q^{k\binom{|I|}{2}} \prod_{i\in I} x_i^k \times \prod_{i\in I} \frac{1}{1-x_i^{-1}q^{1-|I|}} \prod_{j\notin I} \frac{1}{1-x_jq^{|I|}} \prod_{i\in I,\, j\notin I} \frac{x_i-qx_j}{x_i-x_j}\,, \tag{2.7}$$

où k et n sont des entiers positifs, $[n] := \{1,\dots,n\}$, $X = \{x_1,\dots,x_n\}$ et $|I|$ est le cardinal de l'ensemble I. Il est en fait possible de généraliser (2.7) en donnant une forme finie de l'identité suivante due à Macdonald [82] :

$$\sum_\lambda q^{n(\lambda)}(a;q^{-1})_{l(\lambda)} P_\lambda(X,q) = \prod_{i=1}^n \frac{1-ax_i}{1-x_i}\,, \tag{2.8}$$

qui en suivant Kaneko dans [64], peut être considéré comme un *théorème q-binomial pour les polynômes de Hall-Littlewood.*

Remarque 2.3 *Le membre de droite de (2.8) ne dépend pas du paramètre q, et sachant que $P_\lambda(X,0) = s_\lambda(X)$, il est tentant de faire tendre q vers 0 dans cette égalité, en prenant soin de vérifier l'interversion de la limite et de la somme. Comme on a $n(\lambda) = \sum_{i\geq 1}\binom{\lambda'_i}{2}$, le membre de gauche est nul dès que la partition λ n'est ni vide, ni une équerre, c'est-à dire de la forme $\lambda = (r,1,\dots,1)$, avec r entier positif. Ainsi, on obtient la fonction génératrice des fonctions de Schur en forme d'équerres :*

$$1 + (1-a)\sum_{\lambda \text{ équerre}} (-a)^{l(\lambda)-1} s_\lambda(X) = \prod_{i=1}^n \frac{1-ax_i}{1-x_i}\,.$$

Voici donc la forme finie de (2.8) que nous avons obtenue dans un travail non publié.

Théorème 2.4 *Soit n un entier positif et un ensemble $X = \{x_1,\dots,x_n\}$ de n variables. Alors pour tout nombre complexe a et tout entier positif k, on a :*

$$\sum_{\lambda\subseteq(k^n)} q^{n(\lambda)}(a;q^{-1})_{l(\lambda)}(a;q^{-1})_{n-m_k} P_\lambda(X,q) = \sum_{I\subseteq[n]} q^{k\binom{|I|}{2}}(a;q^{-1})_{|I|}(a;q^{-1})_{n-|I|} \prod_{i\in I} x_i^k \times \prod_{i\in I} \frac{1-ax_i^{-1}q^{1-n}}{1-x_i^{-1}q^{1-|I|}} \prod_{j\notin I} \frac{1-ax_j}{1-x_jq^{|I|}} \prod_{i\in I,\, j\notin I} \frac{x_i-qx_j}{x_i-x_j}\,, \tag{2.9}$$

où $[n] := \{1,\dots,n\}$ et $|I|$ est le cardinal de l'ensemble I.

Considérons la spécialisation principale $x_i = zq^{i-1}$ dans (2.9), et remarquons que dans ce cas :

$$\prod_{i\in I,\, j\notin I} \frac{x_i-qx_j}{x_i-x_j} \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \exists r\in\{0,\dots,n\} \,|\, I = \{x_1,\dots,x_r\}\,.$$

Remplaçons alors λ par λ' au membre de gauche, alors la propriété classique [82]

$$P_{\lambda'}(X,q) = z^{|\lambda|} q^{n(\lambda')} \begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix}_q , \tag{2.10}$$

où $\begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix}_q := (q)_n/(q)_{n-\lambda_1}(q)_{\lambda_1-\lambda_2}\cdots$, fournit la conséquence suivante.

Corollaire 2.5 *Pour n et k entiers positifs, on a :*

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda\subseteq(n^k)} z^{|\lambda|} q^{2n(\lambda')} (a;q^{-1})_{\lambda_1} (a;q^{-1})_{n-\lambda_k} \begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix}_q &= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r z^{(k+1)r} q^{(2k+3)\binom{r}{2}} \\ \times (1-zq^{2r-1}) \frac{(q^{n-r+1})_r (azq^r)_{n-r} (a, aq^{1-n}/z;q^{-1})_r (a;q^{-1})_{n-r}}{(q)_r (zq^{r-1})_{n+1}} &. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Lorsque n tend vers l'infini, l'identité (2.11) se réduit au résultat de Stembridge [119, Theorem 3.4 (b)] avec $b=0$. Si on fait ensuite tendre k vers l'infini, sous la condition $|z|<1$, alors le résultat est :

$$\sum_{\lambda} z^{|\lambda|} q^{2n(\lambda')} \frac{(a;q^{-1})_{\lambda_1}}{\prod_{i\geq 1}(q)_{\lambda_i-\lambda_{i+1}}} = \frac{(az)_\infty}{(z)_\infty},$$

dont le membre de droite est identique à celui du théorème q-binomial (1.6), et qui en extrayant le coefficient en z^r (avec $r\geq 0$ entier) des deux côtés via (1.6) conduit à :

$$\sum_{|\lambda|=r} q^{2n(\lambda')} \frac{(a;q^{-1})_{\lambda_1}}{\prod_{i\geq 1}(q)_{\lambda_i-\lambda_{i+1}}} = \frac{(a)_r}{(q)_r}.$$

En conclusion de ce paragraphe, il serait intéressant de trouver un lemme de Bailey pour les polynômes de Hall-Littlewood, qui permettrait d'une part d'étendre les sommations finies du type (2.9), et d'autre part de construire des identités de Rogers-Ramanujan pour l'algèbre de Lie A_{n-1}, généralisant ainsi (2.5).

2.2 Sommations de type Littlewood

2.2.1 Forme finie d'une sommation de Kawanaka

Nous avons vu au paragraphe précédent les deux exemples (2.3) et (2.4) de sommations de type Littlewood, dont les versions finies de Macdonald et Stembridge ont des applications intéressantes en termes de q-séries et de partitions planes. Dans [67], Kawanaka prouve l'identité suivante, qui est elle aussi de type Littlewood :

$$\sum_{\lambda} \left(\prod_{i\geq 1} (-q)_{m_i} \right) P_\lambda(X,q^2) = \prod_{i\geq 1} \frac{1+qx_i}{1-x_i} \prod_{i<j} \frac{1-q^2x_ix_j}{1-x_ix_j}, \tag{2.12}$$

où X est un ensemble (fini ou infini) de variables x_i. Kawanaka montre dans [66, 67] que cette identité possède une interprétation en terme de théorie des représentations du groupe linéaire sur les corps finis. Plus précisemment, (2.12) code le fait que l'espace symétrique $GL_n(\mathbb{F}_{p^2})/GL_n(\mathbb{F}_p)$ (où $GL_n(\mathbb{F}_p)$ est le groupe linéaire sur le corps fini à p éléments) est sans multiplicité. Nous avons montré dans [54] que cette identité est en fait une conséquence directe d'une des formules de Pieri et de la sommation (2.3) de Macdonald. Notons que dans [67], Kawanaka conjecture une extension de (2.12) aux *polynômes de Macdonald*, qui sont des polynômes symétriques à deux paramètres généralisant les polynômes de Hall-Littlewood [82]. Cette conjecture a été prouvée récemment par Langer-Schlosser-Warnaar dans [77] à l'aide d'identités de *séries hypergéométriques elliptiques* (voir par exemple [46]), qui sont des généralisations des séries hypergéométriques basiques.

Nous avons trouvé dans [54] la forme finie suivante de (2.12).

Théorème 2.6 *Soit n un entier positif et $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble de n variables. Alors pour tout entier positif k, on a :*

$$\sum_{\lambda\subseteq(k^n)} \left(\prod_{i=1}^{k-1}(-q)_{m_i}\right) P_\lambda(X,q^2)$$

$$= \sum_{\xi\in\{\pm1\}^n} \prod_i x_i^{k(1-\xi_i)/2} \prod_i \frac{1+qx_i^{\xi_i}}{1-x_i^{\xi_i}} \prod_{i<j} \frac{1-q^2x_i^{\xi_i}x_j^{\xi_j}}{1-x_i^{\xi_i}x_j^{\xi_j}}, \quad (2.13)$$

où la somme porte sur toutes les suites $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ telles que pour tous les entiers i, on ait $\xi_i \in \{-1; 1\}$.

Remarque 2.7 *Dans le cas des fonctions de Schur donné par $q = 0$, le membre de droite de (2.13) peut s'écrire comme un quotient de deux déterminants, ce qui redonne la forme finie de (2.1) trouvée par Macdonald [82], et utile pour exprimer la fonction génératrice des partitions planes symétriques contenues dans la boîte $n \times n \times k$.*

Comme dans le cas du Théorème 2.4, il est possible, en utilisant une version adaptée de la spécialisation principale (en fait $x_i = zq^{2i-2}$, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$), de déduire la formule générale de q-séries suivante.

Corollaire 2.8 *Pour n et k entiers positifs, on a :*

$$\sum_{\lambda\subseteq(n^k)} z^{|\lambda|} q^{n_2(\lambda)} \begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix}_{q^2} \prod_{i=1}^{k-1} (-q)_{\lambda_i-\lambda_{i+1}}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r z^{kr} q^{(k+1)r^2} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_{q^2} \frac{(-z)_{2n+1}}{(z^2q^{2r};q^2)_{n+1}} (1 - zq^{2r}), \quad (2.14)$$

où $n_2(\lambda) := \sum_i \lambda_i^2$.

Dans [54], nous prouvons douze identités de type Rogers-Ramanujan en nous inspirant fortement de (2.14). Il est aussi expliqué que toutes ces identités sont en fait des cas particuliers de la forme générale d'Andrews (1.16), elle-même conséquence du lemme de Bailey. Il se trouve d'ailleurs que toutes les formules de type Rogers-Ramanujan obtenues jusqu'a présent par la technique de sommations finies (de type Littlewood) de polynômes de Hall-Littlewood sont des conséquences de (1.16). Cette remarque, cumulée à celle qui clôt le paragraphe 2.1, pousse à chercher un lemme de Bailey pour les polynômes de Hall-Littlewood.

2.2.2 Une généralisation due à Warnaar

Étant données les quelques formules de sommation de polynômes de Hall-Littlewood vues jusqu'à présent (qui sont en fait celles de Macdonald (2.3), (2.4) et (2.8), celle de Warnaar (2.6) et celle de Kawanaka (2.12)), il est légitime de se poser la question d'une structure parmi celles-ci. Comme expliqué dans le cas des fonctions de Schur au début du paragraphe 2.1.1, on peut distinguer suivant la forme des produits au membre de droite deux types de sommations : le type Littlewood, et le type Cauchy. Parmi les sommations ci-dessus, les deux premières de Macdonald et celle de Kawanaka sont de type Littlewood, alors que la troisième de Macdonald et celle de Warnaar sont de type Cauchy.

Dans [128], Warnaar a en fait prouvé une généralisation de (2.3), (2.4), (2.12), qui couvre aussi quatre autres identités de type Littlewood (dont une n'avait d'ailleurs encore jamais été découverte auparavant). Pour énoncer ce résultat, rappelons que les *polynômes de Rogers-Szëgo* sont définis par $H_m(z;q) := \sum_{i=0}^{m} z^i \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_q$, où z est une variable complexe et m est un entier positif ou nul. Cette définition peut être étendue à toute partition λ en posant $h_\lambda(z;q) := \prod_i H_{m_i}(z;q)$. Enfin, on note λ_e (respectivement λ_o) la partition formée des parts paires (respectivement impaires) de λ.

Théorème 2.9 (Warnaar) *Pour X un ensemble fini ou infini de variables x_i, on a l'identité formelle :*

$$\sum_\lambda a^{l(\lambda_o)} h_{\lambda_e}(ab;q) h_{\lambda_o}(b/a;q) P_\lambda(X,q) = \prod_{i\geq 1} \frac{(1+ax_i)(1+bx_i)}{(1-x_i)(1+x_i)} \prod_{i<j} \frac{1-qx_ix_j}{1-x_ix_j} \cdot \quad (2.15)$$

Dans [128], Warnaar pose la question de l'existence d'une forme finie de (2.15), mais il ne parvient à en trouver une que dans un cas particulier, laissant ouverte la question générale. Ce cas particulier est cependant une extension de notre forme finie (2.13), et la spécialisation principale conduit bien sûr à une généralisation de (2.14). Notons pour finir que Warnaar reformule dans le dernier paragraphe de [128] l'identité (2.15) en utilisant le formalisme des λ-*anneaux* (notations *pléthystiques*), lui-même utilisé par Lascoux dans [78] dans le cadre des sommations de fonctions de Schur.

2.3 Sommations de type Cauchy

2.3.1 Forme finie de la formule de Cauchy

Le paragraphe précédent a permis de voir qu'il existe de nombreuses formules de sommations de polynômes de Hall-Littlewood, que les formules de type Littlewood sont contenues dans le résultat de Warnaar (2.15) et que l'on ne sait que pour certaines d'entre elles en donner une forme finie. Seul le résultat (2.9) (et donc son cas particulier (2.7)) exprime une forme finie pour une sommation de type Cauchy. Il est donc naturel de poser la question d'une forme finie pour l'extension suivante de (2.2), qui est la *formule de Cauchy pour les polynômes de Hall-Littlewood* [82] :

$$\sum_{\lambda} b_\lambda(q) P_\lambda(X,q) P_\lambda(Y,q) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} \frac{1-qx_iy_j}{1-x_iy_j} =: \Phi(X,Y)\,, \tag{2.16}$$

où $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$ et $Y = \{y_1,\ldots,y_m\}$ sont des ensembles indépendants de variables et $b_\lambda(q) := \prod_{i\geq 1}(q)_{m_i}$. Notons au passage que l'on obtient le cas particulier $a=0$ de la formule q-binomiale pour les polynômes de Hall-Littlewood (2.8) en posant $Y = \{1,q,q^2,\ldots\}$, avec m infini. Ceci confirme bien que cette dernière et son extension finie (2.9) sont de type Cauchy.

Pour tout ensemble de variables A, on note $1/A$ l'ensemble des inverses des éléments de A et $p(A)$ le produit des éléments de A. Nous avons démontré le résultat suivant, qui n'a pas encore été publié, car il fait partie d'un travail en cours [53] sur lequel nous reviendrons au prochain paragraphe.

Théorème 2.10 *Soient n et m deux entiers tels que $0<n\leq m$, et deux ensembles indépendants de variables $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$ et $Y = \{y_1,\ldots,y_m\}$. Alors pour tout entier positif k, on a :*

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\subseteq(k^n)} b_{\lambda,k}(q) P_\lambda(X,q) P_\lambda(Y,q) = &\sum_{\substack{A\subseteq X,\, B\subseteq Y\\ |A|=|B|}} p(A)^k p(B)^k \\ &\times \Phi(X\setminus A, Y\setminus B)\;\Phi(1/A,1/B)\;\Phi(1/A,X\setminus A)\;\Phi(1/B,Y\setminus B)\,,\end{aligned} \tag{2.17}$$

où $b_{\lambda,k}(q) := \prod_{i=1}^{k-1}(q)_{m_i}$.

Comme aux paragraphes 2.1 et 2.2, la spécialisation principale des polynômes de Hall-Littlewood (2.10), appliquée à (2.17) en posant $X = \{z,zq,\ldots,zq^{n-1}\}$ et $Y = \{z,zq,\ldots,zq^{m-1}\}$, fournit la conséquence suivante.

Corollaire 2.11 *Pour des entiers $n\leq m$ et $k\geq 1$, on a :*

$$\begin{aligned}&\sum_{\lambda\subseteq(n^k)} z^{2|\lambda|} q^{2n(\lambda')} b_{\lambda',k}(q) \begin{bmatrix} n\\ \lambda\end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m\\ \lambda\end{bmatrix}_q \\ &\qquad = \sum_{r\geq 0} z^{2kr} q^{r+(2k+2)\binom{r}{2}} \begin{bmatrix} n\\ r\end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m\\ r\end{bmatrix}_q \frac{(z^2q^{n+r})_{n-r}(z^2q^{-1})_r}{(z^2q^{r-1})_{n+1}} (1-z^2q^{2r-1})\,.\end{aligned}$$

Lorsque n et m tendent vers l'infini et $z = q^{1/2}$, ceci donne :

$$\sum_{l(\lambda)\leq k} \frac{q^{\lambda_1^2+\cdots+\lambda_k^2}}{(q)_{\lambda_k} \prod_{i\geq 1}(q)_{\lambda_i-\lambda_{i+1}}} = \frac{1}{(q)_\infty} \cdot \tag{2.18}$$

Remarquons que cette dernière égalité, lorsque $k = 1$, est une identité due à Euler :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2}}{(q)_n^2} = \frac{1}{(q)_\infty},$$

que l'on peut comparer à (1.2) vue dans l'introduction. Ainsi, (2.18) est une extension de cette dernière, ayant la propriété étonnante que le membre de droite ne dépend pas de k. L'explication de ce phénomène réside dans le fait que l'on peut prouver combinatoirement (2.18), en utilisant la décomposition des partitions d'entiers en k *carrés de Durfee* successifs, ces derniers étant définis par exemple dans [4].

