N° d'ordre : 212-2002 Année 2002

THESE

présentée

devant l'**UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON 1**

pour l'obtention

du **DIPLOME DE DOCTORAT**

(arrêté du 30 mars 1992)

présentée et soutenue publiquement le 12 décembre 2002 par

Frédéric JOUHET

SPECIALITE : MATHEMATIQUES PURES

QUELQUES NOUVELLES IDENTITES DE FONCTIONS SYMETRIQUES ET q-SERIES

RAPPORTEURS

M. David BRESSOUD, Macalester College
M. Jacques DESARMENIEN, Université de Marne-la-Vallée
M. Christian KRATTENTHALER, Universität Wien

JURY

M. Jacques DESARMENIEN, Université de Marne-la-Vallée
M. Laurent HABSIEGER, CNRS
M. Christian KRATTENTHALER, Université Lyon 1
M. Pierre LEROUX, Université du Québec à Montréal
M. Jean-Louis NICOLAS, Université Lyon 1, président du jury
M. Jiang ZENG, Université Lyon 1, directeur de thèse

à mon père

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Jiang Zeng, qui m'a donné la possibilité de réaliser ce travail. Il a été un guide et un soutien permanent, et ses encouragements m'ont beaucoup aidé. Ce fût un réel plaisir de travailler sous sa direction durant ces années, j'ai énormément appris grâce à lui.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à David Bressoud, Jacques Désarménien et Christian Krattenthaler qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse. C'est un grand honneur pour moi que Jacques Désarménien et Christian Krattenthaler aient consenti à participer à mon jury. Merci également à Laurent Habsieger et Pierre Leroux qui ont accepté d'être membre de mon jury, ainsi qu'à Jean-Louis Nicolas qui m'a fait l'honneur de le présider. Je suis très flatté de la présence de toutes ces personnes autour de mon travail.

Je voudrais aussi remercier les membres de l'Institut Girard Desargues, en particulier ceux qui m'ont témoigné des encouragements constants et ceux qui sont devenus ou étaient déjà des amis. Il y a eu grâce à toutes ces personnes de très bons moments sans lesquels mon travail m'aurait procuré moins de plaisir.

Je remercie enfin ma famille et mes amis, c'est-à dire ceux qui par leur présence et leur confiance m'ont aidé à réaliser ce travail. Leur affection constante m'a fait le plus grand bien et m'a porté dans les moments difficiles. J'embrasse de tout mon coeur mon fils Kerien dont la seule présence me transporte de bonheur chaque jour depuis plus de deux ans.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Cette thèse est située dans le domaine des fonctions symétriques, de la combinatoire et des q-séries. L'algèbre des fonctions symétriques sur l'alphabet fini $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est constituée de ces fonctions invariantes par permutation des variables. Ces fonctions sont au coeur de nombreux problèmes combinatoires (voir par exemple les livres de Bressoud [18], Comtet [22], Macdonald [48] ou Stanley [58]) et indissociables de la théorie des partitions. Les *fonctions de Schur* $s_\lambda(X)$, grâce à leur interprétation combinatoire en termes de *tableaux de Young*, permettent par exemple de déterminer les fonctions génératrices de nombreuses familles de *partitions planes* (voir [18, 50, 59]). Les partitions planes, quant à elles, sont liées à l'ex-conjecture des *matrices à signes alternants*, résolue par Zeilberger (voir [12, 18, 39, 51, 55, 65]), leur nombre étant le même que le nombre de partitions planes totalement symétriques auto-complémentaires situées dans une boite de la forme $(2m \times 2m \times 2m)$. La bijection entre ces deux familles reste un problème ouvert à ce jour. Les *polynômes de Hall-Littlewood* $P_\lambda(X, q)$, par l'ajout du paramètre q (t dans le livre de Macdonald [48]), sont une extension des fonctions de Schur et ont une expression explicite. L'ajout d'un deuxième paramètre t a conduit Macdonald [48, chapitre VI] à découvrir des fonctions symétriques à deux paramètres, les *polynômes de Macdonald* $P_\lambda(X, q, t)$, qui n'ont en revanche pas d'expression explicite mais qui généralisent les fonctions symétriques précédentes. Les *polynômes de Jack* $J_\lambda(X, \alpha)$, qui sont une spécialisation des polynômes de Macdonald, n'ont pas d'expression explicite et ont été étudiés par de nombreux auteurs (voir par exemple [43, 48, 60]).
La conjecture de Macdonald, exprimant le fait que les polynômes de Macdonald se développent selon des coefficients $K_{\lambda\mu}(q, t)$ (*coefficients de Kostka-*

Foulkes) dans la base des fonctions de Schur modifiées, et que ces coefficients sont des polynômes de deux variables à coefficients entiers positifs, a été démontrée récemment par Haiman [31]. Cependant, on ne connait toujours pas d'interprétation combinatoire de ces coefficients. Dans le cas particulier $t = 0$ des polynômes de Hall-Littlewood, les coefficients ont une interprétation combinatoire due à Lascoux et Schützenberger [41], en termes de statistique de *charges*.
La spécialisation de l'alphabet X des fonctions symétriques fourni un lien avec les q-séries. Par exemple, les r-ièmes fonctions symétriques *élémentaires* e_r et *complètes* h_r sont liées aux coefficients *q-binomiaux* comme suit :

$$e_r(1, q, \ldots, q^{n-1}) = q^{n(n-1)/2} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad h_r(1, q, \ldots, q^{n-1}) = \begin{bmatrix} n + r - 1 \\ r \end{bmatrix}.$$

Il est d'autre part connu que ces expressions ont une interprétation combinatoire en termes de partitions bornées, provenant de l'interprétation combinatoire du coefficient q-binomial [4]. Les fonctions de Schur se spécialisent sur ce même alphabet sous forme d'un produit, dû à Littlewood ([47], [48, p. 44]), faisant appel à la notion de *longueur d'équerre* pour une partition. Macdonald [48, p. 83-85], Désarménien [23] et Stembridge [61] ont obtenu des expressions, sous forme de déterminants, de fonctions génératrices de partitions planes, en sommant des fonctions de Schur sur des partitions vérifiant certaines conditions, puis en spécialisant l'alphabet à l'aide du paramètre q. Lassalle [46] a tout récemment donné une expression des fonctions *monomiales* m_λ sur l'alphabet $\{1, q, \ldots, q^{n-1}\}$.
Stembridge [61] a donné un autre lien entre fonctions symétriques et q-séries en spécialisant l'alphabet dans une identité de sommation de polynômes de Hall-Littlewood, démontrant ainsi de façon originale les célèbres *identités de Rogers-Ramanujan* (voir par exemple [4, 6]) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{\substack{n=1 \\ n\equiv \pm 1 \pmod 5}}^{\infty} (1-q^n)^{-1}, \tag{1.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{\substack{n=1 \\ n\equiv \pm 2 \pmod 5}}^{\infty} (1-q^n)^{-1}. \tag{1.2}$$

Il est à noter que Schur a démontré ces identités de manière élégante à l'aide d'une involution, et cette preuve est rappelée par exemple dans [53].

La première partie de cette thèse présente les partitions d'entiers et l'algèbre des polynômes symétriques et ses principales bases indexées par ces partitions d'entiers. Un des problèmes essentiels dans ce cadre est le développement d'une fonction symétrique sur ces différentes bases.
Par exemple, les formules de Waring développent la n-ième fonction symétrique puissance p_n dans la base des fonctions symétriques élémentaires $(e_\lambda)_\lambda$ et dans celle des fonctions symétriques complètes $(h_\lambda)_\lambda$. Nous généralisons d'abord les formules de Waring en développant les fonctions symétriques puissances évaluées sur l'alphabet $X/(1-tX) := \{x_1/(1-tx_1)\ ,\ x_2/(1-tx_2), \ldots\}$ dans la base linéaire des fonctions symétriques élémentaires et complètes évaluées sur l'alphabet (fini ou infini) $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$:

Théorème 1.1 *Pour tout $k \geq 1$ on a*

$$\begin{aligned} p_k\left(\frac{X}{1-tX}\right) &= \sum_{|\mu|\geq k} t^{|\mu|-k}\binom{|\mu|}{k}(-1)^{|\mu|-l(\mu)}\frac{k\,(l(\mu)-1)!}{\prod_i m_i(\mu)!}e_\mu(X), \\ p_k\left(\frac{X}{1-tX}\right) &= \sum_{|\mu|\geq k} t^{|\mu|-k}\binom{|\mu|}{k}(-1)^{l(\mu)-1}\frac{k\,(l(\mu)-1)!}{\prod_i m_i(\mu)!}h_\mu(X). \end{aligned}$$

Les formules de Waring sont obtenues par la spécialisation $t = 0$ dans ces identités.
De même nous considérons le problème inverse, c'est-à-dire, le développement des n-ièmes fonctions symétriques h_n et e_n évaluées sur l'alphabet $X/(1-tX)$ dans la base des fonctions puissances $(p_\mu)_\mu$ évaluées sur l'alphabet X. Dans ce cas nous aurons besoin d'un coefficient binomial généralisé $\left\langle {\mu \atop n} \right\rangle$ introduit par Lassalle [44], définit pour toute partition μ et pour tout entier n positif comme étant le nombre de façons de choisir n éléments dans le diagramme de Ferrers de μ, dont au moins un par ligne.

Théorème 1.2 *Pour tout entier $k \geq 1$ on a*

$$\begin{aligned} h_k\left(\frac{X}{1-tX}\right) &= \sum_{|\mu|\geq k} t^{|\mu|-k}\frac{\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle}{z_\mu}p_\mu(X), \\ e_k\left(\frac{X}{1-tX}\right) &= \sum_{|\mu|\geq k} t^{|\mu|-k}(-1)^{k-l(\mu)}\frac{\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle}{z_\mu}p_\mu(X). \end{aligned}$$

Lassalle, dans ses travaux sur les polynômes de Jack ([43, 44]), a été amené à conjecturer certaines identités remarquables. Celles-ci furent prouvées par

Lascoux et Lassalle [42] en utilisant le formalisme des λ-anneaux. Notre but était d'utiliser les développements précédents pour donner une démonstration simple et élémentaire de leurs identités. Pour cela, nous avons eu besoin d'exprimer les identités du théorème 1.2 en termes de fonctions génératrices :

Théorème 1.3 *Soient z et $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ des indéterminées indépendantes. Alors la série formelle*

$$F(t,u) := (1+u)^z \prod_{r\geq 1} \left(1 + \frac{u}{1+u} \frac{tx_r}{1-tx_r}\right)$$

admet les trois développements suivants

$$\begin{aligned}
F(t,u) &= \sum_{i,j\geq 0} u^i t^j \sum_{\mu\vdash j,\, l(\mu)\leq i} \binom{z-l(\mu)}{i-l(\mu)} m_\mu(X), \\
F(t,u) &= \sum_{i,j\geq 0} u^i t^j \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{z-j}{i-k} \sum_{\mu\vdash j} \frac{\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle}{z_\mu} p_\mu(X), \\
F(t,u) &= \sum_{i,j\geq 0} u^i t^j \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{z-k}{i-k} \sum_{\mu\vdash j} (-1)^{k-l(\mu)} \frac{\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle}{z_\mu} p_\mu(X).
\end{aligned}$$

Nous en déduisons ensuite de manière évidente le corollaire suivant :

Corollaire 1.4 *Soient z et $X = \{x_1, x_2 \ldots\}$ des indéterminées indépendantes. Pour tous entiers $i, j \geq 1$ on a*

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu\vdash j,\, l(\mu)\leq i} \binom{z-l(\mu)}{i-l(\mu)} m_\mu(X) &= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{z-j}{i-k} \sum_{\mu\vdash j} \frac{\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle}{z_\mu} p_\mu(X) \\
&= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{z-k}{i-k} \sum_{\mu\vdash j} (-1)^{k-l(\mu)} \frac{\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle}{z_\mu} p_\mu(X).
\end{aligned}$$

Ce corollaire a lui même deux conséquences intéressantes, obtenues en identifiant les différents termes selon les bases de l'algèbre des fonctions symétriques (corollaires 2.10 et 2.11 pages 23-24).

Enfin, le corollaire 1.4 et le théorème 1.3 nous ont permis de démontrer de manière élémentaire deux identités remarquables (théorèmes 2.12 et 2.13 pages 24-25), conjecturées par Lassalle ([44, Conjecture 2] et [45, Conjecture 2]), puis prouvées par Lascoux et Lassalle [42, Théorème 4 et Théorème 1].

Notre approche repose cependant essentiellement sur l'opérateur différentiel de l'algèbre des séries formelles, alors que Lascoux et Lassalle utilisent le formalisme des λ-anneaux.

La deuxième partie de cette thèse concerne plus particulièrement la base des fonctions de Schur, définies usuellement pour toute partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0)$ de longueur $\leq n$ par :

$$\begin{aligned} s_\lambda(X) &:= \sum_{w \in S_n} w \left(x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \prod_{i<j} \frac{x_i}{x_i - x_j} \right) \\ &= \det \left(x_i^{\lambda_j + n - j} \right)_{1 \leq i,j \leq n} / \det \left(x_i^{n-j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}, \end{aligned}$$

où S_n est le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ et $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est un alphabet fini de n variables.
On a les trois identités classiques de sommation suivantes [48, pp. 76-77] :

$$\sum_{\lambda} s_\lambda(X) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{1 - x_i x_j}, \tag{1.3}$$

$$\sum_{\lambda \text{ paire}} s_\lambda(X) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i^2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{1 - x_i x_j}, \tag{1.4}$$

$$\sum_{\lambda' \text{ paire}} s_\lambda(X) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{1 - x_i x_j}. \tag{1.5}$$

Ces identités furent généralisées par Ishikawa et Wakayama, dans [33], en utilisant une méthode de calcul de pfaffiens. Pour toute partition λ on note $c_j := c_j(\lambda)$ le nombres de colonnes de longueur j dans λ, c'est-à-dire $c_j = \lambda_j - \lambda_{j+1}$ et on définit pour a et b deux paramètres

$$f_\lambda(a,b) := \prod_{j \text{ impair}} \frac{a^{c_j+1} - b^{c_j+1}}{a - b} \prod_{j \text{ pair}} \frac{1 - (ab)^{c_j+1}}{1 - ab}.$$

Alors Ishikawa et Wakayama ont trouvé et démontré l'identité suivante :

$$\sum_{\lambda} f_\lambda(a,b)\, s_\lambda(X) = \Phi(X; a, b), \qquad \textbf{(Ishikawa-Wakayama)} \tag{1.6}$$

où

$$\Phi(X;a,b) := \prod_i (1-ax_i)^{-1}(1-bx_i)^{-1}\prod_{j<k}(1-x_jx_k)^{-1}.$$

Ishikawa et Wakayama se sont posés la question d'une extension de (1.6), qui consistait à développer $\Phi(X;a,b)\prod_i(1-cx_i)^{-1}$ dans la base des fonctions de Schur. Ils ont conjecturé cette expression, mais leur méthode utilisant les pfaffiens ne leur a pas permis de la démontrer.

Nous démontrons cette conjecture à l'aide de la *formule de Pieri* et du principe d'inclusion-exclusion (théorème 3.5 pages 31-36), ce qui donne l'expression de la fonction $f_\lambda(a,b,c)$ dans le développement :

$$\sum_\lambda f_\lambda(a,b,c)s_\lambda(X) = \Phi(X;a,b)\prod_i(1-cx_i)^{-1}.$$

D'autre part, comme l'a remarqué Bressoud [17], pour $(a,b)=(1,0)$, $(1,-1)$ et $(0,0)$, l'identité (1.6) se réduit respectivement à (1.3), (1.4) et (1.5). Les extensions de ces trois identités consistant à sommer sur des partitions bornées ont été données par Macdonald [48, p. 83-84], Désarménien-Stembridge [23, 61] et Okada [52] respectivement. Ces identités, dont les membres de droite s'expriment sous forme de quotients de déterminants, permettent par spécialisation d'obtenir des fonctions génératrices de partitions planes particulières, grâce à l'interprétation des fonctions de Schur en termes de tableaux de Young. Krattenthaler [37, 38] a obtenu des raffinements de cas particuliers des identités de Macdonald et Désarménien-Stembridge, en précisant le nombre de parts impaires dans les sommations, mais pour l'alphabet particulier $\{q^{2n-1}, q^{2n-3}, \ldots, q\}$. Ses résultats ont des interprétations en termes de tableaux de Young et de partitions planes.

Bressoud a aussi formulé dans [17] le problème consistant à trouver une extension de (1.6) aux partitions bornées, afin de généraliser en une même expression les identités de Macdonald, Désarménien-Stembridge et Okada. Notre seconde généralisation de (1.6) donne une réponse positive à cette question. En effet, nous avons trouvé puis démontré une telle identité en exploitant une méthode due à Macdonald [48].
Pour toute suite $\xi \in \{\pm 1\}^n$, on note $|\xi|_{-1}$ le nombre de -1 dans la suite ξ. Soient $X^\xi := \{x_1^{\xi_1}, \ldots, x_n^{\xi_n}\}$ et

$$D(\xi,z) := 1 - z\prod_i x_i^{(\xi_i-1)/2}.$$

Théorème 1.5 *Pour des entiers strictement positifs m et n,*

$$\sum_{\lambda\subseteq(m^n)} f_\lambda(a,b)s_\lambda(X) = \sum_{\xi\in\{\pm1\}^n} \beta(\xi,a,b)\Phi(X^\xi;a,b)\prod_i x_i^{m(1-\xi_i)/2}$$

où le coefficient $\beta(\xi,a,b)$ est égal à

$$\begin{cases} \left(\dfrac{a^{m+1}}{D(\xi,1/a)} - \dfrac{b^{m+1}}{D(\xi,1/b)}\right)\dfrac{D(\xi,a)D(\xi,b)}{a-b} & \text{si } |\xi|_{-1} \text{ impair,} \\ \left(\dfrac{1}{D(\xi,1)} - \dfrac{(ab)^{m+1}}{D(\xi,1/ab)}\right)\dfrac{D(\xi,1)D(\xi,ab)}{1-ab} & \text{si } |\xi|_{-1} \text{ pair.} \end{cases}$$

Nous obtenons comme conséquences de ce théorème les identités de Macdonald, Désarménien-Stembridge et Okada respectivement, en spécialisant $(a,b)=(1,0)$, $(1,-1)$ et $(0,0)$ (voir pages 43-46). Dans ces cas, les membres de droite s'expriment comme quotients de déterminants. Lorsque $m=0$, ces trois cas particuliers donnent les formules de Weyl pour les systèmes de racine de type B_n, C_n et D_n respectivement ([18], p. 68-69).

L'extension de cette méthode de sommations aux polynômes de Hall-Littlewood fait l'objet de la troisième partie de cette thèse, le but étant ici d'exploiter le paramètre q supplémentaire dans la définition de ces polynômes symétriques.
Nous utilisons dans cette partie les notations standards des q-séries (voir par exemple [24]), rappelées pages 47-48. Pour toute partition $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ de longueur $\leq n$, rappelons que les polynômes de Hall-Littlewood peuvent s'écrire :

$$P_\lambda(X,q) = \prod_{i\geq1}\frac{(1-q)^{m_i}}{(q)_{m_i}} \sum_{w\in S_n} w\left(x_1^{\lambda_1}\cdots x_n^{\lambda_n}\prod_{i<j}\frac{x_i-qx_j}{x_i-x_j}\right).$$

Remarquons que pour $q=0$, $P_\lambda(X,0)=s_\lambda(X)$.

Pour α paramètre, définissons la fonction auxiliaire suivante

$$\Psi_q(X;\alpha) := \prod_i \frac{1}{(1-x_i)(1-\alpha x_i)}\prod_{j<k}\frac{1-qx_jx_k}{1-x_jx_k}.$$

Alors il est bien connu [48, p. 230] que les sommes des $P_\lambda(X,q)$ sur toutes les partitions et sur les partitions paires sont données par les formules suivantes :

$$\sum_\lambda P_\lambda(X,q) = \Psi_q(X;0), \tag{1.7}$$

$$\sum_\lambda P_{2\lambda}(X,q) = \Psi_q(X;-1). \tag{1.8}$$

Pour toute suite $\xi \in \{\pm 1\}^n$, soit de même $X^\xi := \{x_1^{\xi_1},\dots,x_n^{\xi_n}\}$ et notons à nouveau $|\xi|_{-1}$ le nombre de -1 dans ξ. Alors, en sommant les P_λ sur les partitions à parts bornées, Macdonald [48, p. 232] et Stembridge [61] ont respectivement généralisé (1.7) et (1.8) comme suit :

$$\sum_{\lambda_1\le k} P_\lambda(X,q) = \sum_{\xi\in\{\pm1\}^n} \Psi_q(X^\xi;0)\prod_i x_i^{k(1-\xi_i)/2}, \quad \textbf{(Macdonald)}$$

$$\sum_{\substack{\lambda_1\le 2k\\ \lambda\ paire}} P_\lambda(X,q) = \sum_{\xi\in\{\pm1\}^n} \Psi_q(X^\xi;-1)\prod_i x_i^{k(1-\xi_i)}. \quad \textbf{(Stembridge)}$$

Stembridge, dans [61], a exploité ces deux formules en spécialisant l'alphabet par $x_i = zq^{i-1}$, et a obtenu par cette méthode seize multianalogues d'identités de type Rogers-Ramanujan, dont deux extensions des identités de Rogers-Ramanujan (1.1) et (1.2) elles-mêmes. Ce travail constituait donc une preuve originale de ces identités qui sont parmi les plus connues et classiques en combinatoire et q-séries.

Au vu de l'intérêt des formules de Macdonald et Stembridge, et des résultats déduits par Stembridge, nous nous sommes intéressés à d'autres identités de sommations de polynômes de Hall-Littlewood.

Pour α, β deux paramètres, définissons la fonction suivante

$$\Phi_q(X;\alpha,\beta) := \prod_i \frac{1-\alpha x_i}{1-\beta x_i}\prod_{j<k}\frac{1-qx_jx_k}{1-x_jx_k}.$$

Alors nous avons les formules de sommations de polynômes de Hall-Littlewood suivantes [48, p.232] :

$$\sum_{\lambda' \text{ paire}} c_\lambda(q)\,P_\lambda(X,q) = \Phi_q(X;0,0), \tag{1.9}$$

$$\sum_\lambda d_\lambda(q)\,P_\lambda(X,q) = \Phi_q(X;q,1), \tag{1.10}$$

où
$$c_\lambda(q)=\prod_{i\geq 1}(q;q^2)_{m_i(\lambda)/2},\qquad d_\lambda(q)=\prod_{i\geq 1}\frac{(q)_{m_i(\lambda)}}{(q^2;q^2)_{[m_i(\lambda)/2]}}.$$
Remarquons que (1.7) et (1.8) sont des extensions de (1.3) et (1.4) respectivement, alors que (1.9) généralise quant à elle (1.5). Il était donc naturel de s'interroger sur l'existence d'une extension de (1.9) du même type que les formules de Macdonald et Stembridge ci-dessus. Mais comme le fît remarquer Stembridge dans [61], la présence du coefficient $c_\lambda(q)$ (et de $d_\lambda(q)$ pour (1.10)) engendre des problèmes rendant douteuse l'existence d'extensions explicites de (1.9) et (1.10). Cependant, en nous inspirant du travail de Stembridge [61], et grâce à nos résultats précédents sur les fonctions de Schur et à l'outil informatique [62], nous avons pu découvrir et démontrer les deux extensions suivantes de (1.9) et (1.10) :

Théorème 1.6 *Pour $k\geq 1$,*
$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\lambda_1\leq k\\ \lambda'\ paire}} c_{\lambda,k}(q)P_\lambda(X,q) &= \sum_{\substack{\xi\in\{\pm1\}^n\\ |\xi|_{-1}\ pair}}\Phi_q(X^\xi;0,0)\prod_i x_i^{k(1-\xi_i)/2},\\ \sum_{\lambda_1\leq k} d_{\lambda,k}(q)P_\lambda(X,q) &= \sum_{\xi\in\{\pm1\}^n}\Phi_q(X^\xi;q,1)\prod_i x_i^{k(1-\xi_i)/2},\end{aligned}$$
où
$$c_{\lambda,k}(q)=\prod_{i=1}^{k-1}(q;q^2)_{m_i(\lambda)/2},\quad d_{\lambda,k}(q)=\prod_{i=1}^{k-1}\frac{(q)_{m_i(\lambda)}}{(q^2;q^2)_{[m_i(\lambda)/2]}}.$$

La difficulté ici résidait dans la recherche de ces deux coefficients $c_{\lambda,k}(q)$ et $d_{\lambda,k}(q)$, car nous ne connaissions que les cas particuliers $q=0$ correspondant aux fonctions de Schur, et les cas limites $k\to\infty$ ci-dessus.

Ces identités ont inspiré par spécialisations de l'alphabet X la découverte de nouvelles identités sur les q-séries, dont l'une nous a permis de trouver six nouveaux multianalogues de type Rogers-Ramanujan (voir théorèmes 4.4 et 4.5 pages 60-62). Ces multianalogues sont bien sûr des extensions de six identités de type Rogers-Ramanujan, que nous donnons page 63. Quatre d'entre elles se sont révélées être dans la liste de 130 identités de Slater [57], l'une des deux autres peut se déduire de l'identité de q-Kummer [24, p. 236], alors que la dernière semble être nouvelle.
Les identités de polynômes de Hall-Littlewood apparaissent donc, à travers

les travaux de Stembridge et le prolongement que nous en avons fait, comme une manière originale d'obtenir des identités de type Rogers-Ramanujan. La technique la plus classique est l'utilisation du lemme de Bailey [6, 63], qu'exploite Slater dans [56] et [57]. Les extensions par itérations du lemme de Bailey, dues en particulier à Andrews [5, 6] permettent d'obtenir des multianalogues, et nous avons étudié cette approche en la liant aux identités de Stembridge et aux notres (voir pages 72-76).
Enfin, nous nous intéressons dans cette partie à l'interprétation combinatoire éventuelle en termes de partitions des identités que nous avons obtenues.

Remarque. Nos différents travaux ont fait l'objet de deux publications [34, 35] et d'un troisième article qui sera publié prochainement [36].

Chapitre 2

Fonctions symétriques

2.1 Définitions et premières propriétés

Les définitions et notations adoptées sont celles de [48, Chapitre I].

2.1.1 Partitions

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Une *partition* λ de n est une suite décroissante finie d'entiers naturels de somme n :

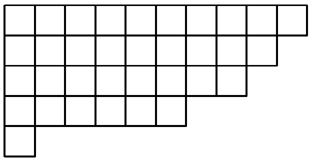
$$\lambda = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots, \lambda_l) \in \mathbb{N}^l,$$

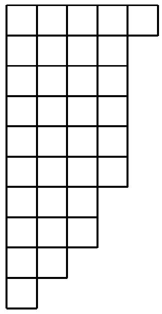
où

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l > 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{l} \lambda_i = n.$$

n est le *poids* de λ et on le note $n = |\lambda|$. On notera aussi $\lambda \vdash n$ le fait que λ est une partition de poids n.
l est la *longueur* de λ et on la note $l = l(\lambda) = max\{i \in \mathbb{N} | \lambda_i > 0\}$.
Les entiers λ_i, pour $i \in \{1, \ldots, l\}$ sont les *parts* de λ. On dira que λ est *paire* lorsque toutes ses parts le sont.
Il est souvent pratique de décrire une partition par ses ordres de multiplicité : on note $m_i = m_i(\lambda) := \#\{j|\lambda_j = i\}$ la *multiplicité* de i dans λ, qui donne le nombre de parts de λ égales à i. Ainsi la partition λ s'écrit aussi $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \ldots)$.
La partition λ' *conjuguée* de λ est définie par $\lambda'_i := \#\{j|\lambda_j \geq i\}$. On a ainsi $|\lambda'| = |\lambda|$ et $l(\lambda') = \lambda_1$.

Le *diagramme de Ferrers* de λ est le sous-ensemble $\{(i,\, j) | j \geq 1, i \leq \lambda_j\}$ de $\mathbb{N}^2$, qu'on identifiera souvent à λ. Pour obtenir le diagramme de Ferrers de λ', il suffit donc d'inverser les lignes et les colonnes de celui de λ.
Exemple. Le dessin suivant donne le diagramme de Ferrers de la partition $\lambda = (10, 9, 8, 6, 1)$ de 34 et celui de sa conjuguée $\lambda' = (5, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 1)$:

$\lambda =$ 

$\lambda' =$ 

2.1.2 Algèbre des fonctions symétriques

Soient $n \in \mathbb{N}$ et un alphabet $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de n variables indépendantes. Soit $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ l'ensemble des polynômes de n variables à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Un polynôme $P \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ est *symétrique* si P est invariant sous l'action du groupe des permutations S_n, c'est-à-dire si

$$\forall \sigma \in S_n,\ P(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = P(x_1, \ldots, x_n).$$

On note Λ_n cet ensemble de polynômes, qui forme une algèbre, appelée *l'algèbre des polynômes symétriques* de n variables.

Exemple. Le polynôme $P(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ est un élément de Λ_n.

2.1.3 Bases élémentaires

Nous rappelons ici les bases élémentaires naturelles de Λ_n, et quelques propriétés les reliant, notamment concernant leurs fonctions génératrices.

Fonctions monomiales : Soit λ une partition de longueur inférieure ou égale à n (si $l < n$, on pose $\lambda_{l+1} = \cdots = \lambda_n = 0$). On note $S_n(\lambda)$

l'ensemble des permutations distinctes des n parts de λ et on définit

$$m_\lambda(X) = m_\lambda(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{\sigma \in S_n(\lambda)} x_1^{\sigma(\lambda_1)} \cdots x_n^{\sigma(\lambda_n)}.$$

$m_\lambda(X)$ est en fait la somme des monomes distincts de la forme X^λ.

Exemple. Pour $n = 3$ et $\lambda = (2, 1)$, on a

$$m_\lambda(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2.$$

Alors de manière évidente $(m_\lambda(X))_{l(\lambda) \leq n}$ est une $\mathbb{Z}$-base de Λ_n.
On peut préciser que pour $k \leq n$, la famille $(m_\lambda(X))_{|\lambda|=k}$ est une base du sous-anneau Λ_n^k de Λ_n, constitué des polynômes symétriques de n variables et homogènes de degré k. Comme il est souvent plus pratique de travailler avec un nombre infini de variables, on pose Λ^k comme étant la limite projective des Λ_n^k (voir [48, p. 18] pour les détails). On peut alors étendre la définition de Λ_n à un nombre infini de variables, en posant $\Lambda := \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k$ comme étant l'algèbre engendrée par les $(m_\lambda(X))$ sans restriction sur la longueur de λ et où X est un alphabet infini. Λ est *l'algèbre des fonctions symétriques*, et ses éléments ne sont plus des polynômes, mais des sommes infinies formelles de monomiales.
On travaillera dans ce qui suit avec un alphabet X infini, la restriction au cas fini des polynômes se faisant de manière évidente.

Fonctions symétriques élémentaires : Soit $r \in \mathbb{N}$.
On définit la *r-ième fonction symétrique élémentaire* par

$$e_0(X) = 1,$$

et pour $r \geq 1$

$$e_r(X) := \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r} x_{i_1} \cdots x_{i_r} = m_{(1^r)}(X).$$

La fonction génératrice des $e_r(X)$ est donnée par

$$E(t) := \sum_{r \geq 0} e_r(X) t^r = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i t), \tag{2.1}$$

ce qui se démontre en développant le membre de droite.
On pose pour toute partition $\lambda = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots, \lambda_l)$ de longueur l,

$$e_\lambda(X) := \prod_{i=1}^{l} e_{\lambda_i}(X).$$

Alors $(e_\lambda(X))_\lambda$ est une $\mathbb{Z}$-base de Λ.

Fonctions symétriques complètes : Soit $r \in \mathbb{N}$.
On définit la *r-ième fonction symétrique complète* par

$$h_0(X) = 1,$$

et pour $r \geq 1$

$$h_r(X) := \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_r} x_{i_1} \cdots x_{i_r} = \sum_{|\lambda|=r} m_\lambda(X).$$

La fonction génératrice des $h_r(X)$ est donnée par

$$H(t) := \sum_{r \geq 0} h_r(X) t^r = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x_i t}, \tag{2.2}$$

ce qui se démontre de même en développant le membre de droite.
On pose pour toute partition $\lambda = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots, \lambda_l)$ de longueur l,

$$h_\lambda(X) := \prod_{i=1}^{l} h_{\lambda_i}(X).$$

Alors $(h_\lambda(X))_\lambda$ est une $\mathbb{Z}$-base de Λ.