Revenons pour finir sur le Corollaire 2.11 et en particulier la condition $n \leq m$. On peut en fait s'en débarasser en fixant n et en remplaçant q^{-m} par une variable, disons a, car l'égalité obtenue entre les deux fractions rationnelles en a est valide pour toutes les valeurs $a = q^{-m}$, avec $m \geq n$, donc pour tout a.

2.3.2 Quelques perspectives

Deux perspectives d'applications du résultat précédent sont en préparation dans [53]. La première concerne les *surpartitions planes*, des objets introduits et étudiés récemment par Corteel-Savelief-Vuletić (voir [41, 122]). Les surpartitions planes sont des partitions planes écrites comme des tableaux standards, pour lesquels certaines occurrences des entiers peuvent être soulignées. Le résultat suivant, dû à Vuletić [122], est prouvé combinatoirement dans [41], et a pour cas particulier $q = 0$ (respectivement $q = -1$) la fonction génératrice des partitions (respectivement surpartitions) planes. Notons qu'ici, q ne joue pas le même rôle que dans le reste de ce texte.

Théorème 2.12 (Vuletić) *Soit $P(r, c)$ l'ensemble des surpartitions planes ayant au plus r lignes et c colonnes. Alors :*

$$\sum_{\pi\in P(r,c)} A_\pi(q) t^{|\pi|} = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{c} \frac{1 - qt^{i+j-1}}{1 - t^{i+j-1}} \cdot \tag{2.19}$$

La formule de Cauchy pour les polynômes de Hall-Littlewood (2.16) est l'un des ingrédients de la preuve dans [41]. Nous comptons ainsi raffiner l'énumération (2.19) en utilisant la forme finie (2.17).

La deuxième application dans [53] concerne l'énumération des partitions planes à l'aide de *termes constants*, via le cas $q = 0$ de (2.17) correspondant aux fonctions de

Schur. Posons $f(X) := \prod_i (1 + 1/x_i)^{i-1} \prod_{i<j}(1 - x_i/x_j)$, et définissons CT_x comme étant le terme constant en les variables x_i dans toute série de Laurent des variables de X. Dans [51, 52], en étudiant diverses conjectures de Mills-Robbins-Rumsey [87] concernant des classes de partitions planes, Ishikawa a entre autres prouvé que l'on a :

$$CT_xCT_yf(X)f(Y)\sum_{\lambda} s_\lambda(X)s_\lambda(Y) = \det_{0\leq i,j\leq n-1}\left(\binom{i+j}{2j-i}\right), \tag{2.20}$$

$$CT_xCT_yf(X)f(Y)\sum_{\mu\setminus\lambda\, bh} s_\lambda(X)s_\mu(Y) = \det_{0\leq i,j\leq n-1}\left(\binom{i+j+1}{2j-i}\right), \tag{2.21}$$

$$CT_xCT_yf(X)f(Y)\sum_{\lambda\setminus\mu\, bv} s_\lambda(X)s_\mu(Y) = \det_{0\leq i,j\leq n-1}\left(\sum_{k\geq 2j-i}\binom{i+j}{k}\right), \tag{2.22}$$

où la somme dans (2.21) (respectivement (2.22)) porte sur les paires de partitions λ, μ telles que $\mu\setminus\lambda$ (respectivement $\lambda\setminus\mu$) soit une *bande horizontale* (respectivement *bande verticale*), c'est-à dire que $\lambda \subseteq \mu$ (respectivement $\mu \subseteq \lambda$) et il y a au plus une case par colonne (respectivement par ligne) dans le diagramme de Ferrers de μ (respectivement λ) auquel on a enlevé celui de λ (respectivement μ). On peut évaluer les déterminants intervenant dans (2.20), (2.21) et (2.22) à l'aide d'un résultat de [88], ce qui permet de reconnaître que (2.20) compte le nombre de *matrices à signes alternants de taille n autocomplémentaires cycliquement symétriques*, (2.21) le nombre de *matrices à signes alternants de taille n verticalement symétriques* et (2.22) le nombre de *matrices à signes alternants de taille $2n+1$ invariantes par demi-tour.*

Okada a interprété dans [92] ces nombres (ainsi que beaucoup d'autres énumérant diverses classes de symétrie de matrices à signes alternants) comme des caractères de groupes classiques, excepté concernant (2.22) pour lequel il n'a émis qu'une conjecture, ensuite prouvée par Razumov et Stroganov dans [98]. La plupart de ces classes de symétrie pour les matrices à signes alternants ont été énumérées par Kuperberg dans [76], via le modèle de glace à six sommets. En nous inspirant des calculs de Zeilberger dans [131], nous montrons dans [53] le résultat suivant.

Théorème 2.13 *On a :*

$$CT_xCT_yf(X)f(Y)\sum_{\substack{\lambda\setminus\nu\, bh\\ \mu\setminus\nu\, bv}} s_\lambda(X)s_\mu(Y) = \det_{0\leq i,j\leq n-1}\left(\sum_{k\geq 2j-i}\binom{i+j+1}{k}\right), \tag{2.23}$$

où la somme porte sur les partitions λ, μ et ν telles que $\lambda\setminus\nu$ soit une bande horizontale, et $\mu \setminus \nu$ soit une bande verticale.

Comme signalé par Krattenthaler, ce déterminant, ainsi que celui de (2.22), sont en fait des cas particuliers de

$$\det_{0\le i,j\le n-1}\left(\sum_{k\ge 2j-i}\binom{i+j+x}{k}\right)$$
$$= 2^x\prod_{i=1}^{n-1}(2x+3i)\prod_{i=0}^{n-2}\frac{i!(x+i+1)!(2x+3i+2)!(x+3i+2)!}{(2i+1)!(x+2i+1)!(2x+2i+2)!(x+2i+2)!}\,, \quad (2.24)$$

où x est un entier positif ou nul. Le calcul de (2.24) se fait à l'aide de manipulations sur les lignes du déterminant au membre de gauche, puis en utilisant le cas particulier $n\to n-1$, $x\to x+1$ et $y=1$ de [71, Theorem 40]. Pour $x=1$, on retrouve ainsi notre déterminant de (2.23) (et pour $x=0$ celui de (2.22)), ce qui permet de reconnaître que (2.23) compte le nombre de *matrices à signes alternants de taille* $2n$ *invariantes par demi-tour.*

En utilisant (2.17) dans le cas $q=0$ et les règles de Pieri pour les fonctions de Schur, on peut évaluer des raffinements finis des sommes du même type qu'au membre de gauche de (2.23). Ainsi, ce qui nous intéresse est de déterminer les objets comptés par les termes constants suivants :

$$CT_xCT_yf(X)f(Y)\sum_{\lambda\subseteq(k^n)}s_\lambda(X)s_\lambda(Y), \quad (2.25)$$
$$CT_xCT_yf(X)f(Y)\sum_{\substack{\mu\backslash\lambda\ bh\\ \lambda\subseteq(k^n)}}v^{|\mu\backslash\lambda|}s_\lambda(X)s_\mu(Y)\,, \quad (2.26)$$
$$CT_xCT_yf(X)f(Y)\sum_{\substack{\lambda\backslash\mu\ bv\\ \lambda\subseteq(k^n)}}u^{|\lambda\backslash\mu|}s_\lambda(X)s_\mu(Y)\,, \quad (2.27)$$
$$CT_xCT_yf(X)f(Y)\sum_{\substack{\lambda\backslash\nu\ bv,\ \mu\backslash\nu\ bh\\ \nu\subseteq(k^n)}}u^{|\lambda\backslash\nu|}v^{|\mu\backslash\nu|}s_\lambda(X)s_\mu(Y)\,. \quad (2.28)$$

Pour clore ce chapitre, notons simplement que pour $k\ge n$ (et $u=v=1$), les termes constants (2.25)–(2.28) sont égaux à (2.20)–(2.23) respectivement.

Chapitre 3

Séries bilatérales

Ce chapitre est exclusivement consacré à l'étude des séries hypergéométriques basiques. Plus particulièrement, nous verrons deux méthodes permettant d'obtenir, à partir d'identités classiques de séries hypergéométriques basiques, des preuves simples d'identités bilatérales. Nous donnerons ensuite quelques résultats généralisant les formules de Rogers-Ramanujan (1.10) et (1.11), et pouvant entre autres s'obtenir en revisitant le lemme de Bailey vu au paragraphe 1.3.3. Enfin, nous terminerons par l'étude d'une version bilatérale du lemme de Bailey et de certaines de ses extensions.

3.1 La méthode de Cauchy

Dans ce paragraphe, nous rappelons une méthode élémentaire permettant de prouver des identités bilatérales de q-séries, et dont la portée fut récemment remarquée par Schlosser dans [108]. Nous avons prolongé cette idée dans [60] afin de donner une démonstration élémentaire de la formule de sommation ${}_6\psi_6$ de Bailey (1.9).

3.1.1 Illustration sur un exemple

Dans [108], Schlosser a présenté une nouvelle démonstration de la sommation bilatérale ${}_1\psi_1$ de Ramanujan (1.8). Cette preuve utilise une méthode standard due à Cauchy dans [37], où celui-ci démontre le triple produit de Jacobi (1.15). Notons que (1.15) est un cas particulier de (1.8), qui n'était bien entendu pas encore connue à l'époque de Cauchy. Cette même méthode, que nous appellerons dorénavant *méthode de Cauchy*, a par ailleurs été exploitée par Bailey [19, 21] et Slater [114].

Afin d'illustrer cette technique, rappelons la démonstration de (1.8) de Schlosser, qui a pour point de départ l'identité q-Pfaff-Saalschütz (1.13), pouvant s'écrire sous la forme :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(a,b,q^{-n})_k}{(q,c,abq^{1-n}/c)_k} q^k = \frac{(c/a,c/b)_n}{(c,c/ab)_n} \, .$$

Remplaçons d'abord n par $2n$, puis décalons de n l'indice de sommation k, afin que la nouvelle somme aille de $-n$ à n :

$$\frac{(c/a,c/b)_{2n}}{(c,c/ab)_{2n}}=\sum_{k=0}^{2n}\frac{(a,b,q^{-2n})_k\,q^k}{(q,c,abq^{1-2n}/c)_k}=\frac{(a,b,q^{-2n})_n\,q^n}{(q,c,abq^{1-2n}/c)_n}\sum_{k=-n}^{n}\frac{(aq^n,bq^n,q^{-n})_k\,q^k}{(q^{1+n},cq^n,abq^{1-n}/c)_k}\,.$$

Ensuite, remplaçons a par aq^{-n} et c par cq^{-n}, afin d'obtenir après quelques simplifications :

$$\sum_{k=-n}^{n}\frac{(a,bq^n,q^{-n})_k}{(q^{1+n},c,abq^{1-n}/c)_k}q^k=\frac{(c/a)_{2n}}{(q)_{2n}}\frac{(q,q,c/b,bq/c)_n}{(c,q/a,b,c/ab)_n}\,.$$

Maintenant, on peut faire tendre n vers $+\infty$, en supposant $|c/ab|<1$ et $|b|<1$, pour pouvoir faire appel au théorème de Tannery [30] d'interversion de la limite et de la somme. Ceci donne :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_k}{(c)_k}\left(\frac{c}{ab}\right)^k=\frac{(q,c/a,c/b,bq/c)_\infty}{(c,q/a,b,c/ab)_\infty}\,,$$

où $|c/a|<|c/ab|<1$. Finalement, en remplaçant b par c/az et ensuite c par b, on obtient la sommation de Ramanujan (1.8).

Remarque 3.1 *Cauchy [37] avait en fait appliqué cette méthode à un cas spécial de* (1.13) *(après tout,* (1.13) *ne lui était pas connue), qui est en fait la forme finie $a=q^{-n}$ de l'identité q-binomiale* (1.6)*, et qui peut s'obtenir à partir de* (1.13) *en substituant $b\mapsto c/z$, puis $c\mapsto b$, puis en faisant $a\to\infty$ et $b\to 0$. Le résultat qu'obtint ainsi Cauchy est* (1.15)*. Notons enfin que cette dernière identité se déduit de* (1.8) *en remplaçant d'abord z par z/a, puis en faisant $a\to\infty$ et $b\to 0$.*

3.1.2 Nouvelle preuve de la sommation ${}_6\psi_6$ de Bailey

Dans [108], Schlosser conjecture en fait que *toute* sommation bilatérale peut s'obtenir en partant d'une identité finie choisie de manière appropriée, et en utilisant la méthode de Cauchy, ceci sans faire appel au *prolongement analytique*. La question de savoir s'il est possible d'appliquer cette stratégie pour prouver la sommation ${}_6\psi_6$ de Bailey (1.9) est cependant restée en suspens dans [108]. Bien que la conjecture générale de Schlosser reste ouverte à ce jour, nous avons montré dans [60] comment l'on peut répondre par l'affirmative au cas de la sommation ${}_6\psi_6$ de Bailey. Rappelons que de nombreuses preuves de celle-ci existent, en particulier celles de Bailey [19], Slater-Lakin [115], Andrews [2], Askey-Ismail [16], Askey [15], ou Schlosser [107].

Pour prouver la sommation ${}_6\psi_6$ de Bailey (1.9) par la méthode de Cauchy, il faut clairement partir d'une identité finie connue, ayant suffisamment de paramètres. Si l'on considère la sommation de Jackson [46, Appendix (II.22)] :

$$
{}_8\phi_7\left[\begin{matrix} a,\ q\sqrt{a}, -q\sqrt{a}, b, c, d, a^2q^{n+1}/bcd, q^{-n} \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq/d, bcdq^{-n}/a, aq^{n+1} \end{matrix}; q, q\right]
= \frac{(aq, aq/bc, aq/bd, aq/cd)_n}{(aq/b, aq/c, aq/d, aq/bcd)_n}, \tag{3.1}
$$

on s'aperçoit qu'il manque au moins un paramètre pour notre objectif. L'étape suivante consiste donc à appliquer la méthode de Cauchy aux deux membres de la transformation de Watson (1.7) vue dans l'introduction. En fait, cette idée a déjà été considérée par Bailey [21], qui obtint par ce procédé et un argument de symétrie une transformation pour une série ${}_2\psi_2$ (voir aussi [46, Ex. 5.11]).

Le prochain outil que nous avons à disposition dans la hiérarchie des identités de séries hypergéométriques basiques très bien équilibrées est la transformation de Bailey [18], que l'on peut écrire [46, Appendix (III.28)] :

$$
\begin{aligned}
{}_{10}\phi_9&\left[\begin{matrix} a,\ q\sqrt{a}, -q\sqrt{a}, b, c, d, e, f, \lambda aq^{n+1}/ef, q^{-n} \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq/d, aq/e, aq/f, efq^{-n}/\lambda, aq^{n+1} \end{matrix}; q, q\right] \\
&= \frac{(aq, aq/ef, \lambda q/e, \lambda q/f)_n}{(aq/e, aq/f, \lambda q/ef, \lambda q)_n} \\
&\times {}_{10}\phi_9\left[\begin{matrix} \lambda,\ q\sqrt{\lambda}, -q\sqrt{\lambda}, \lambda b/a, \lambda c/a, \lambda d/a, e, f, \lambda aq^{n+1}/ef, q^{-n} \\ \sqrt{\lambda}, -\sqrt{\lambda}, aq/b, aq/c, aq/d, \lambda q/e, \lambda q/f, efq^{-n}/a, \lambda q^{n+1} \end{matrix}; q, q\right],
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

où $\lambda = qa^2/bcd$. Une preuve standard de (3.2) consiste à appliquer deux fois (3.1), en intervertissant les sommations (voir [46]). La sommation de Jackson (3.1), quant à elle, se démontre de diverses façons, comme dans [46] ou [114]. Remarquons au passage que lorsque b, c ou $d \to \infty$, (3.2) se réduit à la transformation de Watson (1.7). En spécialisant de nouveau, on retrouve la sommation ${}_8\phi_7$ de Jackson (3.1), que l'on peut d'ailleurs déduire directement de (3.2) en posant $b = aq/c$ (ainsi $\lambda = a/d$).

Dans [60], nous partons de (3.2), et nous apppliquons de manière appropriée la méthode de Cauchy, ce qui nous conduit à la transformation suivante.

$$
\begin{aligned}
{}_6\psi_6&\left[\begin{matrix} q\sqrt{a}, -q\sqrt{a}, c, d, e, f \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/c, aq/d, aq/e, aq/f \end{matrix}; q, \frac{qa^2}{cdef}\right] \\
&= \frac{(aq, q/a, aq/ef, aq/cd, \lambda q/e, \lambda q/f, aq/\lambda c, aq/\lambda d)_\infty}{(aq/e, aq/f, q/c, q/d, \lambda q, q/\lambda, \lambda q/ef, b)_\infty} \\
&\times {}_6\psi_6\left[\begin{matrix} q\sqrt{\lambda}, -q\sqrt{\lambda}, \lambda c/a, \lambda d/a, e, f \\ \sqrt{\lambda}, -\sqrt{\lambda}, aq/c, aq/d, \lambda q/e, \lambda q/f \end{matrix}; q, \frac{qa^2}{cdef}\right],
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

où $\lambda = qa^2/bcd$ et $|qa^2/cdef| < 1$. Dans cette identité, le membre de droite comporte un paramètre de plus (b) que celui de gauche. A l'exception du cas trivial où $b = aq/cd$

(et donc $\lambda = a$), cette identité ne semble pas avoir été exploitée dans la littérature.