Fonctions puissances : Soit $r \in \mathbb{N}^*$.
On définit la *r-ième fonction puissance* par

$$p_r(X) := \sum_{i \geq 1} x_i^r = m_{(r)}(X).$$

La fonction génératrice des $p_r(X)$ est donnée par

$$P(t) := \sum_{r \geq 1} p_r(X) t^{r-1} = \frac{H'(t)}{H(t)} = \frac{E'(-t)}{E(-t)}. \tag{2.3}$$

Démonstration. On a par définition

$$\begin{aligned} P(t) &:= \sum_{r\geq 1} p_r(X)t^{r-1} = \sum_{i\geq 1}\sum_{r\geq 1} x_i^r t^{r-1} \\ &= \sum_{i\geq 1} \frac{x_i}{1-x_i t} = \sum_{i\geq 1} \left(\ln \frac{1}{1-x_i t}\right)' \\ &= \left(\ln \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-x_i t}\right)' = \frac{H'(t)}{H(t)}, \end{aligned}$$

puis on déduit la deuxième égalité de (2.1) et (2.2). □

On pose pour toute partition $\lambda = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots, \lambda_l)$ de longueur l,

$$p_\lambda(X) := \prod_{i=1}^{l} p_{\lambda_i}(X).$$

Alors $(p_\lambda(X))_\lambda$ est une $\mathbb{Q}$-base de Λ, mais pas une $\mathbb{Z}$-base.
Etant en présence de plusieurs bases d'une même algèbre, on s'intéresse au développement des n-ièmes fonctions symétriques élémentaires et complètes dans cette dernière base.

Proposition 2.1 *Soit pour λ partition*

$$z_\lambda := \prod_{i\geq 1} i^{m_i} m_i! \tag{2.4}$$

On a alors pour tout $n \geq 1$:

$$h_n(X) = \sum_{\lambda\vdash n} \frac{p_\lambda(X)}{z_\lambda}, \tag{2.5}$$

$$e_n(X) = \sum_{\lambda\vdash n} (-1)^{|\lambda|-l(\lambda)} \frac{p_\lambda(X)}{z_\lambda}. \tag{2.6}$$

Démonstration. Pour prouver (2.5) et (2.6), on utilise (2.3) :

$$\begin{aligned} H(t) &= \exp\left(\sum_{r\geq 1} p_r(X)\frac{t^r}{r}\right) = \prod_{r\geq 1} \exp\left(p_r(X)\frac{t^r}{r}\right) \\ &= \prod_{r\geq 1}\sum_{m_r\geq 0} \frac{(p_r(X)t^r)^{m_r}}{r^{m_r} m_r!} = \sum_{\lambda} \frac{p_\lambda(X)}{z_\lambda} t^{|\lambda|}, \end{aligned}$$

car pour $\lambda = (1^{m_1}2^{m_2}\ldots)$, on a $|\lambda| = \sum_{r\geq 1} rm_r$. Ceci démontre (2.5) et le calcul est identique concernant (2.6). $\square$

Les développements inverses sont donnés par les formules de Waring [50].
Proposition 2.2 (Waring) *Pour tout $n \geq 1$,*

$$\begin{aligned} p_n(X) &= \sum_{\lambda\vdash n}(-1)^{n-l(\lambda)}\frac{n(l(\lambda)-1)!}{\prod_i m_i(\lambda)!}e_\lambda(X), && (2.7)\\ p_n(X) &= \sum_{\lambda\vdash n}(-1)^{l(\lambda)-1}\frac{n(l(\lambda)-1)!}{\prod_i m_i(\lambda)!}h_\lambda(X). && (2.8)\end{aligned}$$

Fonctions de Schur : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on revient à un alphabet fini $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Pour toute partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0)$ de longueur $\leq n$, la *fonction de Schur* $s_\lambda(X)$ est usuellement définie comme suit :

$$\begin{aligned} s_\lambda(X) &:= \sum_{w\in S_n} w\left(x_1^{\lambda_1}\cdots x_n^{\lambda_n}\prod_{i<j}\frac{x_i}{x_i-x_j}\right)\\ &= \det\left(x_i^{\lambda_j+n-j}\right)_{1\leq i,j\leq n} / \det\left(x_i^{n-j}\right)_{1\leq i,j\leq n}.\end{aligned}$$

On montre assez facilement que $s_\lambda(X) \in \Lambda_n$ et que $(s_\lambda(X))_{l(\lambda)\leq n}$ est une $\mathbb{Z}$-base de Λ_n (voir par exemple [48, pp. 40-41]). On peut étendre de manière formelle cette définition à un alphabet infini, pour obtenir cette fois une $\mathbb{Z}$-base $(s_\lambda(X))_\lambda$ de Λ, où X est infini. Ainsi les fonctions de Schur se développent dans les bases de Λ vues précédemment :
Proposition 2.3 (Jacobi-Trudi)

$$\begin{aligned} s_\lambda(X) &= \det(h_{\lambda_i-i+j}(X))_{1\leq i,j\leq n}, && (2.9)\\ s_\lambda(X) &= \det(e_{\lambda'_i-i+j}(X))_{1\leq i,j\leq m}, && (2.10)\end{aligned}$$

où $l(\lambda) \leq n$ et $l(\lambda') \leq m$.
Remarque. On déduit de cette proposition que $s_{(n)} = h_n$ et $s_{(1^n)} = e_n$.

La principale conséquence de cette proposition est donnée par l'interprétation combinatoire des fonctions de Schur en termes de *tableaux de Young*.

Définition 2.4 *Soit λ une partition. Un tableau de Young (ou tableau semi-standard) T de forme λ est constitué du diagramme de Ferrers de λ que l'on a rempli à l'aide d'entiers strictement positifs de façon croissante sur les lignes et strictement croissante sur les colonnes.*
Le poids de T est défini par $\omega(T) := (m_1(T), m_2(T), \ldots)$, où $m_i(T)$ est la multiplicité de i dans T.
Exemple. Pour $\lambda = (10, 9, 8, 6, 1)$, on a par exemple le tableau T suivant de forme λ et de poids $\omega(T) = (5, 8, 7, 6, 8)$:

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline 1&1&1&1&1&2&2&2&3&5\\
\hline 2&2&2&2&2&3&3&4&5 \\
\cline{1-9} 3&3&3&3&4&4&4&5 \\
\cline{1-8} 4&4&5&5&5&5 \\
\cline{1-6} 5 \\
\cline{1-1}
\end{array}$$

On a alors l'interprétation suivante [48, pp. 41-42] :
Théorème 2.5 *Soient $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un alphabet fini et λ une partition de longueur $\leq n$. Alors*

$$s_\lambda(X) = \sum_{\lambda(T)=\lambda} X^{\omega(T)} = \sum_{\lambda(T)=\lambda} x_1^{m_1(T)} \cdots x_n^{m_n(T)}, \tag{2.11}$$

où la somme porte sur tous les tableaux de Young de forme λ et remplis d'entiers pris dans $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Exemple. Pour $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $\lambda = (2, 1)$, on obtient par cette interprétation les tableaux de Young suivants :

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$$

et donc

$$s_\lambda(X) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1 x_2 x_3 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2.$$

La démonstration de ce théorème peut se faire en utilisant (2.9), et pour montrer que $\sum_{\lambda(T)=\lambda} X^{\omega(T)} = \det(h_{\lambda_i - i + j}(X))_{1 \leq i,j \leq n}$, on utilise la méthode des chemins non-intersectants, due à Gessel et Viennot [25].

2.1.4 Bases avec paramètres

Polynômes de Hall-Littlewood : Soit λ est une partition et X un alphabet fini ou infini ayant plus d'éléments que $l(\lambda)$. Les *polynômes de Hall-Littlewood* $P_\lambda(X,q)$ sont définis par [48, p.208] :

$$P_\lambda(X,q) := \prod_{i\geq 1} \frac{(1-q)^{m_i}}{(1-q)\cdots(1-q^{m_i-1})} \sum_{w\in S_n} w\left(x_1^{\lambda_1}\cdots x_n^{\lambda_n}\prod_{i<j}\frac{x_i-qx_j}{x_i-x_j}\right),$$

où le facteur est ajouté pour assurer que le terme en $x_1^{\lambda_1}\cdots x_n^{\lambda_n}$ dans $P_\lambda(X,q)$ soit égal à 1.
On montre alors que les $P_\lambda(X,q)$ sont symétriques, et qu'ils forment une $\mathbb{Z}[q]$-base de $\Lambda[q]$ [48, Chapitre III].
Remarque. On a les cas particuliers suivants :

1. Pour $q=0$, $P_\lambda(X,0)=s_\lambda(X)$.
2. Pour $q=1$, $P_\lambda(X,1)=m_\lambda(X)$.
3. Pour $\lambda=(1^r)$, $P_{(1^r)}(X,q)=e_r(X)$.

On peut définir sur $\Lambda[q]$ un produit scalaire à l'aide des fonctions puissances :

$$< p_\lambda, p_\mu >_q := z_\lambda \left(\prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1}{1-q^{\lambda_i}}\right)\delta_{\lambda\mu},$$

où $\delta_{\lambda\mu}$ est le symbole de Kronecker, valant 1 si $\lambda=\mu$ et 0 sinon.
Alors les polynômes de Hall-Littlewood sont caractérisés par le fait qu'ils forment une base orthogonale de $(\Lambda[q];<,>_q)$ et qu'on a :

$$P_\lambda(X,q) = \sum_{\mu\leq\lambda} u_{\lambda\mu}(q)m_\mu(X),$$

où $\mu\leq\lambda$ signifie que $\mu_1+\cdots+\mu_i\leq\lambda_1+\cdots+\lambda_i\ \forall i$,
et $u_{\lambda\mu}(q)\in\mathbb{Z}[q]$ avec $u_{\lambda\lambda}(q)=1$.
C'est cette dernière caractérisation des polynômes de Hall-Littlewood qui inspire la construction des polynômes symétriques à deux paramètres suivants.

Polynômes de Macdonald : On peut définir de même sur $\Lambda[q,t]$ un produit scalaire à l'aide des fonctions puissances :

$$< p_\lambda, p_\mu >_{q,t} := z_\lambda \left(\prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1-t^{\lambda_i}}{1-q^{\lambda_i}} \right) \delta_{\lambda\mu}.$$

Alors on démontre [48, Chapitre VI] qu'il existe une unique base orthogonale $(P_\lambda(X,q,t))_\lambda$ de $(\Lambda[q,t]; <,>_{q,t})$ vérifiant :

$$P_\lambda(X,q,t) = \sum_{\mu \leq \lambda} u_{\lambda\mu}(q,t) m_\mu(X),$$

où $u_{\lambda\mu}(q,t) \in \mathbb{Z}[q,t]$ avec $u_{\lambda\lambda}(q,t) = 1$. Ces polynômes $P_\lambda(X,q,t)$ sont les *polynômes de Macdonald*, et on ne leur connait pas d'expression littérale.

Remarque. On a les cas particuliers suivants :

1. Pour $t = 0$, on retrouve les polynômes de Hall-Littlewood précédents.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $t = q^\alpha$ et $q \to 1$, on retrouve les polynômes de Jack [48, p. 376].

2.2 Généralisation de formules de type Waring

2.2.1 Introduction

L'un des problèmes fondamentaux dans l'étude de fonctions symétriques est le développement d'une fonction symétrique sur certaines bases linéaires de l'algèbre des fonctions symétriques. Les résultats classiques (2.7) et (2.8) de Waring explicitent le développement des n-ièmes fonctions symétriques puissances p_n dans les bases $(e_\lambda)_\lambda$ et $(h_\lambda)_\lambda$.

Dans ce paragraphe (voir [34]), nous généralisons les formules de Waring en développant les n-ièmes fonctions symétriques puissances p_n évaluées sur l'alphabet $Y = \{x_1/(1-tx_1),\ x_2/(1-tx_2), \ldots\}$ dans les bases linéaires des fonctions symétriques élémentaires e_λ et complètes h_λ évaluées sur l'alphabet $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. De même nous considérons le problème inverse, c'est-à-dire le développement des n-ièmes fonctions symétriques h_n et e_n évaluées sur l'alphabet Y dans la base des fonctions puissances p_μ évaluées sur l'alphabet X. Dans ce dernier cas nous aurons besoin d'un coefficient binomial généralisé introduit par Lassalle [44]. Nous en déduisons ensuite, comme applications, des développements intéressants, qui conduisent en particulier à de nouvelles preuves des ex-conjectures de Lassalle [44, 45]. D'autres preuves de ces conjectures ont été tout récemment données par Lascoux et Lassalle [42] dans le cadre des λ-anneaux. Notre approche repose essentiellement sur l'opérateur différentiel de l'algèbre des séries formelles. Il est remarquable que l'étude d'un problème si élémentaire puisse conduire à une preuve très simple des identités de Lascoux et Lassalle.

Nous terminons cette introduction par un rappel des formules qui seront utilisées dans la suite. Observons d'abord que

$$\sum_{n\geq 1}\binom{n-1}{k-1}a_n t^{n-1} = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dt}\left(\sum_{n\geq 1}a_n t^{n-1}\right). \qquad (2.12)$$

Comme les fonctions puissances satisfont

$$\sum_{n\geq 1}p_n(X)t^{n-1} = \sum_{r\geq 1}x_r/(1-x_r t),$$

et pour tout $k\geq 1$

$$\frac{d^{k-1}}{dt}\left(\frac{1}{1-xt}\right) = (k-1)!\frac{x^{k-1}}{(1-xt)^k},$$

nous en déduisons donc

$$\frac{d^{k-1}}{dt}\left(\sum_{n\geq 1}p_n(X)t^{n-1}\right) = \frac{(k-1)!}{t^k}p_k\left(\frac{tx_1}{1-tx_1},\frac{tx_2}{1-tx_2},\dots\right). \qquad (2.13)$$

Pour toute partition μ et pour tout entier n positif on définit le coefficient binomial généralisé $\left\langle{\mu \atop n}\right\rangle$ comme étant le nombre de façons de choisir n éléments dans le diagramme de Ferrers de μ, dont au moins un par ligne.

2.2.2 Résultats principaux

Soient $X=\{x_1,x_2,\dots\}$ un ensemble fini ou infini d'indéterminées et $\dfrac{X}{1-tX}$ l'alphabet $\left\{\dfrac{x_1}{1-tx_1},\dfrac{x_2}{1-tx_2},\dots\right\}$.

Théorème 2.6 *Pour tout $k \geq 1$ on a*

$$p_k\left(\frac{X}{1-tX}\right) = \sum_{|\mu|\geq k} t^{|\mu|-k}\binom{|\mu|}{k}(-1)^{|\mu|-l(\mu)}\frac{k\,(l(\mu)-1)!}{\prod_i m_i(\mu)!}e_\mu(X), \quad (2.14)$$

$$p_k\left(\frac{X}{1-tX}\right) = \sum_{|\mu|\geq k} t^{|\mu|-k}\binom{|\mu|}{k}(-1)^{l(\mu)-1}\frac{k\,(l(\mu)-1)!}{\prod_i m_i(\mu)!}h_\mu(X). \quad (2.15)$$

Démonstration. Les formules (2.12) et (2.13) impliquent directement

$$p_k\left(\frac{X}{1-tX}\right) = \sum_{j\geq k} t^{j-k}\binom{j-1}{k-1}p_j(X).$$

Nous déduisons donc (2.14) et (2.15) respectivement de (2.7) et (2.8). □

Par la même méthode nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 2.7 *Pour tout entier $k \geq 1$ on a*

$$h_k\left(\frac{X}{1-tX}\right) = \sum_{|\mu|\geq k} t^{|\mu|-k}\frac{\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle}{z_\mu}p_\mu(X), \quad (2.16)$$

$$e_k\left(\frac{X}{1-tX}\right) = \sum_{|\mu|\geq k} t^{|\mu|-k}(-1)^{k-l(\mu)}\frac{\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle}{z_\mu}p_\mu(X). \quad (2.17)$$

Démonstration. Notons d'abord que

$$\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l=k \\ k_1,\ldots,k_l\geq 1}} \prod_{i=1}^{l}\binom{\mu_i}{k_i},$$

où $l = l(\mu)$. Comme chaque partition μ de j correspond à $l(\mu)!/\prod_{i\geq 1} m_i(\mu)!$ compositions $(k_1,\ldots,k_l)$ de j telles que $(k_1,\ldots,k_l)$ soit une permutation des parts de μ, nous avons pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}$, en tenant compte de (2.12) et (2.13),

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\geq k} t^{j-k} \sum_{\mu\vdash j} \frac{\epsilon^{k-l(\mu)}}{z_\mu} \left\langle \mu \atop k \right\rangle p_\mu(X) \\
&= \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l=k \\ l\geq 1}} \frac{\epsilon^{k-l} t^{-k}}{l! k_1 \cdots k_l} \prod_{r=1}^{l} \sum_{\mu_r\geq 1} \binom{\mu_r - 1}{k_r - 1} p_{\mu_r}(X) t^{\mu_r} \\
&= \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l=k \\ l\geq 1}} \frac{\epsilon^{k-l}}{l! k_1! \cdots k_l!} \prod_{r=1}^{l} \frac{d^{k_r-1}}{dt} \left(\sum_{n\geq 1} p_n(X) t^{n-1} \right) \\
&= \sum_{\mu\vdash k} \frac{\epsilon^{k-l(\mu)}}{z_\mu} p_\mu \left(\frac{x_1}{1-tx_1}, \frac{x_2}{1-tx_2}, \ldots \right).
\end{aligned}$$

En posant $\epsilon = 1$ (resp. -1), nous en déduisons (2.16) (resp. (2.17)) en appliquant (2.5) (resp. (2.6)). □

Remarque. 1) Lorsque $t = 0$ nous retrouvons les formules classiques de type Waring.
2) Dans les théorèmes 2.6 et 2.7, t n'est qu'un paramètre d'homogénéité, mais vu le rôle important qu'il joue dans notre démonstration, nous préférons garder cette forme.