Une première façon de déduire la sommation bilatérale de Bailey (1.9) de (3.3) serait de spécialiser directement le paramètre supplémentaire b, de sorte que la somme ${}_6\psi_6$ au membre de droite se réduise à une série ${}_6\phi_5$, que l'on somme en utilisant le cas $n \to \infty$ de (3.1). Cependant, cette idée manque de charme, dans le sens où de nombreuses preuves de (1.9) invoquent déjà la version infinie de (3.1), comme dans [2, 16, 107, 115]. La clé pour éviter d'utiliser (3.1) est d'itérer notre transformation (3.3), c'est-à-dire d'appliquer cette même transformation à la somme ${}_6\psi_6$ du membre de droite de (3.3), en remplaçant les paramètres a, c, d et e par λ, $\lambda c/a$, e et $\lambda d/a$ respectivement. Alors un nouveau paramètre additionnel, que l'on peut par exemple appeler b', apparaît au membre de droite. En spécialisant b et b' de manière appropriée, on obtient directement la sommation de Bailey (1.9).

3.2 Formes semi-finies

Dans la continuité du paragraphe précédent, nous expliquons ici une autre façon de procéder pour prouver des identités bilatérales à partir de sommations classiques. Cette autre méthode a été introduite récemment par Chen-Fu dans [38]. Ces derniers ont posé la question d'une preuve directe de la sommation ${}_6\psi_6$ de Bailey (1.9) via leur approche. Nous avons répondu à cette question dans [55].

3.2.1 La méthode

Rappelons que la méthode de Cauchy expliquée au paragraphe précédent consiste à procéder à un décalage d'indice dans une somme *finie* unilatérale, que l'on peut schématiser comme suit :

$$\sum_{k=0}^{2n} a(k) = \sum_{k=-n}^{n} a(k+n)\,, \tag{3.4}$$

puis à faire $n \to +\infty$ lorsque c'est possible après quelques manipulations et simplifications. Dans [38], Chen et Fu ont introduit la notion de *formes semi-finies*, que l'on obtient par un procédé comparable, mais en partant de sommations *infinies* unilatérales. On peut alors déduire des identités pour des séries bilatérales par passage à la limite. Le procédé peut se résumer ainsi :

$$\sum_{k\geq 0} a(k) = \sum_{k\geq -n} a(k+n)\,, \tag{3.5}$$

puis $n \to +\infty$ lorsque c'est possible après quelques manipulations et simplifications. Le membre de droite de (3.4) (respectivement (3.5)) peut être nommé forme finie (respectivement semi-finie) d'une série bilatérale. Chen et Fu ont trouvé dans [38] des formes semi-finies de la sommation ${}_1\psi_1$ de Ramanujan (1.8), d'une sommation ${}_2\psi_2$ due à Bailey [46, Ex. 5.20(i)] et de la sommation ${}_6\psi_6$ de Bailey (1.9).

A la fin de [38], les auteurs mentionnent le problème de trouver une démonstration de (1.9) en utilisant une forme semi-finie (ou même finie) qui donnerait directement le résultat lorsque n tend vers $+\infty$. En effet, le passage à la limite dans leur forme semi-finie de (1.9) ne conduit au résultat qu'après utilisation de la sommation ${}_1\psi_1$ de Ramanujan. Nous donnons une réponse positive à ce problème dans [55] ; le paragraphe suivant donne un aperçu de la méthode.

3.2.2 Une forme semi-finie de la sommation ${}_6\psi_6$ de Bailey

Notre idée dans [55] est de prendre pour point de départ la version infinie, due à Bailey [46, Appendix (II.25)], de la sommation ${}_8\phi_7$ de Jackson (3.1). En appliquant quelques décalages, simplifications et changements de variables, on en déduit la forme semi-finie suivante de (1.9).

Proposition 3.2 *Pour tout entier $n \geq 0$, on a :*

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\geq -n} \frac{(aq^{-n}, q\sqrt{a}, -q\sqrt{a}, bq^n, c, d, e, f)_k}{(q^{1+n}, \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq^{1-n}/b, aq/c, aq/d, aq/e, aq/f)_k} q^k \\
&\quad = \frac{(aq, c, d, e, f, bq^{1+2n}/a, bq^{1+n}/c, bq^{1+n}/d, bq^{1+n}/e, bq^{1+n}/f)_\infty}{(aq/b, aq/c, aq/d, aq/e, aq/f, bcq^n/a, bdq^n/a, beq^n/a, bfq^n/a, b^2q^{1+2n}/a)_\infty} \\
&\qquad\qquad \times \frac{b^{n+1}}{a} \frac{(q, q/a)_n}{(b, b/a)_n} \\
&\quad\times {}_8\phi_7\left[\begin{matrix} b^2q^{2n}/a,\ bq^{1+n}/\sqrt{a}, -bq^{1+n}/\sqrt{a}, b, bcq^n/a, bdq^n/a, beq^n/a, bfq^n/a \\ bq^n/\sqrt{a}, -bq^n/\sqrt{a}, bq^{1+2n}/a, bq^{1+n}/c, bq^{1+n}/d, bq^{1+n}/e, bq^{1+n}/f \end{matrix}; q, q\right] \\
&\qquad + \frac{(aq, aq/cd, aq/ce, aq/cf, aq/de, aq/df, aq/ef, bq^n/a)_\infty}{(aq/c, aq/d, aq/e, aq/f, bcq^n/a, bdq^n/a, beq^n/a, bfq^n/a)_\infty} \\
&\qquad\qquad \times \frac{(q, q/a)_n}{(b, q/c, q/d, q/e, q/f)_n}, \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

où $b = qa^2/cdef$.

Outre la méthode de Chen-Fu, les ingrédients nécessaires pour obtenir cette identité sont des manipulations élémentaires de q-analogues des symboles de Pocchammer, comme :

$$\frac{(xq^{-2n})_\infty}{(xq^{-2n})_n} = (-1)^n x^n q^{-(n^2+n)/2} (q/x)_n (x)_\infty .$$

Pour justifier le fait que (3.6) répond bien à la question de Chen et Fu, faisons tendre $n \to +\infty$, en supposant $|qa^2/cdef| < 1$ (donc $|b| < 1$), et en échangeant limite et somme via le théorème de Tannery [30]. Comme le premier terme au membre de droite de (3.6) tend vers 0, ceci donne immédiatement la sommation ${}_6\psi_6$ de Bailey (1.9), avec b remplacé par f.

Avant de terminer ce paragraphe, notons que dans [55], nous appliquons ce même procédé en partant du cas limite $n \to +\infty$ de la transformation de Bailey (3.2) utilisée au paragraphe précédent. Nous obtenons donc une forme semi-finie de ce cas limite, qui a elle-même pour conséquence la transformation (3.3). De plus, nous montrons comment obtenir une forme semi-finie de la transformation infinie à quatre termes due à Bailey [46, Appendix (III.39)], qui a quant à elle pour conséquence une formule de transformation mélant deux séries bilatérales ${}_8\psi_8$, et deux séries ${}_8\phi_7$. Cette transformation compliquée est en fait une conséquence de diverses manipulations de séries hypergéométriques basiques, et surtout d'une identité de fonctions thetas [46, Ex. 5.22].

3.3 Formes finies de Rogers-Ramanujan

Dans l'article [49], nous nous intéressons à des formes finies des identités de Rogers-Ramanujan (1.10) et (1.11). Les paragraphes qui suivent expliquent comment on peut obtenir de telles formes finies à partir du lemme de Bailey, en pointant d'autre part le fait qu'il est parfois nécessaire d'employer une version un peu plus compliquée de ce dernier, que l'on nomme *réseau de Bailey*, et qui est dû à Agarwal-Andrews-Bressoud dans [1].

3.3.1 Deux résultats très proches

L'idée de déterminer des formes finies des identités de Rogers-Ramanujan est guidée par le fait d'en donner une démonstration automatique par ordinateur. L'utilisation du lemme de Bailey pour prouver la transformation de Watson (1.7) les généralisant en est une illustration, et Paule a par exemple utilisé un cas particulier de (1.7) comme point de départ pour prouver par ordinateur l'identité de Rogers-Ramanujan (1.10) dans [95]. Notons aussi que des formes finies de (1.10) et (1.11) ont été données par Warnaar dans [124]. Le premier résultat que nous obtenons dans [49] est le suivant.

Théorème 3.3 *Soit $n > 0$ un entier. Si l'un au moins des paramètres a, b et c est de la forme q^n, alors on a :*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(q/a, q/b, q/c, q/d, q/e)_k}{(a, b, c, d, e)_k} (abcdeq^{-3})^k = \frac{(q, ab/q, bc/q, ac/q)_\infty}{(a, b, c, abc/q^2)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q/a, q/b, q/c, de/q)_k}{(q, q^3/abc, d, e)_k} q^k , \quad (3.7)$$

et

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(q/a, q/b, q/c, q/d, q/e)_k}{(aq, bq, cq, dq, eq)_k} (abcdeq^{-1})^k = \frac{(q, ab, bc, ac)_\infty}{(aq, bq, cq, abc/q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q/a, q/b, q/c, de)_k}{(q, q^2/abc, dq, eq)_k} q^k\, n. \quad (3.8)$$

On a bien ici des formes finies des identités de Rogers-Ramanujan, car la condition sur l'un des paramètres a, b et c impose la finitude, et ces dernières sont obtenues si les autres paramètres tendent tous vers l'infini, en utilisant le triple produit de Jacobi (1.15).

D'autre part, nous prouvons dans [49] les nouvelles identités suivantes, que nous avons originellement devinées par des expérimentations informatiques, et qui sont aussi des formes finies des identités de Rogers-Ramanujan.

Théorème 3.4 *Soit $n > 0$ un entier. Si l'un au moins des paramètres a, b et c est de la forme q^n, alors on a :*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(q/a, q/b, q/c, q/d, q/e)_k}{(a, b, c, d/q, e/q)_k} (abcdeq^{-3})^k = \frac{(q, ab/q, bc/q, ac/q)_\infty}{(a, b, c, abc/q^2)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q/a, q/b, q/c, de/q^2)_k}{(q, q^3/abc, d, e)_k} q^k , \quad (3.9)$$

et

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(q/a, q/b, q/c, q/d, q/e)_k}{(a, b, c, d/q, e/q)_k} (abcdeq^{-4})^k = \frac{(q, ab/q, bc/q, ac/q)_\infty}{(a, b, c, abc/q^2)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q/a, q/b, q/c, de/q^2)_k}{(q, q^3/abc, d, e)_k} q^{2k} . \quad (3.10)$$

La première chose frappante est la similarité entre ces deux identités et les deux précédentes. Pourtant, comme nous l'expliquons dans [49], (3.7) et (3.8) sont en fait des conséquences directes de la transformation de Watson (1.7) (et donc du lemme de Bailey). En revanche, (3.9) et (3.10) sont bien plus compliquées à démontrer. Dans le paragraphe suivant, nous verrons comment nous avons prouvé ces dernières dans [49] par une approche généralisant le lemme de Bailey. Nous avons aussi dans ce même article donné une autre démonstration de (3.9) et (3.10), qui utilise l'algorithme q-Gosper (voir par exemple [96]).

3.3.2 Le lemme de Bailey revisité

L'observation cruciale, qui est originellement due à Paule [94], est que l'on peut rendre symétrique, via un décalage d'indice, la somme dans la définition d'une paire de Bailey (1.12), dans les cas $a = 1$ et $a = q$. Nous avons formulé ceci dans [49], ce qui permet de donner une preuve plus directe de (3.7) et (3.8). L'idée se traduit par le fait que la paire de Bailey unitaire (1.14), lorsque $a = 1$, peut s'écrire $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ et

$$\alpha_n = (-1)^n (q^{\binom{n}{2}} + q^{\binom{-n}{2}}), \qquad \beta_n = 0, \qquad n \geq 1 .$$

Cette même paire de Bailey unitaire s'écrit pour $a = q$:

$$\alpha_n = (-1)^n (q^{\binom{n}{2}} + q^{\binom{-n-1}{2}}), \qquad \beta_n = \delta_{n,0}\,.$$

Dans [49], nous donnons deux démonstrations de (3.9), dont l'une en utilisant une version modifiée du lemme de Bailey, qui s'appelle le réseau de Bailey (ou Bailey lattice), et qui est due à Agarwal-Andrews-Bressoud dans [1] (voir aussi l'article de Schilling-Warnaar [106], et le survol de Warnaar [123]). Rappelons que le lemme de Bailey classique permet de prouver les identités de Rogers-Ramanujan, et celles-ci ont une extension célèbre, les identités d'Andrews-Gordon. Le lemme de Bailey s'avérant infructueux, ces dernières sont prouvées via le réseau de Bailey, qui peut s'énoncer comme suit.

Théorème 3.5 (réseau de Bailey) *Si (α_n, β_n) est une paire de Bailey relative à a et q, alors (α'_n, β'_n) est une paire de Bailey relative à aq^{-1} et q, où $\alpha'_0 = 1$,*

$$\alpha'_n = (1-a)(a/\rho_1\rho_2)^n \frac{(\rho_1,\rho_2)_n}{(a/\rho_1, a/\rho_2)_n} \left(\frac{\alpha_n}{1-aq^{2n}} - aq^{2n-2} \frac{\alpha_{n-1}}{1-aq^{2n-2}} \right),$$

et pour $n \geq 0$

$$\beta'_n = \sum_{r \geq 0} \frac{(\rho_1,\rho_2)_r (a/\rho_1\rho_2)_{n-r} (a/\rho_1\rho_2)^r}{(q)_{n-r} (a/\rho_1)_n (a/\rho_2)_n} \beta_r\,.$$

On reprend la paire de Bailey unitaire (1.14) avec $a = q$, et on lui applique le lemme de Bailey classique pour obtenir une nouvelle paire de Bailey (α'_n, β'_n), pour $a = q$. On applique alors le théorème précédent pour obtenir une troisième paire de Bailey (α''_n, β''_n), mais pour $a = 1$ cette fois. En écrivant la relation stipulant que (α''_n, β''_n) est une paire de Bailey pour $a = 1$, on obtient après quelques manipulations notre formule (3.9) avec a remplacé par q^{1+n}, $d = q^2/\rho_1$, $e = q^2/\rho_2$, $b = q/\rho_3$ et $c = q/\rho_4$. La formule (3.10), quant à elle, est une conséquence de (3.8) et (3.9).

Pour terminer, nous expliquons dans [49] comment obtenir d'autres identités du type (3.7)–(3.10), mais qui peuvent être vues comme conséquences de celles-ci, en utilisant un résultat proche du Théorème 3.5 dû à Schilling-Warnaar dans [106].

3.3.3 Quelques cas particuliers

Dans [49], de nombreux corollaires aux formules (3.7)–(3.10) sont donnés, parmi lesquels les identités étonnantes suivantes :

$$\frac{1}{(q)_\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{q^{k^2}}{(q)_k (q)_{n-k}} = \frac{1}{(q)_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2}}{(q)_k (q)_{n+k}}\,,$$
$$\frac{1}{(q)_\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{q^{k^2+k}}{(q)_k (q)_{n-k}} = \frac{1}{(q)_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2+k}}{(q)_k (q)_{n+k+1}}\,,$$

ou encore après de nombreuses manipulations, puis un passage à la limite $q \to 1$:

$$\sum_{k=-n}^{n} (-1)^k \binom{2n}{n+k}^4 = \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{3n-k}{n-k} \binom{2n}{n+k} \binom{n}{k}, \tag{3.11}$$

et

$$\sum_{k=-n}^{n} (-1)^k \binom{2n}{n+k}^5 = \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{3n-k}{n-k} \binom{2n+k}{k} \binom{2n}{n+k}^2. \tag{3.12}$$

De (3.11) et (3.12), on peut clairement déduire que $\sum_{k=-n}^{n}(-1)^k\binom{2n}{n+k}^m$ est divisible par $\binom{2n}{n}$ pour $m = 4, 5$. Ce résultat arithmétique sera expliqué et généralisé à toutes les valeurs entières de m au chapitre 4.

3.4 Le lemme de Bailey bilatéral

Le paragraphe précédent exprime l'idée qu'il est parfois possible d'utiliser une structure de symétrie via le lemme de Bailey pour déduire des identités bilatérales. Ceci conduit naturellement à étudier directement l'existence d'une version bilatérale du lemme de Bailey. Une telle version apparaît dans l'article [24] de Berkovich-McCoy-Schilling, dans un contexte de physique théorique. Dans [56], nous définissons la notion de *paire de Bailey décalée* et plus généralement celle de *paire de Bailey décalée bien équilibrée*, et nous en donnons quelques applications intéressantes en termes de q-séries.

3.4.1 Lemme de Bailey décalé

Dans la définition des paires de Bailey (1.12), la condition $r \leq n$ dans la somme au membre de droite est naturelle, dans le sens où $1/(q)_{n-r} = 0$ pour $n - r < 0$. Cependant, le fait que cette même somme commence à $r = 0$ ne peut être omise, ce qui signifie que la définition des paires de Bailey serait différente si cette somme allait de $-\infty$ à n. Comme il est remarqué dans [24], on peut définir pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la notion de *paire de Bailey bilatérale* $(\alpha_n(a, q), \beta_n(a, q))$ relative à a et q par la relation :

$$\beta_n(a, q) = \sum_{r \leq n} \frac{\alpha_r(a, q)}{(q)_{n-r}(aq)_{n+r}} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}\,. \tag{3.13}$$

Il est bien entendu toujours possible de trouver des paires de Bailey bilatérales pour tout a, mais ce qui semble plus délicat est d'exprimer $\beta_n(a, q)$ sous une forme close (sans sommation), afin d'en déduire des résultats intéressants. Ceci devient possible lorsque l'on se restreint aux valeurs $a = q^m$, $m \in \mathbb{N}$, la raison étant que la somme au membre de droite de (3.13) va dans ce cas de $-m - n$ à n, et est en particulier finie. Appelons une telle paire de Bailey bilatérale $(\alpha_n(q^m, q), \beta_n(q^m, q))$ *paire de Bailey décalée*, et remarquons que toute paire de Bailey décalée correspond en fait à une paire de Bailey classique, et réciproquement. Cependant, l'intérêt de cette notion apparaît clairement lorsque l'on veut obtenir des applications intéressantes, car elle évite des distinctions pénibles de parité de m. Dans [24], le lemme de Bailey est généralisé comme suit.

Théorème 3.6 (lemme de Bailey bilatéral) *Si* $(\alpha_n(a,q),\, \beta_n(a,q))$ *est une paire de Bailey bilatérale relative à* a *et* q*, alors c'est aussi le cas de la paire* $(\alpha'_n(a,q),\, \beta'_n(a,q))$*, où*

$$\alpha'_n(a,q) = \frac{(\rho_1,\rho_2)_n (aq/\rho_1\rho_2)^n}{(aq/\rho_1, aq/\rho_2)_n} \alpha_n(a,q)$$

et

$$\beta'_n(a,q) = \sum_{j\leq n} \frac{(\rho_1,\rho_2)_j (aq/\rho_1\rho_2)_{n-j} (aq/\rho_1\rho_2)^j}{(q)_{n-j}(aq/\rho_1, aq/\rho_2)_n} \beta_j(a,q)\,,$$

sous certaines conditions de convergence sur les suites $\alpha_n(a,q)$ *et* $\beta_n(a,q)$ *rendant toutes les séries infinies absolumment convergentes.*

Remarque 3.7 *Pour prouver le lemme de Bailey classique en utilisant l'identité q-Pfaff-Saalschütz* (1.13)*, le passage clé est une interversion de sommes qui se fait sans problème de convergence car ces sommes sont finies. Ce n'est plus le cas dans cette version bilatérale, d'où les conditions de convergence absolue permettant d'intervertir les sommes de la même façon. Ces conditions de convergence ne sont plus nécessaires dans le cas* $a = q^m$*,* $m \in \mathbb{N}$*, correspondant aux paires de Bailey décalées.*

Dans [56], nous exhibons comme conséquence de la version finie de l'identité q-binomiale (1.6) la paire de Bailey décalée suivante, qui est en fait déjà apparue dans l'article [14] mentionné au paragraphe 2.1.2, les auteurs généralisant cette paire au cadre de l'algèbre de Lie A_2 :

$$\alpha_n(q^m,q) = (-1)^n q^{\binom{n}{2}} \text{ et } \beta_n(q^m,q) = (q)_m (-1)^n q^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} m+n \\ m+2n \end{bmatrix}_q. \tag{3.14}$$

Remarque 3.8 *Les cas particuliers* $m = 0$ *et* $m = 1$ *correspondent à la paire de Bailey unitaire* (1.14) *pour* $a = 1$ *et* q*. Ces deux valeurs du paramètre* a *sont dans toutes les utilisations classiques du lemme de Bailey les deux seules pour lesquelles le triple produit de Jacobi* (1.15) *s'applique afin de déduire des identités de type Rogers-Ramanujan. La clé de notre cadre décalé réside dans le fait que* (1.15) *peut s'utiliser pour tout* $a = q^m$*,* $m \in \mathbb{N}$*, regroupant ainsi entre autres les cas* $a = 1$ *et* $a = q$*.*

En appliquant k fois certains cas particuliers du Théorème 3.6 à la paire de Bailey décalée (3.14), nous montrons dans [56] plusieurs résultats, dont le suivant est un exemple.

Théorème 3.9 *Pour tous* $k \in \mathbb{N}^*$ *et* $m \in \mathbb{N}$*, on a :*

$$\sum_{-\lfloor m/2\rfloor \leq n_k \leq n_{k-1} \leq \cdots \leq n_1} \frac{q^{n_1^2+\cdots+n_k^2+m(n_1+\cdots+n_k)}}{(q)_{n_1-n_2}\ldots(q)_{n_{k-1}-n_k}} (-1)^{n_k} q^{\binom{n_k}{2}} \begin{bmatrix} m+n_k \\ m+2n_k \end{bmatrix}_q$$
$$= \frac{(q^{2k+1}, q^{k(m+1)}, q^{k(1-m)+1}; q^{2k+1})_\infty}{(q)_\infty}. \tag{3.15}$$

L'identité (3.15) est ce que l'on nomme en général une *m-version* des identités de Andrews-Gordon, cette dernière étant obtenue en posant $m = 0$ et $m = 1$. Cependant, nous n'obtenons pas de m-versions des identités de Andrews-Gordon *complètes* (voir par exemple [4] et [29]). Le cas particulier $k = 1$ de (3.15) est un célèbre analogue polynomial du théorème pentagonal d'Euler (1.5), généralisé par Guo-Zeng dans [50], et généralisé dans [125] par Warnaar à une sommation cubique pour les *séries hypergéométriques elliptiques*. Le cas particulier $k = 2$ prend quant à lui la forme suivante :

$$\sum_{j\geq 0}(-1)^j q^{5\binom{j}{2}-(2m-3)j}\begin{bmatrix} m-j \\ j \end{bmatrix}_q \sum_{k\geq 0}\frac{q^{k^2+(m-2j)k}}{(q)_k} = \frac{(q^5,q^{2m+2},q^{3-2m};q^5)_\infty}{(q)_\infty}\,, \tag{3.16}$$

qui est une m-version des identités de Rogers-Ramanujan découverte par Garrett-Ismail-Stanton dans [45], via la théorie des polynômes orthogonaux et le calcul intégral. Nous avons découvert dans [56] l'analogue de (3.16) pour les identités de Göllnitz-Gordon. Par ailleurs, les auteurs de [45] prouvent aussi l'égalité :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2+nm}}{(q)_n} = \frac{1}{(q)_\infty}\sum_{k=0}^{m}\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q q^{2k(k-m)}(q^5,q^{3+4k-2m},q^{2-4k+2m};q^5)_\infty\,, \tag{3.17}$$

qui est une célèbre m-version des identités de Rogers-Ramanujan, inverse de (3.16). Au vu de (3.16) et (3.17), il est possible d'inverser (3.15) via l'inversion classique de Bailey (voir par exemple [12]). Ceci donne le résultat suivant, qui est donc une k-généralisation de (3.17).

Théorème 3.10 *Pour tous entiers $k \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\sum_{0\leq n_{k-1}\leq\cdots\leq n_1}\frac{q^{n_1^2+\cdots+n_{k-1}^2+m(n_1+\cdots+n_{k-1})}}{(q)_{n_1-n_2}\cdots(q)_{n_{k-2}-n_{k-1}}(q)_{n_{k-1}}} = \sum_{j=0}^{m}\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_q q^{kj(j-m)}$$
$$\times\frac{(q^{2k+1},q^{k(m-2j+1)},q^{k(1-m+2j)+1};q^{2k+1})_\infty}{(q)_\infty}\,. \tag{3.18}$$

Berkovich-Paule prouvent par une méthode différente dans [23] ce que l'on peut nommer *m-version négative* (c'est-à dire que m est un entier négatif) des identités complètes de Andrews-Gordon. Warnaar a aussi obtenu d'autres identités du même type dans [126], en utilisant un autre point de vue que le notre, mais lié au lemme de Bailey. Il serait intéressant de déduire tous ces résultats de notre approche, ce qui impliquerait vraisemblablement de construire une version bilatérale du réseau de Bailey mentionné au paragraphe 3.3.2.

3.4.2 Changement de base

Dans [29], Bressoud-Ismail-Stanton prouvent un grand nombre de sommations de type Rogers-Ramanujan, via un nouvel outil, appelé *changement de base dans les* *paires de Bailey.* Nous avons remarqué dans [56] que beaucoup d'outils et de résultats de [29] ont une version bilatérale, comme par exemple le théorème suivant qui est la version bilatérale de [29, Theorem 2.1].

Théorème 3.11 *Si $(\alpha_n(a,q),\, \beta_n(a,q))$ est une paire de Bailey bilatérale relative à a et q, alors c'est aussi le cas de la paire $(\alpha'_n(a,q),\, \beta'_n(a,q))$, où*

$$\alpha'_n(a,q) = \frac{(-b)_n}{(-aq/b)_n} b^{-n} q^{-\binom{n}{2}} \alpha_n(a^2,q^2)$$

et

$$\beta'_n(a,q) = \sum_{k\le n} \frac{(-aq)_{2k}(b^2;q^2)_k(q^{-k}/b, bq^{k+1})_{n-k}}{(b,-aq/b)_n(q^2;q^2)_{n-k}} b^{-k} q^{-\binom{k}{2}} \beta_k(a^2,q^2)\,,$$

pourvu que les séries concernées soient absolument convergentes.

A partir de ce résultat, du lemme de Bailey bilatéral et de la paire de Bailey décalée (3.14), on en déduit dans [56] une m-version des *identités de Bressoud*, qui sont les analogues pairs des identités de Andrews-Gordon (voir par exemple [29]). Il est aussi possible d'inverser la m-version que nous obtenons, ce qui donne le résultat suivant.

Théorème 3.12 *Pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\sum_{0\le n_{k-1}\le\cdots\le n_1} \frac{q^{n_1^2+\cdots+n_{k-1}^2+m(n_1+\cdots+n_{k-1})+n_{k-1}}}{(q)_{n_1-n_2}\cdots(q)_{n_{k-2}-n_{k-1}}(q^2;q^2)_{n_{k-1}}}$$
$$= \sum_{j=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q^2} \frac{q^{(k-1)j(j-m)}}{(-q)_m} \frac{(q^{2k}, q^{(k-1)(m-2j+1)}, q^{(k-1)(1-m+2j)+2}; q^{2k})_\infty}{(q)_\infty}\,.$$

3.4.3 Le cas bien équilibré

Il existe une extension célèbre du lemme de Bailey, qui est appelée *lemme de Bailey bien équilibré* découvert par Andrews dans [10], puis exploité par Andrews-Berkovich dans [11]. Nous en donnons dans [56] une version bilatérale, en définissant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la notion de *paire de Bailey bilatérale bien équilibrée* $(\alpha_n(a,\alpha),\, \beta_n(a,\alpha))$ relative à a et α par la relation :

$$\beta_n(a,\alpha) = \sum_{r\le n} \frac{(\alpha/a)_{n-r}(\alpha)_{n+r}}{(q)_{n-r}(aq)_{n+r}} \alpha_r(a,\alpha) \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}\,. \tag{3.19}$$

La version bilatérale des travaux de [11] peut s'énoncer comme suit.

Théorème 3.13 (lemme de Bailey bilatéral bien équilibré) *Si l'on suppose que $(\alpha_n(a,\alpha),\, \beta_n(a,\alpha))$ est une paire de Bailey bilatérale bien équilibrée relative à a et α, alors c'est aussi le cas de $(\alpha'_n(a,\alpha),\, \beta'_n(a,\alpha))$ et $(\widetilde{\alpha}_n(a,\alpha),\, \widetilde{\beta}_n(a,\alpha))$, où*

$$\alpha'_n(a,\alpha) = \frac{(\rho_1,\rho_2)_n}{(aq/\rho_1, aq/\rho_2)_n} (\alpha/c)^n \alpha_n(a,c)\,,$$

$$\beta'_n(a,\alpha)=\frac{(\alpha\rho_1/a,\alpha\rho_2/a)_n}{(aq/\rho_1,aq/\rho_2)_n}\sum_{j\le n}\frac{(\rho_1,\rho_2)_j}{(\alpha\rho_1/a,\alpha\rho_2/a)_j}\times\frac{1-cq^{2j}}{1-c}\,\frac{(\alpha/c)_{n-j}(\alpha)_{n+j}}{(q)_{n-j}(qc)_{n+j}}(\alpha/c)^j\beta_j(a,c)\,,$$

avec $c=\alpha\rho_1\rho_2/aq$, *et*

$$\widetilde{\alpha}_n(a,\alpha)=\frac{(qa^2/\alpha)_{2n}}{(\alpha)_{2n}}(\alpha^2/qa^2)^n\alpha_n(a,qa^2/\alpha)\,,$$

$$\widetilde{\beta}_n(a,\alpha)=\sum_{j\le n}\frac{(\alpha^2/qa^2)_{n-j}}{(q)_{n-j}}(\alpha^2/qa^2)^j\beta_j(a,qa^2/\alpha)\,,$$

sous certaines conditions de convergence sur les suites α_n *et* β_n*, rendant absolumment convergentes les séries infinies apparaissant.*

Notons que si $\alpha=0$, alors la première instance de ce résultat donne le Théorème 3.6. Comme dans le paragraphe 3.4.1, on évitera souvent tout problème de convergence en posant $a=q^m$, $m\in\mathbb{N}$, et les paires de Bailey bilatérales bien équilibrées seront appelées *paires de Bailey décalées bien équilibrées.* Notons au passage que Schlosser (communication privée) a prouvé un lemme de Bailey bilatéral beaucoup plus général basé sur une inversion de matrices, mais d'une autre nature que ce théorème. D'autre part, certains lemmes de Bailey bien équilibrés prouvés par Mc Laughlin-Zimmer dans [84] ou Warnaar dans [127] devraient avoir des versions bilatérales qu'il pourrait être intéressant d'explorer.

Dans [56], nous expliquons comment la relation (3.19) peut s'inverser, ce qui fournit une paire de Bailey unitaire bilatérale bien équilibrée. Ceci permet, après deux itérations de la première instance du Théorème 3.16, de prouver une transformation généralisant à la fois la sommation ${}_1\psi_1$ de Ramanujan (1.8), la sommation ${}_6\psi_6$ de Bailey (1.9) et la transformation (3.3) entre deux ${}_6\psi_6$ rencontrée au paragraphe 3.1.2.

D'autre part, en utilisant la sommation q-Pfaff-Saalschütz (1.13), nous avons trouvé la version bien équilibrée de la paire de Bailey décalée (3.14), ce qui est exprimé dans le résultat suivant.

Proposition 3.14 *Pour* $m\in\mathbb{N}$, $(\alpha_n(q^m,\alpha),\ \beta_n(q^m,\alpha))$ *est une paire de Bailey décalée bien équilibrée relative à* $a=q^m$ *et* α*, où*

$$\alpha_n(q^m,\alpha)=\frac{(q^m/\alpha)_n}{(\alpha q^{-m})_n}(\alpha q^{-m})^n$$

et

$$\beta_n(q^m,\alpha)=\frac{(q)_m(q/\alpha)_{m-n}(\alpha^2q^{-2m})_{m+2n}}{(q/\alpha,\alpha q^{-m})_m(\alpha q^{1-m})_{m+n}}\begin{bmatrix}m+n\\m+2n\end{bmatrix}_q(q^m/\alpha)^n\,.$$

Remarque 3.15 *Lorsque* $\alpha \to 0$ *cette paire de Bailey décalée bien équilibrée devient exactement* (3.14)*.*

En appliquant la première, puis la deuxième instance du Théorème 3.13 à notre paire de Bailey décalée bien équilibrée, nous obtenons la généralisation suivante de l'identité [45, (6.3)] de Garrett-Ismail-Stanton.

Théorème 3.16 *Pour tout entier positif ou nul* m *et tous nombres réels* β*,* γ*,* ρ *tels que* $|q/\beta^2| < 1$*, on a :*

$$\frac{(\beta)_m}{(q/\beta)_m}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(1/\gamma,\rho,\gamma q^{1+m}/\beta\rho)_n}{(\gamma,q^{1+m}/\rho,\beta\rho/\gamma)_n}\frac{(\beta q^m)_{2n}}{(q^{1+m}/\beta)_{2n}}(q/\beta)^n$$
$$= \frac{(q,q/\beta^2)_\infty}{(q/\beta,q/\beta)_\infty}\sum_{s=0}^{\lfloor m/2\rfloor}(\beta^3/q)^s\frac{(q/\gamma,\gamma q/\beta\rho,\rho q^{-m})_s}{(q,q/\rho,\beta\rho q^{-m}/\gamma)_s}\frac{1-\gamma q^{m-2s}}{1-\gamma}$$
$$\times\frac{(\beta,\gamma^2)_{m-2s}}{(q,\gamma q)_{m-2s}}\frac{(q)_{m-s}}{(\gamma q)_{m-s}}{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}\beta/\gamma,\beta q^{m-2s},\rho\beta q^{-s},\gamma q^{1+m-s}/\rho\\ \gamma q^{1+m-2s},\beta\rho q^{-s}/\gamma,q^{1+m-s}/\rho\end{matrix};q,q/\beta^2\right]. \quad (3.20)$$

Pour terminer, mentionnons que les *relations d'orthogonalité* et les *formules de connection* pour les polynômes orthogonaux q*-Hermite* et plus généralement les polynômes orthogonaux q*-ultrasphériques* sont au cœur des preuves de [45]. Rappelons que les polynômes q-ultrasphériques ont la représentation explicite suivante :

$$C_n(\cos\theta;\beta|q) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(\beta)_k(\beta)_{n-k}}{(q)_k(q)_{n-k}}\mathrm{e}^{-i(n-2k)\theta}. \quad (3.21)$$

On peut alors voir que (3.21) est équivalent à l'assertion stipulant que la paire suivante est une paire de Bailey décalée bien équilibrée :

$$\alpha_n(q^m,\beta q^m) = \mathrm{e}^{2in\theta} \quad \text{et} \quad \beta_n(q^m,\beta q^m) = \mathrm{e}^{-im\theta}\frac{(q)_m}{(\beta)_m}C_{2n+m}(\cos\theta;\beta|q).$$

Une application de la première instance du Théorème 3.13 avec $\rho_2 \to +\infty$, $\rho_1 \to 0$ et $c = \beta\rho_1\rho_2/q < \infty$ donne immédiatement la formule de connection pour C_n :

$$C_n(\cos\theta;c|q) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{(c/\beta)_k(c)_{n-k}}{(q)_k(q\beta)_{n-k}}\beta^k\frac{1-\beta q^{n-2k}}{1-\beta}C_{n-2k}(\cos\theta;\beta|q).$$

Une question naturelle qui se pose est de savoir si notre méthode appliquée à d'autres lemmes de Bailey (classiques, bien équilibrés ou elliptiques de [127]) pourrait prouver ou éclaircir certaines propriétés pour des familles plus générales de polynômes orthogonaux.