Nous nous intéressons maintenant aux fonctions génératrices correspondant aux identités précédentes :

Théorème 2.8 *Soient z et $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ des indéterminées indépendantes. Alors la série formelle*

$$F(t,u) := (1+u)^z \prod_{r\geq 1} \left(1 + \frac{u}{1+u} \frac{tx_r}{1-tx_r} \right)$$

admet les trois développements suivants

$$F(t,u) = \sum_{i,j\geq 0} u^i t^j \sum_{\mu\vdash j,\, l(\mu)\leq i} \binom{z-l(\mu)}{i-l(\mu)} m_\mu(X), \tag{2.18}$$

$$F(t,u) = \sum_{i,j\geq 0} u^i t^j \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{z-j}{i-k} \sum_{\mu\vdash j} \frac{\left\langle \mu \atop k \right\rangle}{z_\mu} p_\mu(X), \tag{2.19}$$

$$F(t,u) = \sum_{i,j\geq 0} u^i t^j \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{z-k}{i-k} \sum_{\mu\vdash j} (-1)^{k-l(\mu)} \frac{\left\langle \mu \atop k \right\rangle}{z_\mu} p_\mu(X). \tag{2.20}$$

Démonstration. Tout d'abord, par définition nous avons

$$\begin{aligned} F(t,u) &= \sum_{k\geq 0} u^k(1+u)^{z-k} \sum_{\substack{1\leq r_1<r_2<\cdots<r_k \\ m_1,\ldots,m_k\geq 1}} (tx_{r_1})^{m_1}\cdots(tx_{r_k})^{m_k} \\ &= \sum_{i,j\geq 0} u^i t^j \sum_{k\geq 0} \binom{z-k}{i-k} \sum_{\mu\vdash j,\, l(\mu)\leq i} m_\mu(X), \end{aligned}$$

d'où (2.18). Ensuite, dans le membre de droite de (2.19) en remplaçant i par $i+k$, nous obtenons en appliquant la formule du binome $(1-x)^{-\alpha} = \sum_{n\geq 0} x^n (\alpha)_n/n!$:

$$\sum_{k\geq 0} u^k \sum_{j\geq 0} (1+u)^{z-j} t^j \sum_{\mu\vdash j} \frac{\langle{\mu \atop k}\rangle}{z_\mu} p_\mu(X),$$

qui s'écrit, en posant $s = t/(1+u)$ et en appliquant (2.16) et (2.2),

$$(1+u)^z \sum_{k\geq 0} u^k h_k\left(\frac{sx_1}{1-sx_1}, \frac{sx_2}{1-sx_2}, \ldots\right) = (1+u)^z \prod_{r\geq 1}\left(1-\frac{usx_r}{1-sx_r}\right)^{-1}.$$

Ceci est clairement égal à $F(t,u)$. Enfin nous déduisons (2.20) de façon analogue en appliquant (2.17) et (2.1). □

Corollaire 2.9 *Soient z et $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ des indéterminées indépendantes. Pour tous entiers $i, j \geq 1$ on a*

$$\begin{aligned} \sum_{\mu\vdash j,\, l(\mu)\leq i} \binom{z-l(\mu)}{i-l(\mu)} m_\mu(X) &= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{z-j}{i-k} \sum_{\mu\vdash j} \frac{\langle{\mu \atop k}\rangle}{z_\mu} p_\mu(X) \\ &= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{z-k}{i-k} \sum_{\mu\vdash j} (-1)^{k-l(\mu)} \frac{\langle{\mu \atop k}\rangle}{z_\mu} p_\mu(X). \end{aligned}$$

Comme $(p_\mu)_\mu$ forme une $\mathbb{Q}$-base linéaire de l'algèbre des fonctions symétriques, nous déduisons du corollaire 2.9 le résultat suivant.

Corollaire 2.10 *Soit z une variable. Pour des entiers $i, j \geq 1$ et toute partition $\mu \vdash j$ on a*

$$\sum_{k=0}^{min(i,j)} \binom{z-j}{i-k} \left\langle{\mu \atop k}\right\rangle = \sum_{k=0}^{min(i,j)} (-1)^{k-l(\mu)} \binom{z-k}{i-k} \left\langle{\mu \atop k}\right\rangle.$$

Enfin le corollaire 2.9 implique aussi le résultat suivant, dû à Lascoux-Lassalle [42, Lemme 2].

Corollaire 2.11 *Pour tous entiers $k, j \geq 1$ on a*

$$\sum_{\mu \vdash j,\, l(\mu)=k} m_\mu(X) = \sum_{\mu \vdash j} (-1)^{k-l(\mu)} \frac{\langle {\mu \atop k} \rangle}{z_\mu} p_\mu(X).$$

Remarque. On trouvera d'autres formules sur la somme $\sum_{\mu \vdash j,\, l(\mu)=k} m_\mu(X)$ dans Macdonald [48, p. 33 et 68].

2.2.3 Applications

Identifions chaque partition λ avec son diagramme de Ferrers et posons

$$(x)_\lambda := \prod_{(i,j)\in\lambda} (x + j - 1 - (i-1)/\alpha)\,,$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ est la constante des polynômes de Jack.
Lorsque $\lambda = (n)$ est une partition-ligne nous retrouvons la définition habituelle de factorielle montante $(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$. Par un calcul direct et en posant $Z := \{j - 1 - (i-1)/\alpha \,|\, (i,j) \in \lambda\}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{(y-x)_\lambda}{(y)_\lambda} &= \prod_{z\in Z} \left(1 - \frac{x/y}{1 + z/y}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{|\lambda|} (-x/y)^i \sum_{z_1,\ldots,z_i \in Z} \frac{1}{1+z_1/y} \cdots \frac{1}{1+z_i/y} \\
&= \sum_{i=0}^{|\lambda|} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \frac{x^i}{y^{i+j}} \sum_{\mu \vdash j,\, l(\mu)\leq i} \binom{|\lambda| - l(\mu)}{i - l(\mu)} m_\mu(Z).
\end{aligned}$$

Nous déduisons donc du corollaire 2.9 une courte preuve d'un résultat de Lascoux et Lassalle [42, Théorème 4], qui fût conjecturé par Lassalle [44, Conjecture 2] :

Théorème 2.12 *Soient x, y deux indéterminées indépendantes. Pour toute partition λ soit $X = \{j - 1 - (i-1)/\alpha \,|\, (i,j) \in \lambda\}$, alors*

$$\frac{(y-x)_\lambda}{(y)_\lambda} = \sum_{i=0}^{|\lambda|} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^{i+j} \frac{x^i}{y^{i+j}} \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{|\lambda| - j}{i-k} \sum_{\mu \vdash j} \frac{\langle {\mu \atop k} \rangle}{z_\mu} p_\mu(X).$$

En fait Lascoux et Lassalle [42, Théorème 1] ont déduit le théorème 2.12 d'un résultat plus général, qui fût aussi conjecturé par Lassalle [45, Conjecture 2]. Nous en donnons aussi une nouvelle preuve.

Théorème 2.13 *Soient z, u et $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ des indéterminées indépendantes. Pour tous entiers n, $r \geq 1$ on a*

$$\sum_{\mu \vdash n} \frac{(-1)^{r-l(\mu)}}{z_\mu} \left\langle \begin{matrix} \mu \\ r \end{matrix} \right\rangle \prod_{i \geq 1} \left(z + \sum_{k \geq 1} u^k \frac{(i)_k}{k!} x_k \right)^{m_i(\mu)} =$$

$$\sum_{j \geq 0} u^j \binom{n+j-1}{n-r} \sum_{k=0}^{\min(r,j)} \binom{z-j}{r-k} \sum_{\mu \vdash j} \frac{\left\langle \begin{smallmatrix} \mu \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle}{z_\mu} \prod_{i \geq 1} x_i^{m_i(\mu)}.$$

Démonstration. Soit $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ une famille infinie d'indéterminées. Comme les fonctions puissances $p_i(Y)$ sont algébriquement indépendantes dans ce cas, nous pouvons supposer que $x_i = p_i(Y)$ pour $i \geq 1$. En multipliant le membre de gauche par $t^n q^r$ et sommant sur n, $r \geq 1$ nous pouvons écrire sa fonction génératrice comme suit :

$$F(tu, Tq) = (1 + Tq)^z \prod_{j \geq 1} \left(1 + \frac{Tq}{1 + Tq} \frac{Tuz_j}{1 - Tuz_j} \right), \tag{2.21}$$

où $T = t/(1-t)$ et $z_j = y_j/t$ pour $j \geq 1$. Afin de rendre la lecture autonome nous incluons ici une preuve classique de (2.21). Remarquons d'abord que pour toute partition μ

$$\sum_{r \geq 1} \left\langle \begin{matrix} \mu \\ r \end{matrix} \right\rangle q^r = \prod_{i \geq 1} \left((1+q)^i - 1 \right)^{m_i(\mu)},$$

et que la formule du binome $(1-x)^{-\alpha} = \sum_{n \geq 0} x^n (\alpha)_n / n!$ permet d'écrire

$$\sum_{n \geq 1} u^n \frac{(i)_n}{n!} p_n(Y) = \sum_{j \geq 1} \sum_{n \geq 1} u^n \frac{(i)_n}{n!} y_j^n = \sum_{j \geq 1} ((1 - y_j u)^{-i} - 1).$$

En multipliant le membre de gauche par $t^n q^r$ et sommant sur n, $r \geq 1$ nous obtenons sa fonction génératrice

$$\sum_{\mu} \frac{t^{|\mu|}}{z_\mu} \prod_{i \geq 1} \left[(1 - (1-q)^i) \left(z + \sum_{j \geq 1} u^j \frac{(i)_j}{j!} p_j(Y) \right) \right]^{m_i(\mu)}$$

$$= \prod_{i \geq 1} \sum_{m_i \geq 0} \frac{t^{i\, m_i}}{m_i!\, i^{m_i}} \left[(1 - (1-q)^i)(z + \sum_{j \geq 1} ((1 - y_j u)^{-i} - 1)) \right]^{m_i}.$$

Mais le dernier terme peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&\prod_{i\geq 1} \exp\left\{ \left(\frac{t^i}{i} - \frac{t^i}{i}(1-q)^i \right) \left(z + \sum_{j\geq 1} ((1-y_j u)^{-i} - 1) \right) \right\} \\
= & \left(1+\frac{tq}{1-t}\right)^z \prod_{j\geq 1} \exp \sum_{i\geq 1} \left(\frac{t^i}{i} - \frac{t^i}{i}(1-q)^i \right) \left(\frac{1}{(1-y_j u)^i} - 1 \right) \\
= & \left(1+\frac{tq}{1-t}\right)^z \prod_{j\geq 1} \left(1+\frac{tq}{1-t-y_j u}\right) \left(1+\frac{tq}{1-t}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Par l'application du théorème 2.8, nous déduisons de (2.21) que

$$\begin{aligned}
F(tu, Tq) &= \sum_{r,j,k\geq 0} T^{r+j} q^r u^j \binom{z-j}{r-k} \sum_{\mu \vdash j} \frac{\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle}{z_\mu} p_\mu(Z) \\
&= \sum_{r,j,k\geq 0} \frac{t^r q^r u^j}{(1-t)^{r+j}} \binom{z-j}{r-k} \sum_{\mu \vdash j} \frac{\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle}{z_\mu} p_\mu(Y).
\end{aligned}$$

En écrivant

$$\frac{t^r}{(1-t)^{r+j}} = \sum_{n\geq r} \binom{n+j-1}{n-r} t^n,$$

nous remarquons que l'expression plus haut est aussi la fonction génératrice du membre de droite. □

On pourrait trouver des calculs similaires aux précédents dans [42] ou dans [44] en termes de λ-anneaux.

Chapitre 3

Sommes de fonctions de Schur

3.1 Introduction

3.1.1 Fonctions de Schur et partitions planes

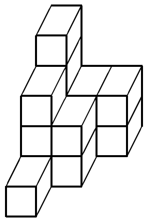
Une des motivations principales à la sommation des fonctions de Schur sur des ensembles de partitions est la détermination de fonctions génératrices de partitions planes [17, 18]. On peut aussi citer le travail de Stanley sur la théorie des partitions planes [59].

Définition 3.1 *Une partition plane PP est un réseau fini de points de* $\mathbb{R}^3$ *tels que*

$$((r,s,t) \in PP \text{ et } 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq s,\ 1 \leq k \leq t) \Rightarrow (i,j,k) \in PP.$$

La représentation graphique des partitions planes est donnée par un empilement de cubes, et le poids d'une partition plane PP est donné par le nombre de cubes, noté $|PP|$. Gordon a montré dans [28] comment utiliser les fonctions de Schur dans la théorie des partitions planes. En effet, dans le plan, on peut représenter une partition plane par un diagramme de Ferrers où chaque cellule est munie d'un entier représentant le nombre de cubes correspondants dans l'axe vertical, c'est-à-dire qu'on a un tableau constitué d'un diagramme de Ferrers rempli d'entiers de manière décroissante (mais pas nécessairement strictement) sur les lignes et les colonnes (ce n'est pas tout à fait un tableau de Young).

Exemple. Les dessins suivants représentent une partition plane PP de 14, et le tableau T correspondant :

$PP =$ 

$$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 2 & \\ \cline{1-2} 1 & & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Ainsi, le théorème 2.5 implique :

Proposition 3.2 *La fonction génératrice $F(q)$ des partitions planes est donnée par $F(q) := \sum_{PP} q^{|PP|} = \sum_{\lambda} s_\lambda(1, q, q^2, \ldots)$.*

En utilisant l'interprétation des fonctions de Schur par les tableaux de Young, on montre (voir par exemple [18]) que la fonction génératrice des partitions planes symétriques ($(r, s, t) \in PP \Rightarrow (s, r, t) \in PP$) incluses dans la boite $\mathcal{B}(n, n, m)$ est

$$G(q) = \sum_{\lambda \subseteq (m^n)} s_\lambda(q^{2n-1}, q^{2n-3}, \ldots, q).$$

Il est alors nécessaire d'évaluer ce type de sommes de fonctions de Schur. MacMahon [50] a conjecturé l'identité suivante, prouvée ensuite par Andrews [2] et indépendemment par Macdonald [48, p. 85] en utilisant les polynômes de Hall-Littlewood et les formules de Weyl, puis plus récemment par Bressoud [16] par récurrence :

$$G(q) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} \frac{1 - q^{1+2i+k-2}}{1 - q^{2i+k-2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \prod_{k=1}^{m} \frac{1 - q^{2+2(i+j+k-2)}}{1 - q^{2(i+j+k-2)}}. \qquad (3.1)$$

Nous nous intéressons donc dans ce chapitre à l'évaluation de certaines sommes de fonctions de Schur.

3.1.2 Identités d'Ishikawa et Wakayama

Soit $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un alphabet fini.