Chapitre 4

Applications arithmétiques et diophantiennes

Dans ce chapitre, nous verrons quelques applications arithmétiques des q-séries, en particulier de la formule d'Andrews (1.16) et donc du lemme de Bailey. L'utilisation que nous en faisons dans le contexte ci-dessous provient du fait que cette formule possède de nombreux paramètres, ce qui permet de transformer beaucoup de q-séries ayant la propriété d'être des séries hypergéométriques basiques très bien équilibrées. Cette observation établit le lien entre les problèmes que nous allons voir, qui semblent pourtant *à priori* sans point commun. Nous verrons ainsi que deux problèmes de divisibilité et d'intégralité de coefficients de polynômes peuvent être résolus par l'outil des q-séries [48]. D'autre part, des propriétés arithmétiques et diophantiennes de valeurs aux entiers de certains q-analogues de fonctions L (comme en particulier la fonction zêta de Riemann) peuvent être établies grâce à ce même outil [58, 59].

4.1 Deux problèmes à priori disjoints

Dans l'article [48], nous résolvons deux problèmes semblant *à priori* disjoints. J'explique dans les deux paragraphes suivants l'origine de ces problèmes, et nous constaterons qu'ils peuvent se résoudre à l'aide du même outil de séries hypergéométriques basiques : la formule d'Andrews (1.16) vue au paragraphe 1.3.3 de l'introduction.

4.1.1 Un problème de divisibilité

En 1998, Calkin [35] a prouvé à l'aide des valuations p-adiques que pour toute paire d'entiers strictement positifs m et n,

$$\binom{2n}{n}^{-1} \sum_{k=-n}^{n} (-1)^k \binom{2n}{n+k}^m \tag{4.1}$$

est un nombre entier. Pour $m = 1, 2$ et 3, en utilisant les formules binomiales, de Kummer et de Dixon (voir [12]), il est aisé de voir que (4.1) est égal à 0, 1 et $\binom{3n}{n}$

respectivement. Lorsque m est supérieur ou égal à 4, les choses se compliquent dans le sens où de Bruijn [31] a démontré par des méthodes asymptotiques que (4.1) n'admet pas de forme close. Cependant, comme signalé au paragraphe 3.3.3 du chapitre 3, les formes finies des identités de Rogers-Ramanujan que nous avons obtenues dans [49] conduisent après nombre de spécialisations à (3.11) et (3.12), qui démontrent le résultat de Calkin dans les cas $m = 4$ et 5. Cette connection fut une surprise, et nous avons cherché à comprendre le lien entre le résultat de Calkin et le contexte des q-séries. Ceci se résume dans les résultats suivants issus de [48], qui généralisent le résultat de Calkin et prouvent par la même occasion le fait que les entiers en question sont positifs.

Théorème 4.1 *Pour $m \geq 3$ et toute famille d'entiers positifs $n_1, \ldots, n_m$, on a :*

$$\sum_{k=-n_1}^{n_1} (-1)^k q^{(m-1)k^2+\binom{k}{2}} \prod_{i=1}^{m} \begin{bmatrix} n_i + n_{i+1} \\ n_i + k \end{bmatrix}_q$$
$$= \begin{bmatrix} n_1 + n_m \\ n_1 \end{bmatrix}_q \sum_{\lambda} \prod_{i=1}^{m-2} q^{\lambda_i^2} \begin{bmatrix} \lambda_{i-1} \\ \lambda_i \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n_{i+1} + n_{i+2} \\ n_{i+1} - \lambda_i \end{bmatrix}_q, \tag{4.2}$$

où $n_{m+1} = \lambda_0 = n_1$ et la somme porte sur toutes les suites $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-2})$ d'entiers positifs ou nuls tels que $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{m-2}$.

En posant $q = 1$ dans (4.2), on obtient une généralisation directe du résultat de Calkin (4.1).

Corollaire 4.2 *Pour $m \geq 3$ et toute suite d'entiers strictement positifs $n_1, \ldots, n_m$, on a :*

$$\sum_{k=-n_1}^{n_1} (-1)^k \prod_{i=1}^{m} \binom{n_i + n_{i+1}}{n_i + k} = \binom{n_1 + n_m}{n_1} \sum_{\lambda} \prod_{i=1}^{m-2} \binom{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \binom{n_{i+1} + n_{i+2}}{n_{i+1} - \lambda_i}, \tag{4.3}$$

où $n_{m+1} = \lambda_0 = n_1$ et la somme porte sur toutes les suites $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-2})$ d'entiers positifs tels que $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{m-2}$.

Remarque 4.3 *Pour $m = 1$ et $m = 2$, il est aisé de voir que le membre de gauche de (4.3) est égal à 0 et $\binom{n_1+n_2}{n_1}$ respectivement. Le résultat de Calkin provient de (4.3) en posant $n_i = n$ pour $i = 1, \ldots, m$.*

Calkin [35] avait en fait lui-même donné un q-analogue partiel de (4.1) en considérant la somme alternée $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^{jk} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^m$. Dans cette direction, nous avons donc aussi prouvé le résultat d'intégralité suivant.

Théorème 4.4 *Pour toute famille d'entiers strictement positifs $n_1, \ldots, n_m$, $n_{m+1} = n_1$, la somme alternée*

$$S(n_1, \ldots, n_m; j, q) := \begin{bmatrix} n_1 + n_m \\ n_1 \end{bmatrix}_q^{-1} \sum_{k=-n_1}^{n_1} (-1)^k q^{jk^2+\binom{k}{2}} \prod_{i=1}^{m} \begin{bmatrix} n_i + n_{i+1} \\ n_i + k \end{bmatrix}_q$$

est un polynôme en q avec des coefficients entiers positifs pour $0 \leq j \leq m-1$.

En posant $n_1 = \cdots = n_m = n$, on obtient un q-analogue complet du résultat de Calkin.

Corollaire 4.5 *Pour toute paire d'entiers strictement positifs m, n, et pour $0 \leq j \leq m-1$,*

$$\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q^{-1} \sum_{k=-n}^{n} (-1)^k q^{jk^2+\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} 2n \\ n+k \end{bmatrix}_q^m$$

est un polynôme en q à coefficients entiers positifs.

Nous avons donné dans [48] une liste de corollaires et de résultats similaires aux théorèmes précédents, sur lesquels je ne reviendrai pas ici. En revanche, les méthodes de démonstration s'inscrivent complètement dans le cadre de ce texte. Nous avons prouvé le Théorème 4.1 via une relation de récurrence pour $S(n_1, \ldots, n_m; j, q)$, qui permet aussi de démontrer le Théorème 4.4. Cependant, nous avons aussi expliqué comment (4.2) est une conséquence de la formule d'Andrews (1.16).

Pour conclure ce paragraphe, mentionnons le fait que les propriétés de divisibilité évoquées précédemment nous ont conduits à énoncer un certain nombre de conjectures, que nous ne sommes pas parvenus à démontrer par nos méthodes. Voici l'une d'entre elles en guise d'exemple.

Conjecture 4.6 *Pour toute paire d'entiers strictement positifs m et n, le plus grand diviseur commun aux entiers*

$$\left\{ \sum_{k=-n}^{n} (-1)^k \binom{2n}{n+k}^r, \ r = m, m+1, \ldots \right\}$$

est égal à $\binom{2n}{n}$.

4.1.2 Un problème d'intégralité

Les entiers suivants sont invoqués dans la célèbre preuve d'Apéry [17] de l'irrationalité de $\zeta(3)$, et sont souvent appelés *nombres d'Apéry* :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2.$$

Schmidt, dans [109], en utilisant la *transformée de Legendre* sur laquelle je reviendrai un peu plus loin, a prouvé l'expression suivante des nombres d'Apéry :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^3. \tag{4.4}$$

Ce genre d'identité intrigante éveille fréquemment la curiosité des combinatoristes, et il se trouve que Strehl, dans [120], en a donné six démonstrations différentes, dont une purement combinatoire, une autre qui recourt à l'hypergéométrie et une troisième via une vérification automatique par ordinateur. Cependant, malgré tous ces points de vue, Strehl n'est pas parvenu à résoudre le problème suivant soulevé par Schmidt.

Problème 4.7 (Schmidt [109]) *Soit n un entier positif ou nul. Pour tout entier $r \geq 2$, définissions une suite de nombres $\{c_k^{(r)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, indépendants du paramètre n, par la relation*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^r \binom{n+k}{k}^r = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} c_k^{(r)} .$$

Est-il alors vrai que les nombres $c_k^{(r)}$ sont des entiers ?

Une réponse positive à cette question a été donnée récemment par Zudilin dans [134], via la transformée de Legendre (qui met en évidence l'existence des nombres $c_k^{(r)}$) et un cas particulier de la spécialisation $q = 1$ dans la formule d'Andrews (1.16). Ceci établit un lien plutôt surprenant entre le problème évoqué au paragraphe précédent et les suites d'Apéry. La méthode de Zudilin permet en effet aussi de retrouver le cas particulier $r = 2$ correspondant à a_n, et d'autre part le cas $r = 3$, pour lequel Strehl [120] n'avait qu'une preuve automatique par ordinateur (donc non constructive) de l'égalité :

$$c_k^{(3)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{2j}{j}^2 \binom{2j}{k-j} .$$

A la fin de l'article [134], Zudilin soulève la question d'énoncer et prouver un q-analogue du Problème 4.7. Nous avons répondu à cette question dans [48], en utilisant la *q-transformée de Legendre* et sans surprise l'identité d'Andrews (1.16). Rappelons que la q-transformée de Legendre est l'inversion suivante (le cas $q = 1$ étant la transformée de Legendre évoquée ci-dessus) :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n+k \\ n-k \end{bmatrix}_q b_k \iff b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{1-q^{2k+1}}{1-q^{n+k+1}} \begin{bmatrix} 2n \\ n-k \end{bmatrix}_q a_k , \qquad (4.5)$$

qui est en fait un cas particulier du q-analogue dû à Carlitz de la formule d'inversion de Gould-Hsu [36] (voir aussi l'inversion de matrices très générale de Krattenthaler dans [70]). En utilisant (4.5) et (1.16), nous avons démontré dans [48] le résultat suivant répondant à la question de Zudilin.

Théorème 4.8 *Soit n un entier positif ou nul. Pour tout entier $r \geq 2$, définissions une suite de fractions rationelles $\{c_k^{(r)}(q)\}_{k\in\mathbb{N}}$, indépendantes du paramètre n, par la relation :*

$$\sum_{k=0}^{n} q^{r\binom{n-k}{2}+(1-r)\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^r \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q^r = \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{n-k}{2}+(1-r)\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q c_k^{(r)}(q) . \qquad (4.6)$$

Alors $c_k^{(r)}(q) \in \mathbb{N}[q]$, pour tout entier $k \in \{0, \ldots, n\}$.

Le q-transformée de Legendre (4.5) permet de prouver l'existence des fractions $c_k^{(r)}(q)$, et d'en donner une expression. Cette expression ne met en revanche absolument pas en lumière le fait que ces fractions sont des polynômes. C'est en compliquant leur écriture via une utilisation appropriée de (1.16) que l'on obtient le résultat souhaité, et même un résultat d'intégralité bien plus général.

Pour finir sur ce thème, mentionnons simplement le cas $r = 2$, pour lequel notre démonstration de (4.6) fournit l'expression suivante :

$$c_n^{(2)}(q) = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} 2j \\ n \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q^2 q^{2\binom{n-j}{2}}. \tag{4.7}$$

Ces coefficients sont donc des q-analogues des nombres d'Apéry $a_n = c_n^{(2)}(1)$. Comme l'explique Strehl dans [120], lorsque $q = 1$ on peut déduire (4.4) de (4.7) de façon élémentaire. En revanche, notre q-analogue (4.7) ne conduit pas à un q-analogue naturel de (4.4).

4.2 Valeurs de q-zêta aux entiers positifs

4.2.1 Un peu d'histoire

L'étude de l'irrationalité des valeurs de la *fonction zêta de Riemann* ζ aux entiers impairs positifs est un problème classique en théorie des nombres. Il est en effet connu que l'expression des valeurs de ζ aux entiers pairs positifs

$$\zeta(2m) = (-1)^{m-1} 2^{2m-1} B_{2m} \frac{\pi^{2m}}{(2m)!}$$

permet d'affirmer, via la transcendance de π due à Lindemann, que chacun de ces nombres est transcendant (ici $m \in \mathbb{N}^*$ et les nombres rationnels B_m sont les nombres de Bernoulli). En revanche, concernant l'étude aux entiers impairs positifs, même si la transcendance est conjecturée, le seul résultat significatif fut pendant longtemps le théorème d'Apéry [17] affirmant que *$\zeta(3)$ est irrationnel.* Plus récemment, Rivoal [99, 100], et Ball-Rivoal [22] ont eu l'idée de considérer les valeurs de ζ aux entiers impairs positifs dans leur ensemble plutôt qu'individuellement, ce qui leur permit de prouver qu'*il existe parmi les nombres $\zeta(2m+1)$, $m \in \mathbb{N}^*$, une infinité de nombres irrationnels*, en donnant la minoration pour A entier pair suffisamment grand :

$$\dim_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\zeta(3) + \cdots + \mathbb{Q}\zeta(A-1)) \geq \frac{\log A}{1 + \log 2}(1 + \mathrm{o}(1)).$$

La méthode employée a conduit à des versions quantitatives [22, 72, 99, 101], jusqu'à l'article récent de Zudilin [135] dans lequel il est prouvé qu'*au moins l'un des nombres $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ est irrationnel.* Le lecteur intéressé pourra aussi consulter le survol de Fischler [43] sur ce sujet, ainsi que l'article [39] de Conrad-Flajolet, où une investigation des propriétés d'une famille de *fractions continues*, dont $\zeta(3)$ fait partie, est entreprise.