Pour toute partition λ notons $c_j := c_j(\lambda)$ le nombres de colonnes de longueur j dans λ, c'est-à-dire $c_j = \lambda_j - \lambda_{j+1}$ et définissons

$$f_\lambda(a, b) := \prod_{j \text{ impair}} \frac{a^{c_j+1} - b^{c_j+1}}{a - b} \prod_{j \text{ pair}} \frac{1 - (ab)^{c_j+1}}{1 - ab}.$$

Comme $f_\lambda(a,0) = a^{c(\lambda)}$, où $c(\lambda)$ est le nombre de colonnes de longueur impaire dans λ, nous pouvons écrire comme suit une identité classique de Littlewood [48] :

$$\sum_\lambda f_\lambda(a,0)s_\lambda(X) = \prod_i (1-ax_i)^{-1}\prod_{j<k}(1-x_jx_k)^{-1}. \tag{3.2}$$

Soit

$$\Phi(X;a,b) := \prod_i (1-ax_i)^{-1}(1-bx_i)^{-1}\prod_{j<k}(1-x_jx_k)^{-1}.$$

Dans un article récent [33], Ishikawa et Wakayama ont donné l'extension suivante de (3.2) :

$$\sum_\lambda f_\lambda(a,b)\, s_\lambda(X) = \Phi(X;a,b). \tag{3.3}$$

Comme l'a remarqué Bressoud dans [17], pour $(a,b) = (1,0)$, $(1,-1)$ et $(0,0)$, l'identité (3.3) se réduit respectivement aux trois identités intéressantes suivantes, déjà connues :

$$\begin{aligned}
\sum_\lambda s_\lambda(X) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{1-x_i}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{1}{1-x_ix_j}, && (3.4)\\
\sum_{\lambda\,\text{paire}} s_\lambda(X) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{1-x_i^2}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{1}{1-x_ix_j}, && (3.5)\\
\sum_{\lambda'\,\text{paire}} s_\lambda(X) &= \prod_{1\le i<j\le n}\frac{1}{1-x_ix_j}. && (3.6)
\end{aligned}$$

Dans ce chapite, nous donnons deux généralisations de la formule d'Ishikawa et Wakayama (3.3), travail qui a fait l'objet d'un article [35].

3.1.3 Formules de Pieri

Nous aurons besoin dans la suite des définitions et notations suivantes, ainsi que des formules classiques de Pieri.

Définition 3.3 *Soient λ et μ deux partitions. Si le diagramme de Ferrers de μ est inclus dans celui de λ on note $\mu \subseteq \lambda$ et le* diagamme tronqué λ/μ *est appelé* r bande horizontale *(ou r-b.h. pour simplifier) s'il y a au plus une*

cellule dans chaque colonne de λ/μ *et* $|\lambda/\mu| = r$.
De même, λ/μ *est appelé* r bande verticale *(ou r-b.v. pour simplifier) s'il y a au plus une cellule dans chaque ligne de* λ/μ *et* $|\lambda/\mu| = r$.

Proposition 3.4 (Formules de Pieri) *Soient* μ *une partition et* $r \in \mathbb{N}^*$. *Alors*

$$s_\mu(X)h_r(X) = \sum_{\substack{\lambda \\ \lambda/\mu\ r\text{-}b.h.}} s_\lambda(X), \tag{3.7}$$

$$s_\mu(X)e_r(X) = \sum_{\substack{\lambda \\ \lambda/\mu\ r\text{-}b.v.}} s_\lambda(X). \tag{3.8}$$

Démonstration. Il suffit de prouver (3.8), puis (3.7) se déduit à l'aide des relations entre e_r et h_r données par (2.1) et (2.2). Posons pour μ partition et $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $a_\mu(X) := \det(x_i^{\mu_j})_{1\le i,j\le n}$. Alors $s_\mu(X) = a_{\mu+\delta}(X)/a_\delta(X)$, où $\delta = (n-1, \ldots, 1, 0)$. De plus nous avons

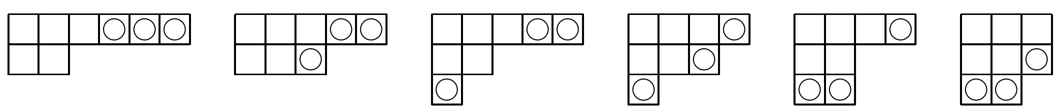
$$\begin{aligned} a_{\mu+\delta}(X)e_r(X) &= \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) X^{\sigma(\mu+\delta)} \sum_\alpha X^\alpha \\ &= \sum_\alpha a_{\mu+\delta+\alpha}(X), \end{aligned}$$

où les sommes sont sur les suites $\alpha \in \mathbb{N}^n$ telles que $\alpha_i = 0$ ou 1 et $\sum_i \alpha_i = r$. Or nous remarquons que $a_{\mu+\delta+\alpha} \neq 0 \Leftrightarrow \mu+\delta+\alpha$ n'a que des parts distinctes. Ainsi il ne reste que les suites α pour lesquelles $\lambda := \mu + \alpha$ est une partition, c'est-à-dire que nous devons avoir λ/μ r-b.v. $\square$

Exemple. Pour $\mu = (3, 2)$ et $r = 3$, (3.7) donne :

$$s_{(3,2)}h_3 = s_{(6,2)} + s_{(5,3)} + s_{(5,2,1)} + s_{(4,3,1)} + s_{(4,2,2)} + s_{(3,3,2)},$$

ces termes correspondants aux partitions λ suivantes :



où nous avons mis des cercles ($\circ$) dans les cases des bandes horizontales λ/μ.

3.2 Conjecture d'Ishikawa et Wakayama

3.2.1 Enoncé de la conjecture

Pour $r \geq 0$, soient

$$\begin{aligned}
P_r(a,b,c) &:= \sum_{k=0}^{r} \frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}\,\frac{1-(ab)^{r-k+1}}{1-ab}c^k,\\
Q_r(a,b,c) &:= \sum_{k=0}^{r} h_{r-k}(a,b,c)(abc)^k.
\end{aligned}$$

Pour toute suite d'entiers positifs $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r, \ldots)$, où $\xi_r \neq 0$ pour seulement un nombre fini d'entiers r, soit

$$F_\xi(a,b,c) := h_{\xi_1}(a,b,c) \prod_{k\geq 1} P_{\xi_{2k}}(a,b,c) Q_{\xi_{2k+1}}(a,b,c).$$

Pour tout entier $i \geq 1$, soit ε_i le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{Z}^\infty$ et introduisons l'opérateur δ_i : $\delta_i\xi := \xi - \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ pour $\xi \in \mathbb{N}^\infty$. Soit $\delta_i F_\xi(a,b,c) := F_{\delta_i\xi}(a,b,c)$, où $P_k = Q_k = 0$ si $k < 0$ par convention. Alors, à chaque partition λ de longueur $\leq n$ nous pouvons associer le polynôme

$$f_\lambda(a,b,c) := \sum_{k=0}^{n} (-abc)^k \sum_{i_1<\cdots<i_k} \delta_{i_1}\cdots\delta_{i_k} F_{\Gamma(\lambda)}(a,b,c),$$

où $\Gamma(\lambda) = (c_1, c_2, \ldots)$ est la suite des multiplicités des parts de λ, c'est-à-dire que c_j est le nombre de colonnes de longueur j dans λ.

Nous pouvons maintenant donner notre première généralisation de (3.3), qui donne en fait une réponse positive à une conjecture d'Ishikawa et Wakayama [33].

Théorème 3.5 *On a*

$$\sum_\lambda f_\lambda(a,b,c)s_\lambda(X) = \Phi(X;a,b)\prod_i (1-cx_i)^{-1}.$$

3.2.2 Démonstration du théorème 3.5

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des partitions de longueur $\leq n$. Etant donnée une partition $\lambda \in \mathcal{P}$, notons $H(\lambda)$ l'ensemble des partitions $\mu \in \mathcal{P}$ telles que λ/μ

soit une bande horizontale. Comme il est remarqué à la fin de [33], l'identité (3.3) peut-être déduite de la formule de Littlewood (3.2) et de la formule de Pieri (3.7).

De la même manière, nous allons déduire le théorème 3.5 de (3.3) et (3.7). Revoyons d'abord cette preuve de (3.3). D'après (3.2) et (3.7), l'identité (3.3) est équivalente à :

$$f_\lambda(a,b) = \sum_{\mu \in H(\lambda)} b^{|\lambda/\mu|} a^{c(\mu)}. \tag{3.9}$$

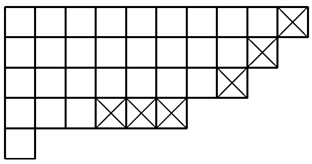
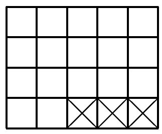
Soit $A_j(\lambda)$ le sous-diagramme de λ constitué des c_j colonnes de longueur j pour $j \geq 1$. Ainsi choisir une partition μ dans $H(\lambda)$ est équivalent à choisir pour μ les r colonnes les plus à gauche dans $A_j(\lambda)$ (resp. les $c_j - r$ restantes), de longueur j (resp. $j-1$), ceci $\forall j \geq 1$. Le poids correspondant est clairement

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{r=0}^{c_j} a^{c_j - r} b^r = \frac{a^{c_j+1} - b^{c_j+1}}{a-b} & \text{si } j \text{ est impair,} \\ \displaystyle\sum_{r=0}^{c_j} (ab)^r = \frac{1-(ab)^{c_j+1}}{1-ab} & \text{si } j \text{ est pair.} \end{cases}$$

En multipliant les poids sur tous les $j \geq 1$, nous obtenons (3.9).

Chaque paire (λ, μ) avec $\mu \in H(\lambda)$ peut être représentée en mettant une croix ($\times$) dans chaque cellule de λ/μ.

Exemple. Pour $\lambda = (10, 9, 8, 6, 1)$ et $\mu = (9, 8, 7, 3, 1) \in H(\lambda)$, nous représentons comme suit leurs diagrammes de Ferrers et le bloc $A_4(\lambda)$:

$\lambda =$  $A_4(\lambda) =$ 

De même, par (3.3) et (3.7), nous voyons que le théorème 3.5 est équivalent à :

$$f_\lambda(a,b,c) = \sum_{(\mu,\nu) \in C(\lambda)} a^{c(\nu)} b^{|\mu/\nu|} c^{|\lambda/\mu|}, \tag{3.10}$$

où $C(\lambda) := \{(\mu, \nu) \mid \mu \in H(\lambda), \nu \in H(\mu)\}$.

Nous allons obtenir le membre de droite de (3.10) en utilisant le principe d'inclusion-exclusion. Pour cela, nous allons d'abord énumérer une famille plus grande d'objets dont la fonction génératrice est $F_{\Gamma(\lambda)}(a,b,c)$.

Rappelons que toute partition λ est identifiée à son diagramme de Ferrers. Nous dirons qu'un sous-ensemble S de $\mathbb{N}^2$ est un *diagramme de partition* si $\{(x-k,y)|(x,y) \in S\}$ est un diagramme de Ferrers pour un entier $k \geq 0$. Soit $H'(\lambda)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles μ de λ tels que $\mu \cap A_j(\lambda)$ soit un diagramme de partition $\forall j \geq 1$ et λ/μ soit une bande horizontale. Définissons

$$B(\lambda) := \{(\mu,\nu) \,|\, \mu \in H(\lambda), \nu \in H'(\mu)\}.$$

Remarquons que dans cette définition, le sous-diagramme ν de λ n'est pas nécessairement un diagramme de partition. Finalement, l'ensemble $C(\lambda)$ peut être décrit de la façon suivante :

$$C(\lambda) = \{(\mu,\nu) \in B(\lambda) \,|\, \nu \in H(\mu)\}.$$

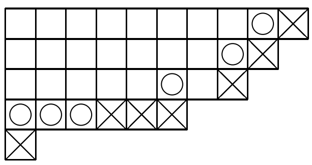
Etant donnée $\nu \in H'(\mu)$, la ligne j de ν sera dite *compatible* si

$$\forall x \geq 1, \quad (x+1;j) \in \nu \Longrightarrow (x;j) \in \nu.$$

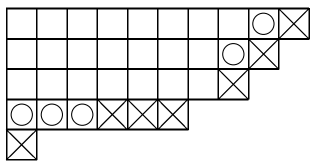
Pour $p \geq 0$ soit $B_p(\lambda)$ l'ensemble des $(\mu,\nu) \in B(\lambda)$ tels que ν a au moins p lignes non compatibles. Clairement $B_0(\lambda) = B(\lambda)$ et $B(\lambda) \setminus C(\lambda) = B_1(\lambda)$, c'est-à-dire qu'une paire $(\mu,\nu) \in B(\lambda)$ est dans $C(\lambda)$ si et seulement si toutes les lignes de ν sont compatibles. Par le principe d'inclusion-exclusion nous obtenons

$$\sum_{(\mu,\nu)\in C(\lambda)} a^{c(\nu)} b^{|\mu/\nu|} c^{|\lambda/\mu|} = \sum_{p=0}^{l(\lambda)} (-1)^p \sum_{(\mu,\nu)\in B_p(\lambda)} a^{c(\nu)} b^{|\mu/\nu|} c^{|\lambda/\mu|}. \tag{3.11}$$

Chaque triplet (λ,μ,ν) avec $(\mu,\nu) \in B(\lambda)$ peut être visualisé en mettant un cercle $\circ$ (resp. une croix $\times$) dans chaque cellule de μ/ν (resp. λ/μ).
Exemple. Les diagrammes suivants représentent deux triplets (λ,μ,ν) :



(a)



(b)

Clairement $\lambda = (10,9,8,6,1)$ et $\mu = (9,8,7,3)$ dans les deux cas. Pour (a), la paire (μ,ν) est dans $B_1(\lambda)$ car la troisième ligne de ν n'est pas compatible, donc $\nu \in H'(\mu) \setminus H(\mu)$ et ν n'est pas une partition. Pour (b), la paire (μ,ν) est dans $C(\lambda)$ car toutes les lignes de ν sont compatibles, donc $\nu = (8,7,7)$ est une partition de $H(\mu)$.

Lemme 3.6 *On a*

$$\sum_{(\mu,\nu)\in B(\lambda)} a^{c(\nu)} b^{|\mu/\nu|} c^{|\lambda/\mu|} = F_{\Gamma(\lambda)}(a,b,c).$$

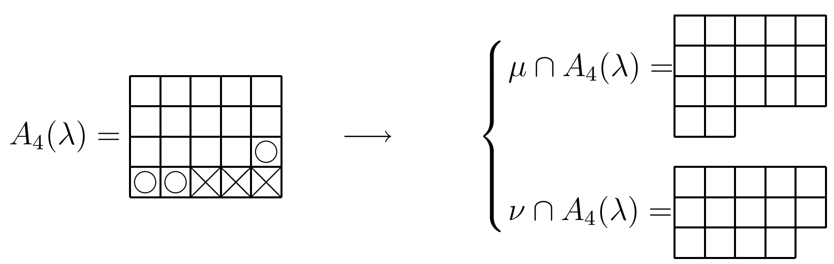
Démonstration. Comme dans la démonstration de (3.9), nous divisons le diagramme de λ en blocs rectangulaires $A_j(\lambda)$, $j \geq 1$, et nous déterminons le poids correspondant à chaque bloc $A_j(\lambda)$. Choisir une paire (μ,ν) dans $B(\lambda)$ est équivalent, pour tout $j \geq 1$, à, d'abord choisir pour μ dans $A_j(\lambda)$ les p colonnes les plus à gauche (resp. les $q = c_j - p$ restantes), de longueur j (resp. $j-1$), et ensuite choisir pour ν les s (resp. $p-s$) colonnes les plus à gauche, de longueur j (resp. $j-1$), parmi les p colonnes de μ de longueur j, et enfin choisir, toujours pour ν, les r colonnes les plus à gauche (resp. les $q-r$ restantes), de longueur $j-1$ (resp. $j-2$) parmi les q colonnes de λ/μ de longueur $j-1$. Alors le poids correspondant est $h_{c_1}(a,b,c)$ si $j=1$ et, pour $j \geq 2$,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{p+q=c_j} c^q \left(\sum_{s=0}^{p}(ab)^s\right)\left(\sum_{r=0}^{q} a^r b^{q-r}\right) = P_{c_j}(a,b,c) & \text{si } j \text{ pair;} \\[2ex] \displaystyle\sum_{p+q=c_j} c^q \left(\sum_{s=0}^{p} b^s\right)\left(\sum_{r=0}^{q}(ab)^r\right) = Q_{c_j}(a,b,c) & \text{si } j \text{ impair.} \end{cases}$$

En multipliant sur tous les $j \geq 1$ nous obtenons la formule souhaitée. □

Lascoux a obtenu une expression équivalente au lemme 3.6 en termes de λ-anneaux dans [40].