Dans [58], nous nous intéressons au *q-analogue normalisé de la fonction ζ* considéré d'abord dans [65] et [133], puis plus récemment encore dans [73], et que l'on peut écrire pour $s \in \mathbb{N}^*$ et q un nombre complexe tel que $|q| < 1$ de la façon suivante :

$$\zeta_q(s) = \sum_{k\geq 1} q^k \sum_{d|k} d^{s-1} = \sum_{k\geq 1} k^{s-1}\frac{q^k}{1-q^k}\,.$$

Le terme de q-analogue est justifié ici par la relation valide pour $s \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ (voir le paragraphe 4.3.1 pour une démonstration) :

$$\lim_{q\to 1}(1-q)^s\zeta_q(s) = (s-1)!\zeta(s)\,,$$

où bien entendu $\zeta(s) = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^s}$ est l'expression pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ de la fonction zêta de Riemann. L'un des intérêts de ce q-analogue de ζ réside dans le fait que les valeurs de ζ_q aux entiers pairs positifs sont reliées aux formes modulaires et aux séries d'Eisenstein $E_{2m}(q)$, $m \in \mathbb{N}^*$, (voir [68, 110]) via la relation :

$$E_{2m}(q) = 1 - \frac{4m}{B_{2m}}\zeta_q(2m)\,.$$

Concernant la transcendance des valeurs de ζ_q aux entiers pairs positifs, le résultat définitif est conséquence de la structure de l'espace des formes modulaires sur $SL_2(\mathbb{Z})$ [110] et d'un théorème d'indépendance algébrique sur les séries d'Eisenstein $E_2(q)$, $E_4(q)$ et $E_6(q)$ dû à Nesterenko [90]. En effet, on peut déduire de cela que pour $m \in \mathbb{N}^*$ et q *algébrique* (en particulier $1/q \in \mathbb{Z} \setminus \{-1;1\}$), *les nombres $\zeta_q(2m)$ sont tous transcendants.*

Ceci conduit naturellement à se pencher sur le cas des valeurs de ζ_q aux entiers impairs positifs. Remarquons tout d'abord que malgré l'analogie manifeste entre les résultats de transcendance des valeurs de ζ et ζ_q ($1/q \in \mathbb{Z} \setminus \{-1;1\}$) aux entiers pairs positifs, il n'est aujourd'hui possible d'affirmer l'irrationalité de $\zeta_q(3)$ pour aucune valeur de q. En fait, seule l'irrationalité de $\zeta_q(1)$ est connue [25] pour diverses valeurs de q. D'autre part, on sait depuis [97] que $1, \zeta_q(1)$ *et* $\zeta_q(2)$ *sont linéairement indépendants sur* $\mathbb{Q}$ *pour* $1/q \in \mathbb{N}\setminus\{0,\,1\}$. Dans cette direction, le résultat principal de Krattenthaler-Rivoal-Zudilin dans [73] affirme que pour $1/q \in \mathbb{Z} \setminus \{-1;1\}$ et A entier pair :

$$\dim_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\zeta_q(3) + \cdots + \mathbb{Q}\zeta_q(A-1)\right) \geq f(A)\,, \tag{4.8}$$

où

$$f(A) = \max_{\substack{r\in\mathbb{N}\\ 1\leq r\leq A/2}} f(r;A) \quad \text{avec} \quad f(r;A) := \frac{4rA + A - 4r^2}{\left(\frac{24}{\pi^2}+2\right)A + 8r^2}\,.$$

Cette minoration donne des informations asymptotiques (et donc prouve que *pour* $1/q \in \mathbb{Z}\backslash\{-1;1\}$*, il y a une infinité de nombres irrationnels parmi les nombres* $\zeta_q(2m+1)$*,* $m \in \mathbb{N}$) via l'équivalent

$$f(A) \sim \frac{\pi}{2\sqrt{\pi^2+12}}\sqrt{A} \quad \text{lorsque} \quad A \to +\infty\,,$$

mais aussi quantitatives. En effet, il suffit de choisir une valeur de $A \geq 4$ la plus petite possible et donnant une dimension supérieure ou égale à 2 (l'idéal serait $A = 4$, ce qui montrerait l'irrationalité de $\zeta_q(3)$). Cependant, il s'avère dans [73] que la valeur minimale exploitable est $A = 12$, ce qui fournit le résultat suivant : *pour* $1/q \in \mathbb{Z} \setminus \{-1;1\}$*, au moins l'un des nombres* $\zeta_q(3), \zeta_q(5), \zeta_q(7), \zeta_q(9), \zeta_q(11)$ *est irrationnel.*

Nous verrons dans les deux paragraphes suivants comment retrouver le résultat (4.8), puis comment le raffiner de manière tangible en démontrant une *conjecture des* q*-dénominateurs* via la formule d'Andrews (1.16).

4.2.2 Construction de formes linéaires

Dans [58], nous retrouvons le résultat (4.8) par la même méthode que celle de [73], mais en utilisant des séries hypergéométriques basiques très bien équilibrées, différentes des séries de [73]. L'idée de la démonstration repose sur la proposition suivante, qui est un cas particulier du *critère d'indépendance linéaire de Nesterenko* [89].

Proposition 4.9 (Nesterenko) *Soient un entier* $N \geq 2$ *et des réels* $v_1, \ldots, v_N$*. Supposons qu'il existe* N *suites d'entiers* $(p_{j,n})_{n\geq 0}$ *et des réels* α_1 *et* α_2 *avec* $\alpha_2 > 0$ *tels que :*

i) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\log|p_{1,n}v_1 + \cdots + p_{N,n}v_N| = -\alpha_1$,

ii) pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$*, on a* $\displaystyle\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\log|p_{j,n}| \leq \alpha_2$.

Alors la dimension du $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel engendré par* $v_1, \ldots, v_N$ *vérifie :*

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}v_1 + \cdots + \mathbb{Q}v_N) \geq 1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot$$

Remarque 4.10 *Si en plus des hypothèses de ce critère on connait un facteur commun* δ_n *aux* $p_{j,n}$*, et si* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\log|\delta_n|$ *existe et vaut* δ *(*$< \alpha_2$*), alors en considérant les nouvelles suites d'entiers* $(p_{j,n}/\delta_n)_{n\geq 0}$*, on obtient :*

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}v_1 + \cdots + \mathbb{Q}v_N) \geq 1 + \frac{\alpha_1+\delta}{\alpha_2-\delta} \quad \left(\geq 1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \quad si \quad \alpha_1 > 0\right).$$

Afin d'exploiter le critère de Nesterenko dans notre contexte, l'idée principale consiste à analyser la série hypergéométrique basique suivante :

$$\tilde{S}_n(q) := (q)_n^{A-2r}\sum_{k\geq 1}(1-q^{2k+n})\frac{(q^{k-rn}, q^{k+n+1})_{rn}}{(q^k)_{n+1}^A}q^{k(A-2r)n/2+kA/2-k}\,,$$

où $|q| \neq 1$, A est un entier pair et $r \in \mathbb{N}^*$ est tel que $A > 2r$.

Remarque 4.11 *On peut aussi écrire cette série sous la forme suivante :*

$$\tilde{S}_n(q) = q^{(rn+1)((A-2r)n/2+A/2-1)}(1-q^{n+2rn+2})(q)_n^{A-2r}\frac{(q,q^{n+rn+2})_{rn}}{(q^{rn+1})_{n+1}^A}$$
$$\times\ {}_{A+4}\phi_{A+3}\left[\begin{matrix} a, q\sqrt{a}, -q\sqrt{a}, q^{rn+1}, \dots, q^{rn+1} \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, q^{(r+1)n+2}, \dots, q^{(r+1)n+2} \end{matrix}; q, q^{(A-2r)n/2+A/2-1}\right],$$

avec $a = q^{(2r+1)n+2}$, ce qui montre que $\tilde{S}_n(q)$ est une série hypergéométrique basique très bien équilibrée.

La première étape est une réécriture de $\tilde{S}_n(q)$, sous forme d'une combinaison linéaire en les $\zeta_q(2m+1)$, $m \in \mathbb{N}^*$, ce qui est rendu possible par la structure et les symétries de cette série :

$$\tilde{S}_n(q) = \hat{P}_{0,n}(q) + \sum_{\substack{j=3 \\ j \text{ impair}}}^{A-1} \hat{P}_{j,n}(q)\zeta_q(j)\,.$$

Ici, on a $|q| < 1$, A est *pair* et les $\hat{P}_{j,n}(q)$ font intervenir les *nombres de Stirling de première espèce sans signe* (voir [117]), et sont à priori dans $\mathbb{Q}(q)$, c'est-à dire des fractions rationnelles en q (donc aussi en $1/q$), à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Dans un deuxième temps, on cherche un dénominateur commun $D_n(q)$ à ces fractions rationnelles en $1/q$, vérifiant :

$$D_n(q)\hat{P}_{j,n}(q) \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{q}\right] \quad \forall j \in \{0,3,5,\dots,A-1\}\,.$$

Un tel dénominateur prend ici la forme :

$$D_n(q) = (A-1)!\, q^{\lfloor \alpha n^2+\beta n+\gamma \rfloor} d_n(1/q)^A\,,$$

où $d_n(q)$ est le plus petit multiple commun des polynômes $q-1, \dots, q^n-1$ et $\alpha = -A/8-r^2/2$. Les outils utilisés pour exprimer ce dénominateur sont la formule de Leibniz de dérivation d'un produit de fonctions et la formule de dérivation de Faà di Bruno, associées à des regroupements de termes adéquats. Lorsque $1/q \in \mathbb{Z}\setminus\{-1;1\}$, pour appliquer la Proposition 4.9 à la combinaison linéaire à coefficients entiers $D_n(q)\times\tilde{S}_n(q)$, il ne reste qu'à déterminer l'asymptotique (lorsque $n \to +\infty$) de $\tilde{S}_n(q)$, $\hat{P}_{j,n}(q)$ et $D_n(q)$. Ceci peut se faire grâce d'une part au fait que la série $\tilde{S}_n(q)$ est construite pour que ses premiers termes soient nuls, et d'autre part aux outils classiques de théorie analytique des nombres et à la formule de Cauchy. Notons au passage que l'estimation asymptotique de $d_n(q)$, essentielle pour l'asymptotique du dénominateur $D_n(q)$, a été établie dans [32] et [121] via l'inversion de Möbius.

Tout ceci nous permet dans [58], pour $1/q \in \mathbb{Z}\setminus\{-1;1\}$, d'appliquer la Proposition 4.9 à la combinaison linéaire à coefficients entiers :

$$D_n(q)\times\tilde{S}_n(q) = D_n(q)\hat{P}_{0,n}(q) + \sum_{\substack{j=3 \\ j \text{ impair}}}^{A-1} D_n(q)\hat{P}_{j,n}(q)\,\zeta_q(j)\,,$$

avec les valeurs

$$\alpha_1 = -\left(\frac{A}{8} + \frac{3A}{\pi^2} - \frac{Ar}{2} + \frac{3r^2}{2}\right)\log|1/q|$$

et

$$\alpha_2 = \left(\frac{A}{4} + r^2 + \frac{3A}{\pi^2}\right)\log|1/q|\,.$$

On trouve donc

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\zeta_q(3) + \mathbb{Q}\zeta_q(5) + \cdots + \mathbb{Q}\zeta_q(A-1)) \geq 1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{4rA + A - 4r^2}{\left(\frac{24}{\pi^2} + 2\right)A + 8r^2}\,,$$

redémontrant ainsi la minoration (4.8).

4.2.3 Une amélioration tangible

Nous démontrons dans [58] le raffinement suivant du résultat de Krattenthaler-Rivoal-Zudilin.

Théorème 4.12 *Pour $1/q \in \mathbb{Z}\backslash\{-1;1\}$ et tout entier pair $A \geq 4$, on a la minoration :*

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\zeta_q(3) + \cdots + \mathbb{Q}\zeta_q(A-1)) \geq g(A)\,, \tag{4.9}$$

où

$$g(A) = \max_{\substack{r\in\mathbb{N}\\ 1\leq r\leq A/2}} g(r;A) \quad \textit{avec}\ g(r;A) := \frac{4rA + A - 4r^2}{\left(\frac{24}{\pi^2} + 2\right)A - \frac{24}{\pi^2} + 8r^2}\,,$$

$g(A)$ vérifiant $g(A) \sim \dfrac{\pi}{2\sqrt{\pi^2+12}}\sqrt{A}$ lorsque $A \to +\infty$.

On remarque ainsi qu'asymptotiquement, g se comporte comme f via l'égalité

$$\lim_{A\to+\infty}\frac{g(A)}{\sqrt{A}} = \lim_{A\to+\infty}\frac{f(A)}{\sqrt{A}} = \frac{\pi}{2\sqrt{\pi^2+12}}\,.$$

Cependant, pour toute valeur fixée de A, ce premier théorème améliore la minoration de [73] puisque $g(A) > f(A)$ (car $g(r;A) > f(r;A)$). L'amélioration la plus probante conséquente au Théorème 4.12 est donnée par la version quantitative suivante.

Théorème 4.13 *Pour $1/q \in \mathbb{Z}\setminus\{-1;1\}$, au moins l'un des nombres $\zeta_q(3), \zeta_q(5), \zeta_q(7), \zeta_q(9)$ est irrationnel.*

La démonstration du Théorème 4.12 passe par une amélioration du dénominateur commun $D_n(q)$ donné au paragraphe précédent : nous formulons, puis démontrons, une conjecture des q-dénominateurs qui fournit un nouveau dénominateur commun $\tilde{D}_n(q)$ divisant $D_n(q)$. La minoration (4.15) du Théorème 4.12 est obtenue via l'estimation asymptotique de $\delta_n := D_n(q)/\tilde{D}_n(q)$ (voir la Remarque 4.10 qui suit la Propriété 4.9).

Remarque 4.14 *Pour démontrer directement le Théorème 4.13, le critère de Nestenrenko n'est pas nécessaire. Il suffit en effet d'obtenir une estimation asymptotique de la combinaison linéaire à coefficients entiers* $\tilde{D}_n(q) \times \tilde{S}_n(q)$*,* $1/q \in \mathbb{Z} \setminus \{-1;1\}$*, en* $\zeta_q(3)$*,* $\zeta_q(5)$*,* $\zeta_q(7)$ *et* $\zeta_q(9)$ *(avec les choix* $A = 10$ *et* $r = 2$*). Il n'est donc pas nécessaire de borner la hauteur des coefficients de la combinaison linéaire, ceci n'est utile que pour l'indépendance linéaire.*

Le Théorème 4.12 est une conséquence du résultat suivant, qui est l'expression de notre conjecture des q-dénominateurs, montrant qu'en fait on peut gagner une puissance de $d_n(1/q)$ dans le dénominateur commun aux $\hat{P}_{j,n}(q)$. Il suffit de prouver que cela est vrai pour $\hat{P}_{0,n}(q)$, car les dénominateurs des autres $\hat{P}_{j,n}(q)$ $(j \geq 1)$ divisent tous celui de $\hat{P}_{0,n}(q)$.

Théorème 4.15 *Soient* A *entier pair et* $r \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $A - 2r > 0$*. Soit* $\alpha = -A/8 - r^2/2$ *; il existe* β *et* γ *réels ne dépendant que de* A *et* r *tels que :*

$$q^{\lfloor \alpha n^2 + \beta n + \gamma \rfloor} d_n(1/q)^{A-1} \hat{P}_{0,n}(q) \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{q}\right].$$

La démonstration de ce résultat passe, quant à elle par l'utilisation déjà mentionnée de la formule d'Andrews (1.16), et des décompositions en briques permettant de faire de l'arithmétique des polynômes cyclotomiques, et d'utiliser la formule de Leibniz de dérivation d'un produit de fonctions.

4.3 Extension à d'autres fonctions L

4.3.1 Des q-analogues des séries de Dirichlet

Rappelons qu'un *caractère de Dirichlet* χ est une application multiplicative de $\mathbb{N}$ dans $\{-1;1\}$ (voir [68]), et que la *série de Dirichlet* associée au caractère χ est définie par :

$$L_\chi(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}, \tag{4.10}$$

qui est une série convergente pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. La fonction zêta de Riemann correspond alors au caractère trivial $\chi \equiv 1$. Notons que nous nous intéressons ici uniquement aux valeurs de telles séries aux entiers positifs, les valeurs de leurs prolongements analytiques aux entiers négatifs étant étudiées par exemple par Lovejoy-Ono dans [80], à l'aide d'identités de q-séries. Dans l'idée de généraliser la définition des q-analogues des valeurs de la fonction zêta aux entiers positifs mentionnés au paragraphe précédent, posons pour $|q| < 1$ et $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$L_\chi(s,q) := \sum_{k \geq 1} q^k \sum_{d|k} d^{s-1} \chi(k/d). \tag{4.11}$$

Afin d'examiner les propriétés des valeurs aux entiers s de telles fonctions, on peut, en s'inspirant de [65, 73], prouver la propriété suivante, qui justifie notre construction.

Proposition 4.16 *Soient $s \geq 1$ un entier et $|q| < 1$ un nombre complexe. Alors on a :*

$$\lim_{q \to 1} (1-q)^s L_\chi(s,q) = (s-1)! L_\chi(s) .$$

Démonstration. Rappelons la définition des *nombres de Stirling de deuxième espèce* (voir [117]), qui sont les entiers notés $S(s,j)$ (où s et j sont des entiers tels que $1 \leq j \leq s$) vérifiant :

$$x^s = \sum_{j=1}^{s} (-1)^{s-j} S(s,j) x(x+1) \cdots (x+j-1) .$$

En partant de la définition (4.11), et en remplaçant k par md puis d par k, on peut écrire pour $s \geq 2$:

$$\begin{aligned} L_\chi(s,q) &= \sum_{k \geq 1} \sum_{m \geq 1} q^{mk} k^{s-1} \chi(m) \\ &= \sum_{k \geq 0} (k+1)^{s-1} \sum_{m \geq 1} q^{m(k+1)} \chi(m) \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{m \geq 1} q^{m(k+1)} \chi(m) \sum_{j=1}^{s-1} (-1)^{s-1-j} S(s-1,j) j! \binom{k+j}{j} \\ &= \sum_{j=1}^{s-1} (-1)^{s-1-j} S(s-1,j) j! \sum_{m \geq 1} \chi(m) \frac{q^m}{(1-q^m)^{j+1}} . \end{aligned} \tag{4.12}$$

Mais dans cette dernière expression, il est clair qu'à j fixé, si on multiplie la somme sur m par $(1-q)^{j+1}$ et on fait tendre q vers 1, alors on obtient $L_\chi(j+1,q)$. Ceci montre que si on multiplie (4.12) par $(1-q)^s$, on obtient le résultat souhaité pour $s \geq 2$. Dans le cas où $s = 1$, le résultat est évident dans la mesure où on peut écrire :

$$L_\chi(1,q) = \sum_{k \geq 1} \sum_{m \geq 1} q^{mk} \chi(m) = \sum_{m \geq 1} \frac{q^m}{1-q^m} \chi(m) .$$

□

4.3.2 Cas particulier d'un caractère modulo 4

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au caractère de Dirichlet χ modulo 4, défini par $\chi(2m+1) = (-1)^m$ et $\chi(2m) = 0$. La série de Dirichlet correspondante est alors notée β et parfois appelée *fonction beta de Dirichlet*, définie pour $\mathrm{Re}(s) \geq 1$ par :

$$\beta(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s} .$$

Euler a prouvé que :

$$\beta(2m+1) = \frac{(-1)^m E_{2m}}{2^{2m+2}(2m)!}\pi^{2m+1},$$

où m est un entier positif ou nul et les nombres rationnels E_{2m} sont les *nombres d'Euler*, définis par $1/\cosh(z) = \sum_{k\geq 0} E_k z^k/k!$. Ainsi, comme pour les valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers pairs positifs, on peut affirmer via le théorème de Lindemann que *pour $m \in \mathbb{N}$, $\beta(2m+1)$ est un nombre transcendant.* Pourtant, rien de similaire ne peut être affirmé aux entiers pairs positifs ; les meilleurs résultats connus à ce jour dans cette direction étant dûs à Rivoal-Zudilin dans [103] : *au moins l'un des nombres $\beta(2), \beta(4), \ldots, \beta(12)$ est irrationnel*, et *il existe une infinité de nombres irrationnels parmi $\beta(2), \beta(4), \ldots$.*