Exemple. Considerons le cas (a) de l'exemple précédent. Les sous-diagrammes correspondants au bloc $A_4(\lambda)$ sont :



Remarquons que $c_j = 5$, $p = 2$, $s = 0$ et $r = 2$.

Pour tout ensemble d'entiers $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_p\}$ $(p \geq 1)$, soit $B_J(\lambda)$ l'ensemble de toutes les paires $(\mu, \nu) \in B(\lambda)$ telles que la ligne j de ν ne soit pas compatible pour $j \in J$. Ainsi $B_J(\lambda) \subset B_p(\lambda)$.

Lemme 3.7 *On a*

$$\sum_{(\mu,\nu)\in B_J(\lambda)} a^{c(\nu)} b^{|\mu/\nu|} c^{|\lambda/\mu|} = (abc)^p \delta_{j_1} \cdots \delta_{j_p} F_{\Gamma(\lambda)}(a, b, c).$$

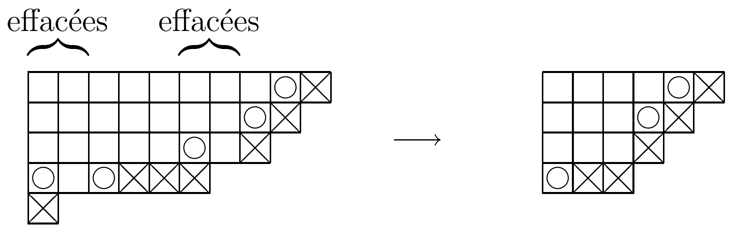
Démonstration. Rappellons que $\lambda' = (1^{c_1} 2^{c_2} \ldots)$. Supposons qu'il existe une paire (μ, ν) dans $B_J(\lambda)$, alors il existe un entier $x_j \in \mathbb{N}$ tel que $(x_j + 1, j) \in \nu$ et $(x_j, j) \in \mu/\nu$ pour tout $j \in J$. Par la définition de $B_J(\lambda)$ nous devons avoir $x_j = c_{l(\lambda)} + \cdots + c_{j+1}$ et $(x_j, j+1) \in \lambda/\mu$, car λ/μ est une bande horizontale. Nous déduisons que $c_j \geq 1$ et $c_{j+1} \geq 1$. De plus, si $j+1$ est aussi dans J, nous devons avoir $c_{j+1} \geq 2$. En résumé, nous avons les équivalences suivantes :

$$B_J(\lambda) \neq \emptyset \iff c_j c_{j+1} \neq 0 \ \forall j \in J \text{ et } \ c_{j+1} \geq 2 \text{ si } (j, j+1) \in J^2.$$

Nous voyons facilement que cette dernière condition est équivalente à $\delta_{j_1} \cdots \delta_{j_p} \Gamma(\lambda) \in \mathbb{N}^\infty$ ou $\delta_{j_1} \cdots \delta_{j_p} F_{\Gamma(\lambda)}(a, b, c) \neq 0$.

Dans ce qui suit, nous alons supposer que $B_J(\lambda) \neq \emptyset$. Ainsi nous pouvons définir une unique partition $\delta_J(\lambda)$ telle que $\Gamma(\delta_J(\lambda)) = \delta_{j_1} \cdots \delta_{j_p} \Gamma(\lambda)$. Graphiquement, le diagramme $\delta_J(\lambda)$ peut être obtenu en effaçant successivement pour $j \in J$, les colonnes x_j et $(x_j + 1)$ et en décalant à gauche de deux unités toutes les cellules situées à la doite de la colonne x_j de λ. Pour $(\mu, \nu) \in B_J(\lambda)$, si nous appliquons la même opération graphique à μ et ν, nous obtenons une paire $(\delta_J(\mu), \delta_J(\nu)) \in B(\delta_J(\lambda))$.

Exemple. Dans l'exemple précédent, si $J = \{3, 4\}$, alors $\delta_J(\lambda) = (6, 5, 4, 3)$. Les triplets correspondants (λ, μ, ν) avec $(\mu, \nu) \in B(\lambda)$ et $(\delta_J(\lambda), \delta_J(\mu), \delta_J(\nu))$ avec $(\delta_J(\mu), \delta_J(\nu)) \in B(\delta_J(\lambda))$ sont représentés comme suit :



Comme le poids correspondant aux colonnes effacées x_j et x_{j+1} de λ, μ et ν est abc pour tout $j \in J$, nous avons

$$a^{c(\nu)} b^{|\mu/\nu|} c^{|\lambda/\mu|} = (abc)^p a^{c(\delta_J(\nu))} b^{|\delta_J(\mu)/\delta_J(\nu)|} c^{|\delta_J(\lambda)/\delta_J(\mu)|}.$$

D'où

$$\sum_{(\lambda,\nu)\in B_J(\lambda)} a^{c(\nu)} b^{|\mu/\nu|} c^{|\lambda/\mu|} = (abc)^p \sum_{(\lambda,\nu)\in B(\delta_J(\lambda))} a^{c(\nu)} b^{|\mu/\nu|} c^{|\lambda/\mu|}.$$

Le lemme se déduit ensuite immédiatement du lemme 3.6. □

Nous déduisons du lemme 3.7 que pour $p \geq 1$

$$\sum_{(\mu,\nu)\in B_p(\lambda)} a^{c(\nu)} b^{|\mu/\nu|} c^{|\lambda/\mu|} = (abc)^p \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_p\leq l(\lambda)} \delta_{j_1}\cdots\delta_{j_p} F_{\Gamma(\lambda)}(a,b,c).$$

En combinant ceci avec (3.11) et le lemme 3.6 nous obtenons le théorème 3.5.

Remarque. De manière similaire, en utilisant une autre identité de Littlewood [48] :

$$\sum_\lambda a^{r(\lambda)} s_\lambda(X) = \prod_i \frac{1+ax_i}{1-x_i^2} \prod_{j<k} (1-x_jx_k)^{-1}, \tag{3.12}$$

où $r(\lambda)$ est le nombre de lignes de λ de longueurs impaires, nous obtenons :

$$\sum_\lambda f_{\lambda'}(a,b)\, s_\lambda(X) = \prod_i \frac{(1+ax_i)(1+bx_i)}{1-x_i^2} \prod_{j<k} (1-x_jx_k)^{-1}$$

et

$$\sum_\lambda f_{\lambda'}(a,b,c)\, s_\lambda(X) = \prod_i \frac{(1+ax_i)(1+bx_i)(1+cx_i)}{1-x_i^2} \prod_{j<k} (1-x_jx_k)^{-1}.$$

Dans ce cas $c_j(\lambda') = m_j(\lambda)$ est la multiplicité de j dans λ.

3.3 Résolution du problème de Bressoud

3.3.1 Versions bornées

Macdonald [48, p. 83-84], Désarménien-Stembridge [23, 61] et Okada [52] ont donné des *versions bornées* des identités (3.4)-(3.6), respectivement :

Théorème 3.8 (Macdonald) *Pour des entiers strictement positifs m et n,*

$$\sum_{\lambda_1 \leq m} s_\lambda(X) = \frac{\det\left(x_i^{j-1} - x_i^{m+2n-j}\right)}{\prod_{i=1}^n (1-x_i) \prod_{i<j}(x_i - x_j)(x_i x_j - 1)}.$$

Théorème 3.9 (Désarménien-Stembridge) *Pour des entiers strictement positifs m et n,*

$$\sum_{\substack{\lambda_1 \leq 2m \\ \lambda \text{ paire}}} s_\lambda(X) = \frac{\det\left(x_i^{j-1} - x_i^{2m+2n+1-j}\right)}{\prod_{i=1}^n (1-x_i^2) \prod_{i<j}(x_i x_j - 1)(x_i - x_j)}.$$

Remarque. On pourrait aussi déduire ce résultat de la formule de Macdonald et de la formule de Pieri (3.8) :

$$\sum_{k=0}^n e_k(X) \sum_{\substack{\lambda_1 \leq 2m \\ \lambda \text{ paire}}} s_\lambda(X) = \sum_{\lambda_1 \leq 2m+1} s_\lambda(X).$$

Comme $\sum_{k=0}^n e_k(X) = \prod_{i=1}^n (1+x_i)$, la formule de Macdonald nous donne immediatement le théorème 3.9.

Théorème 3.10 (Okada) *Pour des entiers strictement positifs m et n, avec n pair,*

$$\sum_{\substack{\lambda_1 \leq m \\ \lambda' \text{ paire}}} s_\lambda(X) = \frac{1}{2} \frac{\det\left(x_i^{j-1} - x_i^{m+2n-1-j}\right) + \det\left(x_i^{j-1} + x_i^{m+2n-1-j}\right)}{\prod_{i<j}(x_i x_j - 1)(x_i - x_j)}.$$

Après avoir donné des démonstrations élémentaires de (3.3) et de ces trois dernières identités [16, 17], Bressoud [17] a formulé le problème consistant à trouver une extension de (3.3) aux partitions bornées. Notre seconde généralisation de (3.3) donne une réponse positive à cette question.

Pour toute suite $\xi \in \{\pm 1\}^n$, notons $|\xi|_{-1}$ le nombre de -1 dans la suite ξ. Soient $X^\xi := \{x_1^{\xi_1}, \ldots, x_n^{\xi_n}\}$ et

$$D(\xi, z) := 1 - z \prod_i x_i^{(\xi_i - 1)/2}.$$

Théorème 3.11 *Pour des entiers strictement positifs m et n,*

$$\sum_{\lambda\subseteq(m^n)} f_\lambda(a,b)s_\lambda(X) = \sum_{\xi\in\{\pm 1\}^n} \beta(\xi,a,b)\Phi(X^\xi;a,b)\prod_i x_i^{m(1-\xi_i)/2}$$

où le coefficient $\beta(\xi,a,b)$ est égal à

$$\begin{cases} \left(\dfrac{a^{m+1}}{D(\xi,1/a)} - \dfrac{b^{m+1}}{D(\xi,1/b)}\right)\dfrac{D(\xi,a)D(\xi,b)}{a-b} & \text{si } |\xi|_{-1} \text{ impair,} \\[2ex] \left(\dfrac{1}{D(\xi,1)} - \dfrac{(ab)^{m+1}}{D(\xi,1/ab)}\right)\dfrac{D(\xi,1)D(\xi,ab)}{1-ab} & \text{si } |\xi|_{-1} \text{ pair.} \end{cases}$$

Remarque. Supposons que $|a| < 1$, $|b| < 1$ et $|x_i| < 1$ $(1 \le i \le n)$ et $m \to \infty$, alors tous les sommants tendent vers 0 excepté celui correspondant à $|\xi|_{-1} = 0$, qui tend vers $\Phi(X;a,b)$. Ainsi le théorème 3.11 donne (3.3) lorsque $m \to \infty$.

D'autre part, le cas particulier $b = 0$ du théorème 3.11 a été prouvé par Goulden [29].

Enfin Krattenthaler, dans [37, 38], a évalué des sommes de fonctions de Schur sur des partitions ayant un nombre de colonnes impaires spécifié, ce qui affine les formules de Macdonald et Désarménien-Stembridge. Cependant, le résultat ne s'exprime comme un produit que lorsque l'alphabet X est spécialisé, ce qui donne des interprétations en terme de partitions planes et de tableaux.

3.3.2 Démonstration

Considèrons la fonction génératrice

$$S(u) := \sum_{\lambda_0,\lambda} f_\lambda(a,b)\, s_\lambda(X)\, u^{\lambda_0}$$

où la somme est sur tous les $\lambda_0 \ge \lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_n \ge 0$, et $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Supposons que λ soit de la forme $(\mu_1^{r_1}, \mu_2^{r_2}, \ldots, \mu_k^{r_k})$, où $\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_k \ge 0$ et les r_i sont des entiers strictement positifs de somme n. Soit $S_n^\lambda :=$

$S_{r_1} \times \cdots \times S_{r_k}$ le groupe des permutations laissant λ invariante. Alors

$$\begin{aligned} s_\lambda(X) &= \sum_{w \in S_n} w\left(x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \prod_{i<j} \frac{x_i}{x_i - x_j}\right) \\ &= \sum_{w \in S_n/S_n^\lambda} w\left(x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \prod_{\lambda_i > \lambda_j} \frac{x_i}{x_i - x_j}\right), \end{aligned}$$

où la permutation w agit sur les indices des indéterminées. Chaque $w \in S_n/S_n^\lambda$ correspond à une application surjective $f : X \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ telle que $|f^{-1}(i)| = r_i$. Pour tout sous-ensemble Y de X, soit $p(Y)$ le produit des éléments de Y (en particulier, $p(\emptyset) = 1$). Nous pouvons récrire les fonctions de Schur comme suit :

$$s_\lambda(X) = \sum_f p(f^{-1}(1))^{\mu_1} \cdots p(f^{-1}(k))^{\mu_k} \prod_{f(x_i)<f(x_j)} \frac{x_i}{x_i - x_j},$$

la somme étant sur toutes les applications surjectives $f : X \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ telles que $|f^{-1}(i)| = r_i$. De plus, chaque f détermine une *filtration* de X :

$$\mathcal{F} : \quad \emptyset = F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_k = X,$$

selon la règle $x_i \in F_l \iff f(x_i) \leq l$ pour $1 \leq l \leq k$. Réciproquement, une telle filtration $\mathcal{F} = (F_0, F_1, \ldots, F_k)$ détermine une surjection $f : X \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ de façon unique. Ainsi nous pouvons écrire :

$$s_\lambda(X) = \sum_{\mathcal{F}} \pi_{\mathcal{F}} \prod_{1 \leq i \leq k} p(F_i \setminus F_{i-1})^{\mu_i}, \tag{3.13}$$

la somme étant sur toutes les filtrations $\mathcal{F}$ telles que $|F_i| = r_1 + r_2 + \cdots + r_i$ pour $1 \leq i \leq k$, et

$$\pi_{\mathcal{F}} = \prod_{f(x_i)<f(x_j)} \frac{x_i}{x_i - x_j},$$

où f est la fonction définie par $\mathcal{F}$.

Maintenant, soient $\nu_i = \mu_i - \mu_{i+1}$ si $1 \leq i \leq k-1$ et $\nu_k = \mu_k$, ainsi $\nu_i > 0$ si $i < k$ et $\nu_k \geq 0$. Comme les colonnes de λ sont de longueur $|F_j| = r_1 + \cdots + r_j$ avec les multiplicités ν_j pour $1 \leq j \leq k$, nous avons

$$f_\lambda(a, b) = \prod_{|F_j| \text{ impair}} \frac{a^{\nu_j+1} - b^{\nu_j+1}}{a - b} \prod_{|F_j| \text{ pair}} \frac{1 - (ab)^{\nu_j+1}}{1 - ab}. \tag{3.14}$$

De plus, soient $\mu_0 = \lambda_0$ et $\nu_0 = \mu_0 - \mu_1$ dans la définition de $S(u)$, avec donc $\nu_0 \geq 0$ et $\mu_0 = \nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_k$. Nous obtenons alors par (3.13) et (3.14) :

$$\begin{aligned} S(u) &= \sum_{\mathcal{F}} \pi_{\mathcal{F}} \sum_{\nu} u^{\nu_0} \prod_{|F_j|\,\mathrm{impair}} \frac{a^{v_j+1} - b^{v_j+1}}{a-b} u^{v_j} p(F_j)^{v_j} \\ & \qquad \times \prod_{|F_j|\,\mathrm{pair}} \frac{1-(ab)^{v_j+1}}{1-ab} u^{v_j} p(F_j)^{v_j}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

où la somme extérieure est sur toutes les filtrations $\mathcal{F}$ de X et la somme intérieure est sur tous les entiers $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_k$ tels que $\nu_0 \geq 0$, $\nu_k \geq 0$ et $\nu_i > 0$ pour $1 \leq i \leq k-1$. Pour toute filtration $\mathcal{F}$ de X soit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(X,u) &:= \prod_{|F_j|\,\mathrm{impair}} \left[\frac{a(a-b)^{-1}}{1-ap(F_j)u} - \frac{b(a-b)^{-1}}{1-bp(F_j)u} - \chi(F_j \neq X) \right] \\ & \quad \times \prod_{|F_j|\,\mathrm{pair}>0} \left[\frac{(1-ab)^{-1}}{1-p(F_j)u} - \frac{ab(1-ab)^{-1}}{1-abp(F_j)u} - \chi(F_j \neq X) \right], \end{aligned}$$

où $\chi(A) = 1$ si A est vrai, et $\chi(A) = 0$ si A est faux. Alors la somme intérieure de (3.15) vaut

$$(1-u)^{-1} \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(X,u),$$

ce qui implique

$$S(u) = (1-u)^{-1} \sum_{\mathcal{F}} \pi_{\mathcal{F}} \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(X,u),$$

où la somme est sur toutes les filtrations de X comme précédemment.

La formule ci-dessus montre que $S(u)$ est une fonction rationnelle en u dont le dénominateur est un produit de termes de la forme $1 - p(Y)u$, $1 - ap(Y)u$, $1 - bp(Y)u$ ou $1 - abp(Y)u$, où $Y \subseteq X$. Ainsi nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.12 *La fonction génératrice $S(u)$ est de la forme :*

$$\begin{aligned} S(u) &= \frac{c(\emptyset)}{1-u} + \sum_{\substack{Y \subseteq X \\ |Y|\,\mathit{impair}}} \left(\frac{a(Y)}{1-ap(Y)u} - \frac{b(Y)}{1-bp(Y)u} \right) \\ & \quad + \sum_{\substack{Y \subseteq X \\ |Y|\,\mathit{pair}>0}} \left(\frac{c(Y)}{1-p(Y)u} - \frac{d(Y)}{1-abp(Y)u} \right). \end{aligned}$$

Il reste à déterminer les résidus $a(Y)$, $b(Y)$, $c(Y)$ et $d(Y)$, où $Y \subseteq X$. Commençons avec $c(\emptyset)$. En écrivant $\lambda_0 = \lambda_1 + k$ avec $k \geq 0$, nous voyons par définition que

$$\begin{aligned} S(u) &= \sum_{k\geq 0} u^k \sum_{\lambda} f_\lambda(a,b)\, s_\lambda(X) u^{\lambda_1} \\ &= (1-u)^{-1} \sum_{\lambda} f_\lambda(a,b)\, s_\lambda(X) u^{\lambda_1}, \end{aligned}$$

ce qui implique par (3.3)

$$c(\emptyset) = (S(u)(1-u))\,|_{u=1} = \Phi(X; a, b).$$

Pour déterminer les autres résidus, introduisons quelques notations. Pour tout $Y \subseteq X$, soient $Y' = X \setminus Y$ et $-Y = \{x_i^{-1} : x_i \in Y\}$. Pour tout sous-ensemble Z de X ou $-X$ soit

$$\alpha(Z,u) := \begin{cases} (1-ap(Z)u)(1-bp(Z)u) & \text{si } |Z| \text{ impair}, \\ (1-p(Z)u)(1-abp(Z)u) & \text{si } |Z| \text{ pair}. \end{cases}$$

Comme la détermination des différents résidus est similaire, nous donnons simplement les détails pour $c(Y)$. Soit $Y \subseteq X$ tel que $|Y|$ soit pair. Alors nous avons

$$c(Y) = \left[(1-u)^{-1} \sum_{\mathcal{F}} \pi_{\mathcal{F}} \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(X;u)(1-p(Y)u)\right]_{u=p(-Y)}. \tag{3.16}$$

Si $Y \notin \mathcal{F}$, le sommant correspondant vaut 0. Donc nous n'avons besoin de considérer que les filtrations $\mathcal{F}$ de la forme :

$$\emptyset = F_0 \subsetneq \cdots \subsetneq F_t = Y \subsetneq \cdots \subsetneq F_k = X \qquad 1 \leq t \leq k.$$

Nous pouvons alors décomposer $\mathcal{F}$ en deux filtrations $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, de $-Y$ et $Y' = X \setminus Y$ respectivement, comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &: \emptyset \subsetneq -(Y \setminus F_{t-1}) \subsetneq \cdots \subsetneq -(Y \setminus F_1) \subsetneq -Y, \\ \mathcal{F}_2 &: \emptyset \subsetneq F_{t+1} \setminus Y \subsetneq \cdots \subsetneq F_{k-1} \setminus Y \subsetneq Y'. \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $v = p(Y)u$, nous avons

$$\begin{aligned} (1-u)^{-1}\mathcal{A}_{\mathcal{F}}(X;u)(1-p(Y)u) &= (1-p(-Y)v)^{-1}\mathcal{A}_{\mathcal{F}_1}(-Y;v)\mathcal{A}_{\mathcal{F}_2}(Y';v) \\ &\quad \times \alpha(-Y,v)\left[(1-ab)^{-1} - \beta(v)(1-v)\right], \end{aligned}$$

où $\beta(v) = ab/(1-abv)(1-ab) + \chi(Y \neq X)$, et

$$\pi_{\mathcal{F}}(X) = \pi_{\mathcal{F}_1}(-Y)\pi_{\mathcal{F}_2}(Y') \prod_{x_i \in Y, x_j \in Y'} (1 - x_i^{-1}x_j)^{-1},$$

Comme $u = p(-Y)$ équivaut à $v = 1$, il s'ensuit grâce à (3.16)

$$\begin{aligned} c(Y) &= (1-ab)^{-1}(1-p(-Y))^{-1}\alpha(-Y,1) \prod_{x_i \in Y, x_j \in Y'} (1 - x_i^{-1}x_j)^{-1} \\ &\quad \times \left[\sum_{\mathcal{F}_1} \pi_{\mathcal{F}_1}(-Y)\mathcal{A}_{\mathcal{F}_1}(-Y;v) \right]_{v=1} \times \left[\sum_{\mathcal{F}_2} \pi_{\mathcal{F}_2}(Y')\mathcal{A}_{\mathcal{F}_2}(Y';v) \right]_{v=1}. \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de $c(\emptyset)$, qui peut s'écrire :

$$\Phi(X;a,b) = \sum_{\mathcal{F}} \left(\pi_{\mathcal{F}}(X)\mathcal{A}_{\mathcal{F}}(X;u)\right)_{u=1},$$

nous obtenons :

$$c(Y) = \frac{\alpha(-Y,1)\Phi(-Y;a,b)\Phi(Y';a,b)}{(1-ab)(1-p(-Y))} \prod_{x_i \in Y, x_j \in Y'} (1 - x_i^{-1}x_j)^{-1}.$$

Chaque sous-ensemble Y de X peut être codé par une suite $\xi \in \{\pm 1\}^n$ selon la règle : $\xi_i = 1$ si $x_i \notin Y$ et $\xi_i = -1$ si $x_i \in Y$. Alors

$$c(Y) = \frac{\Phi(x_1^{\xi_1}, \ldots, x_n^{\xi_n}; a, b)}{(1-ab)(1-p(-Y))}\alpha(-Y,1),$$

Remarquons aussi que

$$p(Y) = \prod_i x_i^{(1-\xi_i)/2}, \qquad p(-Y) = \prod_i x_i^{(\xi_i-1)/2}.$$

De la même manière, nous trouvons pour tout ensemble de cardinal pair $Y \subseteq X$

$$d(Y) = \frac{ab\Phi(x_1^{\xi_1}, \ldots, x_n^{\xi_n}; a, b)}{(1-ab)(1-(ab)^{-1}p(-Y))}\alpha(-Y,1),$$

et pour tout ensemble de cardinal impair $Y \subseteq X$

$$\begin{aligned} a(Y) &= \frac{a\Phi(x_1^{\xi_1}, \ldots, x_n^{\xi_n}; a, b)}{(a-b)(1-a^{-1}p(-Y))}\alpha(-Y,1), \\ b(Y) &= \frac{b\Phi(x_1^{\xi_1}, \ldots, x_n^{\xi_n}; a, b)}{(a-b)(1-b^{-1}p(-Y))}\alpha(-Y,1). \end{aligned}$$

Par le lemme 3.12, en extrayant le coefficient de u^m dans $S(u)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\subseteq(m^n)} f_\lambda(a,b)s_\lambda(X) = \Phi(X;a,b) \quad &+ \sum_{\substack{Y\subseteq X\\ |Y|\,\text{impair}}} \left[a(Y)a^m - b(Y)b^m\right] p(Y)^m \\ &+ \sum_{\substack{Y\subseteq X\\ |Y|\,\text{pair}>0}} \left[c(Y) - d(Y)(ab)^m\right] p(Y)^m.\end{aligned}$$

Finalement, en substituant les valeurs de $a(Y), b(Y), c(Y)$ et $d(Y)$ dans la formule ci-dessus, nous obtenons le théorème 3.11.

3.3.3 Trois cas particuliers

Nous montrons dans ce paragraphe que pour $(a,b) = (1,0)$, $(1,-1)$ et $(0,0)$, le théorème 3.11 implique bien les théorèmes 3.8, 3.9 et 3.10 de Macdonald, Désarménien-Stembridge et Okada respectivement.

Notons d'abord que $f_\lambda(1,0) = 1$,

$$f_\lambda(1,-1) = \begin{cases} 0 & \text{si l'un des } c_j \text{ est impair,} \\ 1 & \text{sinon;} \end{cases}$$

et

$$f_\lambda(0,0) = \begin{cases} 0 & \text{si l'un des } c_j \text{ est strictement positif pour un } j \text{ impair,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'autre part, nous avons

$$\beta(\xi,1,0) = 1,$$

$$\beta(\xi,1,-1) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ est pair,} \\ \prod_i x_i^{(\xi_i-1)/2} & \text{sinon;} \end{cases}$$

et

$$\beta(\xi,0,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\xi|_{-1} \text{ est impair,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc le théorème 3.11 implique immédiatement le résultat suivant :

Corollaire 3.13 *Les sommes de fonctions de Schur de formes incluses dans un rectangle donné sont :*

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda\subseteq(m)^n} s_\lambda(X) &= \sum_{\xi\in\{\pm1\}^n} \Phi(X^\xi;1,0)\prod_i x_i^{m(1-\xi_i)/2}, &(3.17)\\
\sum_{\substack{\lambda\subseteq(2m)^n\\ \lambda \text{ paire}}} s_\lambda(X) &= \sum_{\xi\in\{\pm1\}^n} \Phi(X^\xi;1,-1)\prod_i x_i^{m(1-\xi_i)}, &(3.18)\\
\sum_{\substack{\lambda\subseteq(m)^n\\ \lambda' \text{ paire}}} s_\lambda(X) &= \sum_{\substack{\xi\in\{\pm1\}^n\\ |\xi|_{-1} \text{ pair}}} \Phi(X^\xi;0,0)\prod_i x_i^{m(1-\xi_i)/2}, &(3.19)
\end{aligned}$$

où m et n sont dans $\mathbb{N}^*$ et n est pair dans la dernière identité.

Pour voir que le corollaire précédent est équivalent aux théorèmes 3.8, 3.9 et 3.10, nous n'avons besoin que de la formule du déterminant de Vandermonde :

$$\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n x_{\sigma(i)}^{i-1} = \det(x_j^{i-1}) = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i). \qquad (3.20)$$

Notons que pour $\xi\in\{\pm1\}^n$ et $1\le i<j\le n$,

$$(x_i^{\xi_i}-x_j^{\xi_j})(x_i^{\xi_i}x_j^{\xi_j}-1) = (x_i-x_j)(x_ix_j-1)x_i^{\xi_i-1}x_j^{\xi_j-1},$$

ainsi

$$\prod_{i<j}(x_i^{\xi_i}-x_j^{\xi_j})(x_i^{\xi_i}x_j^{\xi_j}-1) = \prod_{i<j}(x_i-x_j)(x_ix_j-1)\prod_i x_i^{(n-1)(\xi_i-1)}. \qquad (3.21)$$

Notons aussi que

$$\prod_i(1-x_i^{\xi_j}) = (-1)^{|\xi|_{-1}}\prod_i(1-x_i)\prod_i x_i^{(\xi_i-1)/2}. \qquad (3.22)$$

Le cas $(a,b)=(1,0)$: Soit

$$\Delta_B := \frac{\prod_{i<j}(x_j-x_i)}{\Phi(X;1,0)} = \prod_i(1-x_i)\prod_{i<j}(x_i-x_j)(x_ix_j-1).$$

D'après (3.20), (3.21) et (3.22), nous avons

$$\Phi(X^\xi;1,0) = \frac{(-1)^{|\xi|_{-1}}}{\Delta_B}\prod_i x_i^{(1-\xi_i)(n-1/2)}\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\prod_i x_{\sigma(i)}^{\xi_{\sigma(i)}(i-1)}.$$

Donc le membre de droite de (3.17) vaut

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta_B}\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\sum_{\xi\in\{\pm1\}^n}(-1)^{|\xi|_{-1}}\prod_i x_{\sigma(i)}^{(m+2n-1)(1-\xi_{\sigma(i)})/2+\xi_{\sigma(i)}(i-1)}\\
&=\frac{1}{\Delta_B}\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\sum_{\xi\in\{\pm1\}^n}\prod_{\xi_{\sigma(i)}=1}x_{\sigma(i)}^{i-1}\prod_{\xi_{\sigma(i)}=-1}\left(-x_{\sigma(i)}^{m+2n-i}\right)\\
&=\frac{1}{\Delta_B}\det\left(x_i^{j-1}-x_i^{m+2n-j}\right).
\end{aligned}$$

Donc le théorème 3.8 équivaut à (3.17).

Le cas $(a,b)=(1,-1)$: Soit

$$\Delta_C := \frac{\prod_{i<j}(x_j-x_i)}{\Phi(X;1,-1)} = \prod_i(1-x_i^2)\prod_{i<j}(x_i-x_j)(x_ix_j-1).$$

D'après (3.20), (3.21) et (3.22), nous avons

$$\Phi(X^\xi;1,-1)=\frac{(-1)^{|\xi|_{-1}}}{\Delta_C}\prod_i x_i^{n(1-\xi_i)}\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\prod_i x_{\sigma(i)}^{\xi_{\sigma(i)}(i-1)},$$

et le membre de droite de (3.18) vaut

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta_C}\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\sum_{\xi\in\{\pm1\}^n}(-1)^{|\xi|_{-1}}\prod_i x_{\sigma(i)}^{(n+m)(1-\xi_{\sigma(i)})+(i-1)\xi_{\sigma(i)}}\\
&=\frac{1}{\Delta_C}\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\sum_{\xi\in\{\pm1\}^n}\prod_{\xi_{\sigma(i)}=1}x_{\sigma(i)}^{i-1}\prod_{\xi_{\sigma(i)}=-1}\left(-x_{\sigma(i)}^{2n+2m-i+1}\right)\\
&=\frac{1}{\Delta_C}\det\left(x_i^{j-1}-x_i^{2m+2n+1-j}\right).
\end{aligned}$$

Donc le théorème 3.9 équivaut à (3.18).

Le cas $(a,b)=(0,0)$: Soit

$$\Delta_D := \frac{\prod_{i<j}(x_j-x_i)}{\Phi(X;0,0)} = \prod_{i<j}(x_i-x_j)(x_ix_j-1).$$

D'après (3.20), (3.21) et (3.22), nous avons

$$\Phi(X^\xi;0,0)=\frac{1}{\Delta_D}\prod_i x_i^{(n-1)(1-\xi_i)}\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\prod_i x_{\sigma(i)}^{\xi_{\sigma(i)}(i-1)}$$

et le membre de droite de (3.19) vaut

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta_D}\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\sum_{\substack{\xi\in\{\pm1\}^n\\ |\xi|_{-1}\text{even}}}\prod_{\xi_{\sigma(i)}=1}x_{\sigma(i)}^{i-1}\prod_{\xi_{\sigma(i)}=-1}x_{\sigma(i)}^{2n+m-i-1}\\
&=\frac{1}{2\Delta_D}\left[\det\left(x_i^{j-1}-x_i^{m+2n-1-j}\right)+\det\left(x_i^{j-1}+x_i^{m+2n-1-j}\right)\right].
\end{aligned}$$

Donc le théorème 3.10 équivaut à (3.19).

Lorsque $m=0$, comme les membres de gauche de (3.17), (3.18) et (3.19) valent 1, nous déduisons le résultat suivant.