Le q-analogue correspondant à (4.11) est noté ici β_q et s'écrit pour tout $s \in \mathbb{N}^*$:

$$\beta_q(s) = \sum_{k\geq 1}\sum_{d|k} \chi(k/d) d^{s-1} q^k = \sum_{k\geq 1} k^{s-1}\frac{q^k}{1+q^{2k}}\cdot \tag{4.13}$$

Comme pour les valeurs aux entiers pairs positifs dans le cas du caractère trivial $\chi \equiv 1$ correspondant à ζ_q, notre définition (4.13) est liée aux formes modulaires lorsque s est un entier impair positif. Pour $s = 1$, on a en effet :

$$\beta_q(1) = \sum_{k\geq 1}\sum_{m\geq 0} (-1)^m q^{(2m+1)k} = \sum_{m\geq 0} (-1)^m \frac{q^{2m+1}}{1-q^{2m+1}}\cdot \tag{4.14}$$

Ceci montre que $\beta_q(1) = (\pi_q - 1)/4$, où π_q est un q-analogue de π. La série π_q a été considérée dans [33, 34], où un majorant de son *exposant d'irrationalité* a été donné. On a en fait aussi (voir [33]) :

$$\beta_q(1) = \sum_{k\geq 1} q^k \sum_{d|k} \chi(k/d) = \frac{\theta^2(q) - 1}{4},$$

où $\theta(q) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}$ est la fonction thêta classique (que l'on retrouve en spécialisant les fonctions thêtas de Ramanujan définies dans l'introduction). Ceci montre que si l'on pose $q = \mathrm{e}^{2i\pi z}$, alors $\beta_q(1)$ est, à une constante rationnelle près, le développement en série de Fourier d'une forme modulaire de poids 1 sur $\Gamma_1(4)$ (voir [68]). De plus, comme il est remarqué dans [33], le théorème d'indépendance algébrique de Nesterenko dans [90] implique que $\theta(q)$, et donc $\beta_q(1)$, est un nombre transcendant lorsque q est algébrique tel que $0 < |q| < 1$.

Concernant les autres valeurs aux entiers impairs positifs, on voit que pour $s \geq 1$ et $q = \mathrm{e}^{2i\pi z}$, $\beta_q(2s+1)$ est aussi le développement en série de Fourier, avec des coefficients algébriques, d'une forme modulaire de poids $2s+1$ sur $\Gamma_1(4)$. Plus précisément, considérons la *série d'Eisenstein de niveau* 4 [68] :

$$G_{2s+1}^{(1,0)}(z) := \sum_{\substack{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m_1,m_2)\equiv(1,0) \bmod 4}} \frac{1}{(m_1 z + m_2)^{2s+1}} .$$

Alors on a le développement :

$$G_{2s+1}^{(1,0)}(z) = \frac{i}{(2s)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2s+1} \sum_{k\geq 1}\sum_{d|k} \chi(k/d) d^{2s} q^{k/4} .$$

Ainsi

$$\beta_q(2s+1) = i(-1)^{s+1} \frac{E_{2s}}{2\beta(2s+1)}\, G_{2s+1}^{(1,0)}(4z) ,$$

et il n'est pas difficile de voir que $z \mapsto G_{2s+1}^{(1,0)}(4z)$ est une forme modulaire de poids $2s+1$ sur $\Gamma_1(4)$. Nous expliquons dans [59] comment appliquer le théorème d'indépendance algébrique de Nesterenko (le résultat de [90] déjà mentionné au paragraphe 4.2.1) à des formes modulaires sur des sous-groupes de congruences (comme par exemple $\Gamma_1(4)$), pour montrer la proposition suivante.

Proposition 4.17 *Pour $s \in \mathbb{N}$ et q un nombre algébrique tel que $0 < |q| < 1$, le nombre $\beta_q(2s+1)$ est transcendant.*

Il est intéressant de faire l'analogie entre cette propriété et la transcendance des valeurs de la fonction β de Dirichlet aux entiers impairs positifs, ainsi qu'à celle des valeurs de la fonction ζ_q aux entiers pairs positifs.

4.3.3 Résultats diophantiens aux entiers pairs positifs

On considère maintenant les valeurs aux entiers pairs positifs, en commençant par le cas $s = 2$. Ce cas particulier a son importance, puisque $\beta(2)$ est la *constante de Catalan*, définie par $G := \sum_{k\geq 0}(-1)^k/(2k+1)^2 = \beta(2)$. Comme nous l'avons déjà vu, il existe de nombreuses similarités entre les comportements diophantiens des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers pairs positifs et celles de la fonction beta de Dirichlet aux entiers impairs positifs. Pourtant, aucune analogie avec le célèbre résultat d'Apéry $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$ dans [17] n'a encore été établi aujourd'hui pour G. En effet, les formes linéaires construites par Rivoal-Zudilin dans [103] ne montrent pas l'irrationalité de G. De plus, même la conjecture des dénominateurs formulée dans [103] ne donne pas la nature arithmétique de G. Signalons que cette conjecture des dénominateurs a été prouvée dans [102] via les *approximants de Padé*, puis de façon simplifiée par des formules de transformations de séries hypergéométriques dans [74].

Même si ce n'est pas complètement évident à première vue, on peut écrire à l'aide de (4.12) :

$$\beta_q(2) = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{q^{2k+1}}{(1-q^{2k+1})^2} ,$$

ce qui exprime que $\beta_q(2)$ est le même q-analogue de G que celui proposé à la fin de [34]. Plutôt que de considérer les valeurs aux entiers pairs positifs individuellement, qui ne semblent pas directement reliées aux séries d'Eisenstein, on montre dans [59] le résultat suivant.

Théorème 4.18 *Pour $1/q \in \mathbb{Z} \setminus \{-1;1\}$ et tout entier impair $A \geq 3$, on a la minoration :*

$$\dim_{\mathbb{Q}} \left(\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\beta_q(2) + \cdots + \mathbb{Q}\beta_q(A-1)\right) \geq h(A)\,, \tag{4.15}$$

où

$$h(A) = \max_{\substack{r \in \mathbb{N} \\ 1 \leq r < A/2}} h(r;A) \quad \text{et } h(r;A) := \frac{4rA + A - 4r^2}{\left(\frac{48}{\pi^2} + 2\right)A + 8r^2 - \frac{16}{\pi^2} + \frac{16r}{3}}\,.$$

De plus $h(A)$ vérifie $h(A) \sim \dfrac{\pi}{2\sqrt{\pi^2+24}}\sqrt{A}$ *lorsque $A \to +\infty$.*

L'estimation asymptotique ci-dessus donne immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 4.19 *Pour $1/q \in \mathbb{Z} \setminus \{-1;1\}$, il y a une infinité de nombres irrationnels parmi $\beta_q(2)$, $\beta_q(4)$, $\beta_q(6)$,....*

D'autre part, l'estimation $h(3;21) \geq 1,02...$ fournit la version quantitative suivante.

Corollaire 4.20 *Pour $1/q \in \mathbb{Z} \setminus \{-1;1\}$, au moins l'un des nombres $\beta_q(2), \beta_q(4), \beta_q(6),\dots,\beta_q(20)$ est irrationnel.*

Notre méthode de démonstration du Théorème 4.18 dans [59] fait de nouveau appel à un cas particulier du critère d'indépendance linéaire de Nesterenko [89], un peu différent de celui utilisé au paragraphe 4.2.2 pour ζ_q. On considère ici aussi une série hypergéométrique basique très bien équilibrée, qui a cette fois la forme suivante :

$$S_n(q) := (q)_n^{A-2r} \sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1} q^{(k-1/2)((A-2r)n/2+A/2-1)} \times (1-q^{2k+n-1}) \frac{(q^{k-rn}, q^{k+n})_{rn}}{(q^{k-1/2})_{n+1}^A}\,,$$

où A est un entier et $r \in \mathbb{N}^*$ est tel que $A - 2r > 0$. On écrit dans un premier temps $S_n(q^2)$ comme une combinaison linéaire en les $\beta_q(2m)$, $m \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n(q^2) = P_{0,n}(q^2) + \sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ pair}}}^{A-1} P_{j,n}(q^2)\beta_q(j)\,,$$

où $|q| < 1$, A et n sont des entiers positifs impairs et $P_{j,n}(q^2)$ est une fraction rationelle en la variable q (donc $1/q$) à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Dans un deuxième temps, on cherche un dénominateur commun, que nous appellerons aussi $D_n(q)$, à ces fractions en la variable $1/q$, vérifiant :

$$D_n(q)P_{j,n}(q^2) \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{q}\right] \quad \text{pour tout } j \in \{0,2,4,\dots,A-1\}\,.$$

Le dénominateur $D_n(q)$ est ici plus compliqué que dans le cas des valeurs de ζ_q aux entiers impairs, ce qui implique quelques difficultés arithmétiques et asymptotiques supplémentaires. On parvient cependant à prouver dans [59] que pour $0 < |q| < 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \log |S_n(q)| &= -\frac{1}{2} r(A-2r) \log |1/q| \,, \\
\limsup_{\substack{n\to+\infty \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n^2} \log |P_{j,n}(q)| &\leq \frac{1}{8}(A+4r^2) \log |1/q| \,, \\
\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \log |D_n(q)| &= \left(\frac{A}{4} + r^2 + \frac{12}{\pi^2}(A-1) + \frac{4r}{3} + \frac{8}{\pi^2} \right) \log |1/q| \,,
\end{aligned}$$

ce qui nous permet d'utiliser le critère de Nesterenko, puis de prouver (4.15).

L'estimation $h(A) \sim \pi\sqrt{A}/2\sqrt{\pi^2+24}$ pour $A \to +\infty$, est obtenue en choisissant $r = u\sqrt{A}$ et en trouvant la valeur maximale de $h(u\sqrt{A}; A)/\sqrt{A}$ en la variable u.

4.3.4 Une conjecture des q-dénominateurs

Pour conclure, nous énonçons dans [59] une conjecture des q-dénominateurs, basée sur des expérimentations informatiques, et sur le cas de ζ_q que nous avons considéré dans [58]. Cette conjecture peut s'exprimer comme suit, en reprenant les notations du paragraphe précédent, et en ajoutant la définition :

$$\varphi_n(x) := \phi_2(x)^n \phi_4(x)^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdots \phi_{2n}(x),$$

où pour tout entier positif t, $\phi_t(x)$ est le *t-ième polynôme cyclotomique*, défini par $\phi_t(x) := \prod_{k\wedge t=1,\, k\leq t}(x - \mathrm{e}^{2ik\pi/t})$.

Conjecture 4.21 *Soient n et A deux entiers positifs, et soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $A-2r > 0$. Pour $\alpha = -A/4 - r^2$, il existe des nombres réels β et γ ne dépendant que de A et r tels que si l'on pose :*

$$\tilde{D}_n(q) := (A-1)!\, q^{\lfloor \alpha n^2 + \beta n + \gamma \rfloor} \varphi_n(1/q)^{2r}\, d_{2n}(1/q)^{A-1} \,,$$

alors on a :

$$\tilde{D}_n(q) P_{j,n}(q^2) \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{q}\right] \quad \forall j \in \{0, 2, 4, \ldots, A-1\} \,.$$

Cette conjecture devrait certainement se prouver en utilisant des formules de transformations de séries hypergéométriques basiques, comme dans [58]. Cependant, démontrer ceci impliquerait que pour $1/q \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 1\}$ et tout entier impair $A \geq 3$:

$$\dim_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\beta_q(2) + \cdots + \mathbb{Q}\beta_q(A-1)) \geq \tilde{h}(A) \,,$$

où

$$\tilde{h}(A) = \max_{\substack{r\in\mathbb{N} \\ 1\leq r<A/2}} \tilde{h}(r;A) \quad \text{et} \quad \tilde{h}(r;A) := \frac{4rA + A - 4r^2}{\left(\frac{48}{\pi^2}+2\right)A + 8r^2 - \frac{48}{\pi^2} + \frac{16r}{3}} \,.$$

Malheureusement, au contraire du cas de ζ_q, ceci ne donne pas de raffinement de la version quantitative dans le Corollaire 4.20. En effet, bien que $\tilde{h}(A) > h(A)$ pour tout A, on a $1 > \tilde{h}(19) \simeq 0.988 > h(19) \simeq 0.973$ et $\tilde{h}(21) \simeq 1.042 > h(21) \simeq 1.028 > 1$.

Bibliographie

[1] Agarwal (A.), Andrews (G. E.) et Bressoud (D.), *The Bailey Lattice*, J. Indian Math. Soc. **51** (1987), 57–73.

[2] Andrews (G. E.), *Applications of basic hypergeometric functions*, SIAM Rev. **16** (1974), 441–484.

[3] Andrews (G. E.), *Problems and prospects for basic hypergeometric functions*, Theory and application for basic hypergeometric functions, R. A. Askey, ed., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Publ. no. 35, Academic Press, New York, 1975, pp. 191–224.

[4] Andrews (G. E.), *The theory of partitions*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Vol. **2**, Addison–Wesley, Reading, Massachusetts, 1976.

[5] Andrews (G. E.), *Plane partitions (I) : the MacMahon conjecture*, studies in Foundations and Combinatorics, Adv. in Mathematic supplementary studies **1** (1978), 131–150.

[6] Andrews (G. E.), *Plane Partitions (III) : The Weak Macdonald Conjecture*, Invent. Math. **53** (1979), 193–225.

[7] Andrews (G. E.), *Macdonald's Conjecture and Descending Plane Partitions* in Combinatorics, Representation Theory and Statistical Methods in Groups (Ed. T. V. Narayana, R. M. Mathsen, and J. G. Williams), New York : Dekker, pp. 91–106, 1980.

[8] Andrews (G. E.), *Multiple series Rogers-Ramanujan type identities*, Pacific J. Math. **114** (1984), 267–283.

[9] Andrews (G. E.), *q-Series : Their Development and Application in Analysis, Combinatorics, Physics, and Computer Algebra*, CBMS Regional Conference Series, Vol. **66**, Amer. Math. Soc., Providence, 1986.

[10] Andrews (G. E.), *Bailey's transform, lemma, chains and tree*, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Special Functions 2000, Tempe, Arizona, USA.

[11] G. E. Andrews et A. Berkovich, *The WP-Bailey Tree and its Implications*, J. London Math. Soc. **66** (2002), 529–549.

[12] Andrews (G. E.), Askey (R.) et Roy (R.) *Special Functions*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Vol. **71**, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[13] Andrews (G. E.) et Burge (W. H.), *Determinant identities*, Pacific J. Math. **158** (1993), 1–14.

[14] Andrews (G. E.), Schilling (A.) et Warnaar (S. O.), *An A_2 Bailey Lemma and Rogers-Ramanujan-type Identities*, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), 677–702.

[15] Askey (R.), *The very well poised ${}_6\psi_6$. II*, Proc. Amer. Math. Soc. **90** (1984), 575–579.

[16] Askey (R.) et Ismail (M. E. H.), *The very well poised ${}_6\psi_6$*, Proc. Amer. Math. Soc. **77** (1979), 218–222.

[17] Apéry (R.), *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Astérisque **61** (1979), 11–13.

[18] Bailey (W. N.), *An identity involving Heine's basic hypergeometric series*, J. London Math. Soc. **4** (1929), 254–257.

[19] Bailey (W. N.), *Series of hypergeometric type which are infinite in both directions*, Quart. J. Math. (Oxford) **7** (1936), 105–115.

[20] Bailey (W. N.), *Identities of the Rogers-Ramanujan type*, Proc. London Math. Soc. (2) **50** (1949), 1–10.

[21] Bailey (W. N.), *On the basic bilateral hypergeometric series ${}_2\psi_2$*, Quart. J. Math. (Oxford) (2) **1** (1950), 194–198.

[22] Ball (K.) et Rivoal (T.), *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, Invent. Math. **146** (2001), 193–207.

[23] Berkovich (A.) et Paule (P.), *Variants of The Andrews-Gordon Identities*, Ramanujan J. **5** (2001), 391–404.

[24] Berkovich (A.), McCoy (B. M.) et Schilling (A.), *$N = 2$ Supersymmetry and Bailey Pairs*, Physica A **228** (1996), 33–62.

[25] Borwein (P.), *On the irrationality of certain series*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **112** (1992), 141–146.

[26] Bressoud (D.), *Elementary proof of MacMahon's conjecture*, J. Alg. Combin. **7** (1998), 253–257.

[27] Bressoud (D. M.), *Analytic and combinatorial generalizations of the Rogers-Ramanujan identities*, Mem. Amer. Math. Soc. **24**, no 227 (1980).

[28] Bressoud (D.), *Proofs and Confirmations, The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*, Cambridge University Press, 1999.

[29] Bressoud (D.), Ismail (M.) et Stanton (D.), *Change of Base in Bailey Pairs*, Ramanujan J. **4** (2000), 435–453.

[30] Bromwich (T. J. l'A.), *An introduction to the theory of infinite series*, 2nd ed., Macmillan, London, 1949.

[31] de Bruijn (N. G.), *Asymptotic Methods in Analysis*, Dover, New York, 1981.

[32] Bundschuh (P.) et Väänänen (K.), *Arithmetical investigations of a certain infinite product*, Compositio Math. **91** (1994), 175–199.

[33] BUNDSCHUH (P.) et ZUDILIN (W.), *Rational approximation to a q-analogue of π and some other q-series*, proceedings of the 70th birthday conference in honour of W. M. Schmidt(Vienna, November 2003), Vienna, Springer-Verlag (2007), 17 pages.

[34] BUNDSCHUH (P.) et ZUDILIN (W.), *Irrationality measures for certain q-mathematical constants*, Math. Scand. **101** (2007), 104–122.

[35] CALKIN (N. J.), *Factors of sums of powers of binomial coefficients*, Acta Arith. **86** (1998), 17–26.

[36] CARLITZ (L.), *Some inverse relations*, Duke Math. J. **40** (1973), 893–901.

[37] CAUCHY (A.-L.), *Mémoire sur les fonctions dont plusieurs valeurs sont liées entre elles par une équation linéaire, et sur diverses transformations de produits composés d'un nombre indéfini de facteurs*, C. R. Acad. Sci. Paris **17** (1843), 523 ; réimprimé dans *Oeuvres de Cauchy*, Ser. 1 **8**, Gauthier-Villars, Paris (1893), 42–50.

[38] CHEN (W. Y. C.) et FU (A. M.), *Semi-Finite Forms of Bilateral Basic Hypergeometric Series*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 1719–1725.

[39] CONRAD (E. V. F.) et FLAJOLET (P.), *The Fermat cubic, elliptic functions, continued fractions, and a combinatorial excursion*, Séminaire Lotharingien Combin. **54** (2006), 1–44 (B54g).

[40] CORTEEL (S.) et LOVEJOY (J.), *Overpartitions*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), 1623–1635.

[41] CORTEEL (S.), SAVELIEF (C.) et VULETIĆ (M.), *Plane overpartitions and cylindric partitions*, Prépublication, 2009.

[42] FISCHER (I.), *Another refinement of the Bender-Knuth (ex-)Conjecture*, European J. Combin. **27** (2006), 290–321.

[43] FISCHLER (S.), *Irrationalité de valeurs de zêta (d'après Apéry, Rivoal, ...)*, Sem. Bourbaki 2002–2003, exposé no. 910, Astérisque **294** (2004), 27–62.

[44] FULTON (W.), *Young tableaux. With applications to representation theory and geometry*, London Mathematical Society Student Texts **35**, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[45] GARRETT (K.), ISMAIL (M. E. H.) et STANTON (D.), *Variants of the Rogers-Ramanujan Identities*, Adv. Appl. Math. **23** (1999), 274–299.

[46] GASPER (G.) et RAHMAN (M.), *Basic Hypergeometric Series*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Vol. **35**, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[47] GESSEL (I.) et VIENNOT (G.), *Binomial determinants, paths and hook length formulae*, Adv. Math. **58** (1985), 300–321.

[48] GUO (V.), JOUHET (F.) et ZENG (J.), *Factors of alternating sums of products of binomial and q-binomial coefficients*, Acta Arith. **127** (2007), 17–31.

[49] Guo (V. J. W.), Jouhet (F.) et Zeng (J.), *New Finite Rogers-Ramanujan Identities*, Ramanujan J. **19** (2009), 247–266.

[50] Guo (V. J. W.) et Zeng (J.), *Multiple extensions of a finite Euler's pentagonal number theorem and the Lucas formulas*, Discr. Math. **308** (2008), 4069–4078.

[51] Ishikawa (M.), *On refined enumerations of totally symmetric self-complementary plane partitions I*, prépublication, arXiv math.CO/0602068.

[52] Ishikawa (M.), *On refined enumerations of totally symmetric self-complementary plane partitions II*, prépublication, arXiv math.CO/0606082.

[53] Ishikawa (M.) et Jouhet (F.), *Constant terms identities for plane partitions enumeration*, travail en cours.

[54] Ishikawa (M.), Jouhet (F.) et Zeng (J.), *A generalization of Kawanaka's identity for Hall-Littlewood polynomials and applications*, J. Alg. Combin. **23** (4) (2006), 395–412.

[55] Jouhet (F.), *Some more semi-finite forms of bilateral basic hypergeometric series*, Ann. Combin. **11** (2007), 47–57.

[56] Jouhet (F.), *Shifted versions of the Bailey and well-poised Bailey lemmas*, 16 pages, à paraître au Ramanujan J.

[57] Jouhet (F.), Lass (B.) et Zeng (J.), *Sur une généralisation des coefficients binomiaux*, Elec. J. Combin. **11** (2004).

[58] Jouhet (F.) et Mosaki (E.), *Irrationalité aux entiers impairs positifs d'un q-analogue de la fonction zêta de Riemann*, 33 pages, à paraître dans Int. J. Numb. Theory.

[59] Jouhet (F.) et Mosaki (E.), *Diophantine properties for q-analogues of Dirichlet's beta function at positive integers*, 27 pages, à paraître dans Trans. Amer. Math. Soc.

[60] Jouhet (F.) et Schlosser (M.), *Another proof of Bailey's ${}_6\psi_6$ summation*, Aeq. Math. **70** (1–2) (2005), 43–50.

[61] Jouhet (F.) et Zeng (J.), *Généralisation de formules de type Waring*, Séminaire Lotharingien Combin. **44** (2000), 9 pages.

[62] Jouhet (F.) et Zeng (J.), *Some new identities for Schur functions*, Adv. Appl. Math. **27** (2001), 493–509.

[63] Jouhet (F.) et Zeng (J.), *New Identities for Hall-Littlewood Polynomials and Applications*, Raman. J. **10** (2005), 89–112.

[64] Kaneko (J.), *q-Selberg integrals and Macdonald polynomials*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **29** (1996), 1086–1110.

[65] Kaneko (M.), Kurokawa (N.) et Wakayama (M.), *A variation of Euler's approach to values of the Riemann zeta function*, Kyushu J. Math. **57** (2003), 175–192.

[66] Kawanaka (N.), *On subfield symmetric spaces over a finite field*, Osaka J. Math. **28** (1991), 759–791.

[67] Kawanaka (N.), *A q-series identity involving Schur functions and related topics*, Osaka J. Math. **36** (1999), 157–176.

[68] Koblitz (N.), *Introduction to elliptic curves and modular forms*, Graduate Texts in Math. **97**, Springer-Verlag, 1984. Second edition, 1993.

[69] Krattenthaler (C.), *The major counting of nonintersecting lattice paths and generating functions for tableaux*, Mem. Amer. Math. Soc. **115**, no. 552, Providence, R. I., 1995.

[70] Krattenthaler (C.), *A new matrix inverse*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 47–59.

[71] Krattenthaler (C.), *Advanced determinant calculus*, Séminaire Lotharingien Combin. **42** ("The Andrews Festschrift") (1999), 67 pages.

[72] Krattenthaler (C.) et Rivoal (T.), *Hypergéométrie et Fonction Zêta de Riemann*, Mem. Amer. Math. Soc. **186**, no. 875 (2007), 1–87.

[73] Krattenthaler (C.), Rivoal (T.) et Zudilin (W.), *Séries hypergéométriques basiques, q-analogues des valeurs de la fonction zêta et séries d'Eisenstein*, J. Inst. Jussieu **5** (2006), 53–79.

[74] Krattenthaler (C.) et Rivoal (T.), *On a linear form for Catalan's constant*, South East Asian J. Math. Math. Sci. **6** (2008), 3–15.

[75] Kuperberg (G.), *Another proof of the alternating sign matrix conjecture*, Int. Math. Res. Notices **3** (1996), 139–150.

[76] Kuperberg (G.), *Symmetry classes of alternating-sign matrices under one roof*, Ann. Math. **156** (2002), 835–866.

[77] Langer (R.), Schlosser (M.) et Warnaar (S. O.), *Theta functions, elliptic hypergeometric series, and Kawanaka's Macdonald polynomial conjecture*, Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications (SIGMA) **5** (2009), 055, 20 pages.

[78] Lascoux (A.), *Littlewood's formulas for characters of orthogonal and symplectic groups*, dans Algebraic Combinatorics and Quantum Groups, N. Jing, ed., (World Scientific Publishing, River Edge, NJ, 2003), pp. 125–133.

[79] Lovejoy (J.) et Ono (K.), *Extension of Ramanujan's congruences for the partition function modulo powers of five*, J. Reine Angew. Math. **542** (2002), 123–132.

[80] Lovejoy (J.) et Ono (K.), *Hypergeometric generating functions for values of Dirichlet and other L-functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA vol. **100** no. 12 (2003), 6904–6909.

[81] Macdonald (I. G.) *Affine root systems and Dedekind's η-function*, Invent. Math. **15** (1972), 91–143.

[82] Macdonald (I. G.) *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, second edition, Oxford Science Publications, 1995.

[83] MacMahon (P. A.), *Combinatory Analysis I, II*, Cambridge University Press, 1915, 1916 (réimprimé par Chelsea, New York, 1960).

[84] MC LAUGHLIN (J.) et ZIMMER (P.), *General WP-Bailey Chains*, à paraître au Ramanujan J., 20 pages.

[85] MILLS (W. H.), ROBBINS (D. P.) et RUMSEY (H.), *Proof of the Macdonald Conjecture* Invent. Math. **66** (1982), 73–87.

[86] MILLS (W. H.), ROBBINS (D. P.) et RUMSEY (H.), *Alternating sign matrices and descending plane partitions*, J. Combin. Th. Ser. A **34** (1983), 340–359.

[87] MILLS (W. H.), ROBBINS (D. P.) et RUMSEY (H.), *Self-complementary totally symmetric plane partitions*, J. Combin. Theory Ser. A **42** (1986), 277–292.

[88] MILLS (W. H.), ROBBINS (D. P.) et RUMSEY (H.), *Enumeration of a symmetry class plane partitions*, Discr. Math. **67** (1987), 43–55.

[89] NESTERENKO (Yu. V.), *On the linear independance of numbers*, (en russe) Vest. Mosk. Univ., Ser. I, no. 1 (1985), 46–54 ; trad. en anglais dans Mosc. Univ. Math. Bull. **40**.1 (1985), 69–74.

[90] NESTERENKO (Yu. V.), *Modular functions and transcendance questions*, (en russe) Math. Sb. **187**.9 (1996), 65–96 ; trad. en anglais dans Sb. Math. **187**.9 (1996), 1319–1348.

[91] ONO (K.), *Distribution of the partition function modulo m*, Ann. Math. **151** (2000), 293–307.

[92] OKADA (S.), *Enumeration of symmetry classes of alternating sign matrices and characters of classical groups*, J. Alg. Comb. **23** (2006), 43–69.

[93] PAK (I.), *Partition Bijections, a Survey*, Ramanujan J. **12** (2006), 5–75.

[94] PAULE (P.), *The Concept of Bailey Chains*, Séminaire Lotharingien Combin. **18** (1987), 24 pages.

[95] PAULE (P.), *Short and easy computer proofs of the Rogers-Ramanujan identities and of identities of similar type*, Elec. J. Combin. **1** (1994), #R10.

[96] PETKOVŠEK (M.), WILF (H.) et ZEILBERGER (D.), *A=B*, http ://www.math.upenn.edu/ wilf/AeqB.html

[97] POSTELMANS (K.) et VAN ASSCHE (W.), *Irrationality of $\zeta_q(1)$ and $\zeta_q(2)$*, J. Number Theory **126** (2007), 119–154.

[98] RAZUMOV (A. V.) et STROGANOV (Y. G.), *Enumeration of half-turn symmetric alter- nating sign matrices of odd order*, Theor. Math. Phys. 148 (2006) 1174–1198.

[99] RIVOAL (T.), *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I Math. **331** (2000), 267–270.

[100] RIVOAL (T.), *Propriétés diophantiennes des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers impairs*, thèse de doctorat, Université de Caen, 2001. `http ://theses-EN-ligne.in2p3.fr`.

[101] RIVOAL (T.), *Irrationalité d'au moins un des neuf nombres $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(21)$*, Acta Arith. **103** (2002), 157–167.

[102] Rivoal (T.), *Nombres d'Euler, approximants de Padé et constante de Catalan*, Ramanujan J. **11** (2006), 199–214.

[103] Rivoal (T.) et Zudilin (W.), *Diophantine properties of numbers related to Catalan's constant*, Math. Ann. **326** (2003), 705–721.

[104] Robbins (D. P.) et Rumsey (H.), *Determinants and alternating sign matrices*, Adv. Math. **62** (1986), 169–184.

[105] Rogers (L. J.), *Second memoir on the expansion of certain infine products*, Proc. London Math. Soc. **25** (1894), 318–343.

[106] Schilling (A.) et Warnaar (S. O.), *A Higher Level Bailey Lemma : Proof and Application*, Ramanujan J. **2** (1998), 327–349.

[107] Schlosser (M.), *A simple proof of Bailey's very-well-poised $_6\psi_6$ summation*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2001), 1113–1123.

[108] Schlosser (M.), *Abel–Rothe type generalizations of Jacobi's triple product identity*, dans '*Theory and Applications of Special Functions. A Volume Dedicated to Mizan Rahman* (M. E. H. Ismail and E. Koelink, eds.), Dev. Math. **13** (2005), 383–400.

[109] Schmidt (A. L.), *Legendre transforms and Apéry's sequences*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **58** (1995), 358–375.

[110] Serre (J. P.), *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

[111] Sills (A. V.), *Finite Rogers-Ramanujan type identities*, Elec. J. Combin. **10** (2003), #R13.

[112] Slater (L. J.), *General transformations of bilateral series*, Quart. J. Math. (Oxford) **3** (1952), 73–80.

[113] Slater (L. J.), *Further identities of the Rogers-Ramanujan type*, Proc. London Math. Soc. **54** (1951–52), 147–167.

[114] Slater (L. J.), *Generalized hypergeometric functions*, Cambridge University Press, London/New York, 1966.

[115] Slater (L. J.) et Lakin (A.), *Two proofs of the $_6\psi_6$ summation theorem*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **9** (1953–57), 116–121.

[116] Stanley (R. P.), *Theory and application of plane partitions I, II*, Studies in Appl. Math. **50** (1971), 167–188 et 259–279.

[117] Stanley (R. P.), *Enumerative Combinatorics*, Vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[118] Stanley (R. P.), *Enumerative Combinatorics*, Vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[119] Stembridge (J. R.), *Hall-Littlewood functions, plane partitions, and the Rogers-Ramanujan identities*, Trans. Amer. Math. Soc. **319** (1990), 469–498.

[120] Strehl (V.), *Binomial identities — combinatorial and algorithmical aspects*, Discr. Math. **136** (1994), 309–346.

[121] Van Assche (W.), *Little q-Legendre polynomials and irrationality of certain Lambert series*, Ramanujan J. **5**.3 (2001), 295–310.

[122] Vuletić (M.), *A generalization of MacMahon's formula*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), 2789–2804.

[123] Warnaar (S. O.), *50 years of Bailey's lemma*, Algebraic combinatorics and applications (Gößweinstein, 1999), 333–347, Springer, Berlin, 2001.

[124] Warnaar (S. O.), *Partial-sum analogues of the Rogers-Ramanujan identities*, J. Combin. Theory Ser. A **99** (2002), 143–161.

[125] Warnaar (S. O.), *Summation and transformation formulas for elliptic hypergeometric series*, Constr. Approx. **18** (2002), 479–502.

[126] Warnaar (S. O.), *Partial theta functions. I. Beyond the lost notebook*, Proc. London Math. Soc. **87** (2003), 363–395.

[127] Warnaar (S. O.), *Extensions of the well-poised and elliptic well-poised Bailey lemma*, Indagationes Math., New Series **14** (2003), 571–588.

[128] Warnaar (S. O.), *Rogers-Szegö polynomials and Hall-Littlewood symmetric functions*, J. Algebra **303** (2006), 810–830.

[129] Warnaar (S. O.), *Hall-Littlewood functions and the $A2$ Rogers-Ramanujan identities*, Adv. Math. **200** (2006), 403–434.

[130] Watson (G. N.), *A new proof of the Rogers-Ramanujan identities*, J. London Math. Soc. **4** (1929), 4–9.

[131] Zeilberger (D.), *A Constant Term Identity Featuring the Ubiquitous (and Mysterious) Andrews-Mills-Robbins-Rumsey Numbers 1, 2, 7, 42, 429, ...*, J. Combin. Th. A **66** (1994), 17–27.

[132] Zeilberger (D.), *Proof of the alternating sign matrix conjecture*, Elec. J. Combin. **3** (1996), R13.

[133] Zudilin (W.), *Diophantine problems for q-zeta values*, (en russe) Mat. Zametki, **72**.6 (2002), 936–940 ; trad. en anglais dans Math. Notes **72**.6 (2002), 858–862.

[134] Zudilin (W.), *On a combinatorial problem of Asmus Schmidt*, Electron. J. Combin. **11** (2004), #R22.

[135] Zudilin (W.), *Arithmetic of linear forms involving odd zeta values*, J. Théor. Nombres Bordeaux **16** (2004), 251–291.