Corollaire 3.14 *Pour tout entier strictement positif* n*, nous avons*

$$\begin{aligned}
\det\left(x_i^{j-1}-x_i^{2n-j}\right) &= \prod_i(1-x_i)\prod_{i<j}(x_i-x_j)(x_ix_j-1),\\
\det\left(x_i^{j-1}-x_i^{2n-j+1}\right) &= \prod_i(1-x_i^2)\prod_{i<j}(x_i-x_j)(x_ix_j-1),\\
\det\left(x_i^{j-1}+x_i^{2n-1-j}\right) &= 2\prod_{i<j}(x_i-x_j)(x_ix_j-1).
\end{aligned}$$

Ce sont en fait les formules de Weyl pour les systèmes de racine de type B_n, C_n et D_n ([18], p. 68-69) respectivement, que nous obtenons ici comme conséquences du corollaire 3.13, alors que Macdonald les utilise pour prouver le théorème 3.8.

Chapitre 4

Polynômes $P_\lambda(X,q)$ et q-séries

4.1 Introduction et notations

4.1.1 Notations des q-séries et formule de Pieri

Nous utilisons dans ce chapitre les notations standard des q-séries (voir par exemple [24]). Soient $(x)_0 := (x;q)_0 = 1$ et pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned}(x)_n &:= (x;q)_n = \prod_{k=1}^{n}(1-xq^{k-1}),\\ (x)_\infty &:= (x;q)_\infty = \prod_{k=1}^{\infty}(1-xq^{k-1}).\end{aligned}$$

Pour $n \geq 0$ et $r \geq 1$, soient

$$(a_1,\ldots,a_r;\, q)_n := \prod_{i=1}^{r}(a_i)_n\ , \qquad (a_1,\ldots,a_r;q)_\infty := \prod_{i=1}^{r}(a_i)_\infty.$$

Soient $n \geq 1$ un entier fixé et S_n le groupe des permutations de l'ensemble $\{1,\,2,\ldots,n\}$. Soit $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$ un alphabet fini. Pour toute partition $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ de longueur $\leq n$, rappelons que les polynômes de Hall-Littlewood peuvent s'écrire :

$$P_\lambda(X,q) = \prod_{i\geq 1}\frac{(1-q)^{m_i}}{(q)_{m_i}}\sum_{w\in S_n} w\left(x_1^{\lambda_1}\cdots x_n^{\lambda_n}\prod_{i<j}\frac{x_i-qx_j}{x_i-x_j}\right).$$

Enfin, il sera pratique d'adopter les notations suivantes :

$$(x)_\lambda := (x;\, q)_\lambda = (x)_{\lambda_1-\lambda_2}(x)_{\lambda_2-\lambda_3}\cdots,$$

et d'introduire le coefficient q-binomial généralisé

$$\begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix} := \frac{(q)_n}{(q)_{n-\lambda_1}(q)_\lambda},$$

avec la convention $\begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix} = 0$ si $\lambda_1 > n$. Si $\lambda = (\lambda_1)$ nous retrouvons le coefficient q-binomial classique. Enfin notons $n(\lambda) := \sum_i \binom{\lambda_i}{2}$.

Il existe une formule de Pieri pour les polynômes de Hall-Littlewood [48, p. 205], que nous donnons ici sans démonstration :

Proposition 4.1 *Soient μ une partition et $r \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$P_\mu(X,q)e_r(X) = \sum_{\substack{\lambda \\ \lambda/\mu\ r\text{-}b.v.}} \prod_{i\geq 1} \begin{bmatrix} \lambda'_i - \lambda'_{i+1} \\ \lambda'_i - \mu'_i \end{bmatrix} P_\lambda(X,q). \tag{4.1}$$

Nous aurons besoin aussi de l'identité fondamentale suivante, appelée *triple produit de Jacobi* [4, p.21] :

$$J(x,\, q) := 1 + \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r x^r q^{\binom{r}{2}}(1 + q^r/x^{2r}) = (q,\, x,\, q/x)_\infty. \tag{4.2}$$

Le travail présenté ici a fait l'objet d'un article, qui a été récemment accepté pour publication [36].

4.1.2 Les identités de Rogers-Ramanujan

Les *identités de Rogers-Ramanujan* (voir par exemple [4, 6]) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{\substack{n=1 \\ n\equiv\pm1 \pmod 5}}^{\infty} (1-q^n)^{-1}, \tag{4.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{\substack{n=1 \\ n\equiv\pm2 \pmod 5}}^{\infty} (1-q^n)^{-1}, \tag{4.4}$$

sont parmi les q-identités les plus remarquables en théorie des partitions et en combinatoire. Depuis leur découverte ces identités ont été prouvées et généralisées de nombreuses façons (voir [4, 6, 20, 61] et les références citées). Dans [61], en adaptant la méthode de Macdonald pour calculer les développements en fractions de séries formelles symétriques que nous avons vue au chapitre précédent, Stembridge a donné une preuve originale des identités de Rogers-Ramanujan ainsi que quatorze autres q-identités non triviales de type Rogers-Ramanujan et leur multianalogues. Bien qu'il soit possible de décrire sa démonstration directement par le biais des q-séries, deux formules de sommation de polynômes de Hall-Littlewood fûrent une source cruciale d'inspiration pour ce genre d'identité. Une de nos motivations de départ était de chercher de nouvelles q-identités de type Rogers-Ramanujan et leurs multianalogues par cette approche, mais nous pensons que les nouvelles formules de sommation de polynômes de Hall-Littlewood sont intéressantes en elles-mêmes.

4.2 Sommes de polynômes de Hall-Littlewood

4.2.1 Formules de Macdonald et Stembridge

Pour α paramètre, définissons la fonction auxiliaire suivante

$$\Psi_q(X;\alpha) := \prod_i (1-x_i)^{-1}(1-\alpha x_i)^{-1} \prod_{j<k} \frac{1-qx_jx_k}{1-x_jx_k}.$$

Alors il est bien connu [48, p. 230] que les sommes des $P_\lambda(X,q)$ sur toutes les partitions et sur les partitions paires sont données par les formules suivantes :

$$\sum_\lambda P_\lambda(X,q) = \Psi_q(X;0), \tag{4.5}$$

$$\sum_\lambda P_{2\lambda}(X,q) = \Psi_q(X;-1). \tag{4.6}$$

Pour toute suite $\xi \in \{\pm 1\}^n$ soit de même $X^\xi := \{x_1^{\xi_1}, \ldots, x_n^{\xi_n}\}$ et notons à nouveau $|\xi|_{-1}$ le nombre de -1 dans ξ. Alors, en sommant les P_λ sur les partitions à parts bornées, Macdonald [48, p. 232] et Stembridge [61] ont respectivement généralisé (4.5) et (4.6) comme suit :

$$\sum_{\lambda_1 \le k} P_\lambda(X,q) = \sum_{\xi \in \{\pm 1\}^n} \Psi_q(X^\xi; 0) \prod_i x_i^{k(1-\xi_i)/2}, \tag{4.7}$$

$$\sum_{\substack{\lambda_1 \le 2k \\ \lambda \ paire}} P_\lambda(X,q) = \sum_{\xi \in \{\pm 1\}^n} \Psi_q(X^\xi; -1) \prod_i x_i^{k(1-\xi_i)}. \tag{4.8}$$

Remarque. La formule de Stembridge (4.8) peut se déduire de celle de Macdonald (4.7) et de la formule de Pieri (4.1). Nous avons en effet d'après (4.1)

$$\sum_{\substack{\mu_1 \le 2k \\ \mu \ paire}} P_\mu(X,q) \sum_{m \ge 0} e_m(X) = \sum_{\lambda_1 \le 2k+1} P_\lambda(X,q),$$

en notant que λ détermine de manière unique μ paire en effaçant une cellule dans chaque part impaire de λ, et ainsi $\begin{bmatrix} \lambda'_i - \lambda'_{i+1} \\ \lambda'_i - \mu'_i \end{bmatrix} = 1$. Finalement, nous obtenons le résultat, en utilisant le fait que $\prod_i (1 + x_i^{\xi_i})^{-1} = \prod_i (1 + x_i)^{-1} \times \prod_i x_i^{(1-\xi_i)/2}$.

Maintenant, pour α et β deux paramètres, définissons une autre fonction auxiliaire

$$\Phi_q(X; \alpha, \beta) := \prod_i \frac{1 - \alpha x_i}{1 - \beta x_i} \prod_{j<k} \frac{1 - q x_j x_k}{1 - x_j x_k}.$$

Alors nous avons les formules de sommations de polynômes de Hall-Littlewood suivantes similaires à (4.5) et (4.6) [48, p.232] :

$$\sum_{\lambda' \text{ paire}} c_\lambda(q)\, P_\lambda(X,q) = \Phi_q(X; 0, 0), \tag{4.9}$$

$$\sum_{\lambda} d_\lambda(q)\, P_\lambda(X,q) = \Phi_q(X; q, 1), \tag{4.10}$$

où

$$c_\lambda(q) := \prod_{i \ge 1} (q;q^2)_{m_i(\lambda)/2}, \qquad d_\lambda(q) := \prod_{i \ge 1} \frac{(q)_{m_i(\lambda)}}{(q^2;q^2)_{[m_i(\lambda)/2]}}.$$

Au vu des nombreuses applications de (4.7) et (4.8), il est naturel de chercher de telles extensions pour (4.9) et (4.10). Pourtant, comme l'a remarqué Stembridge [61, p. 475], dans ces autres cas apparaissent des complications qui rendent douteuse l'existence de développements aussi explicites que (4.7) et (4.8). Nous avons remarqué que ces complications apparaissent si l'on cherche à garder les mêmes coefficients $c_\lambda(q)$ et $d_\lambda(q)$ de (4.9) et (4.10) pour les sommes sur les partitions bornées. En fait, il s'est avéré qu'une petite modification fût nécessaire concernant ces coefficients.

4.2.2 Versions finies de (4.9) et (4.10)

Théorème 4.2 *Pour $k \geq 1$,*

$$\sum_{\substack{\lambda_1 \leq k \\ \lambda' \; paire}} c_{\lambda,k}(q) P_\lambda(X,q) = \sum_{\substack{\xi \in \{\pm 1\}^n \\ |\xi|_{-1} \; pair}} \Phi_q(X^\xi; 0, 0) \prod_i x_i^{k(1-\xi_i)/2}, \qquad (4.11)$$

$$\sum_{\lambda_1 \leq k} d_{\lambda,k}(q) P_\lambda(X,q) = \sum_{\xi \in \{\pm 1\}^n} \Phi_q(X^\xi; q, 1) \prod_i x_i^{k(1-\xi_i)/2}, \qquad (4.12)$$

où

$$c_{\lambda,k}(q) := \prod_{i=1}^{k-1} (q;q^2)_{m_i(\lambda)/2}, \quad d_{\lambda,k}(q) := \prod_{i=1}^{k-1} \frac{(q)_{m_i(\lambda)}}{(q^2;q^2)_{[m_i(\lambda)/2]}}. \qquad (4.13)$$

Remarque. Nous avons été amenés à découvrir de telles extensions en commençant à étudier le membre de droite au lieu du membre de gauche et en nous inspirant des formules similaires correspondant au cas $q = 0$ des polynômes de Hall-Littlewood [35], c'est-à-dire les fonctions de Schur. Au départ, nous avons aussi effectué des tests avec Maple, en utilisant le package ACE [62]. Dans le cas $q = 0$, les membres de droite de (4.7), (4.8), (4.11) et (4.12) peuvent s'écrire comme un quotient de déterminants et les formules deviennent les identités connues sur les fonctions de Schur [35], vues dans le chapitre précédent.

On peut bien sûr se poser la question de savoir s'il n'existe pas des formules de sommations de ce type pour les polynômes de Macdonald, ce qui généraliserait ces identités. Mais ce n'est pas le cas à ce jour, le problème majeur étant qu'il n'existe pas d'expression connue pour les polynômes de Macdonald, alors que ce serait nécesssaire pour utiliser les techniques vues pour les fonctions de Schur, et celles qui suivent pour les polynômes de Hall-Littlewood.

4.2.3 Démonstration de (4.11)

Rappelons que pour toute affirmation A on utilise la fonction *vrai ou faux* $\chi(A)$, qui vaut 1 si A est vraie et 0 si A est fausse. Considérons la fonction génératrice

$$S(u) := \sum_{\lambda_0,\lambda} \chi(\lambda' \,\text{even})\, c_{\lambda,\lambda_0}(q) P_\lambda(X,q)\, u^{\lambda_0}$$

où la somme est sur toutes les partitions $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et les entiers $\lambda_0 \geq \lambda_1$. Supposons que $\lambda = (\mu_1^{r_1}\, \mu_2^{r_2}\, \dots \mu_k^{r_k})$, où $\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_k \geq 0$ et $(r_1, \dots, r_k)$ est une composition de n.

Rappellons que tout $w \in S_n/S_n^\lambda$ correspond à une application surjective $f : X \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ telle que $|f^{-1}(i)| = r_i$. Pour tout sous-ensemble Y de X, soit $p(Y)$ le produit des éléments de Y (avec en particulier $p(\emptyset) = 1$). Nous pouvons alors récrire les polynômes de Hall-Littlewood comme suit :

$$P_\lambda(X,q) = \sum_f p(f^{-1}(1))^{\mu_1} \cdots p(f^{-1}(k))^{\mu_k} \prod_{f(x_i)<f(x_j)} \frac{x_i - qx_j}{x_i - x_j},$$

sommé sur toutes les applications surjectives $f : X \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ telles que $|f^{-1}(i)| = r_i$. De plus, nous rappelons que chaque f détermine une *filtration* de X :

$$\mathcal{F} : \quad \emptyset = F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_k = X, \tag{4.14}$$

avec $x_i \in F_l \iff f(x_i) \leq l$ pour $1 \leq l \leq k$. Nous pouvons donc écrire :

$$P_\lambda(X,q) = \sum_{\mathcal{F}} \pi_{\mathcal{F}} \prod_{1\leq i\leq k} p(F_i \setminus F_{i-1})^{\mu_i}, \tag{4.15}$$

sommé sur toutes les filtrations $\mathcal{F}$ telles que $|F_i| = r_1 + r_2 + \cdots + r_i$ pour $1 \leq i \leq k$, et

$$\pi_{\mathcal{F}} = \prod_{f(x_i)<f(x_j)} \frac{x_i - qx_j}{x_i - x_j},$$

où f la fonction définie par $\mathcal{F}$.

Soient $\nu_i = \mu_i - \mu_{i+1}$ si $1 \leq i \leq k-1$ et $\nu_k = \mu_k$, alors $\nu_i > 0$ si $i < k$ et $\nu_k \geq 0$. Comme les longueurs des colonnes de λ sont $|F_j| = r_1 + \cdots + r_j$ avec les multiplicités ν_j pour $1 \leq j \leq k$, nous avons

$$\chi(\lambda' \,\text{paire}) = \prod_{j=1}^{k} \chi(|F_j|_{\text{pair}}). \tag{4.16}$$

Une filtration $\mathcal{F}$ sera dite *paire* si $|F_j|$ est pair pour tout $j \geq 1$. Soient de plus $\mu_0 = \lambda_0$ et $\nu_0 = \mu_0 - \mu_1$ dans la définition de $S(u)$, de sorte que $\nu_0 \geq 0$ et $\mu_0 = \nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_k$. Définissons $\varphi_{2n}(q) := (1-q)(1-q^3)\cdots(1-q^{2n-1})$ et $c_{\mathcal{F}}(q) := \prod_{i=1}^k \varphi_{|F_i \setminus F_{i-1}|}(q)$ pour toutes les filtrations paires $\mathcal{F}$. Ainsi, comme $r_j = m_{\mu_j}(\lambda)$ pour $j \geq 1$, nous avons

$$\begin{aligned} c_{\lambda,\,\lambda_0}(q) \;=\; & c_{\mathcal{F}}(q)\left(\chi(\nu_k = 0)\varphi_{|F_k \setminus F_{k-1}|}(q) + \chi(\nu_k \neq 0)\right)^{-1} \\ & \times \left(\chi(\nu_0 = 0)\varphi_{|F_1|}(q) + \chi(\nu_0 \neq 0)\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Soit $F(X)$ l'ensemble des filtrations de X. Nous obtenons en résumé

$$\begin{aligned} S(u) \;=\; & \sum_{\mathcal{F} \in F(X)} c_{\mathcal{F}}(q)\, \pi_{\mathcal{F}}\, \chi(\mathcal{F}_{\text{paire}}) \sum_{\nu_1 > 0} (u\, p(F_1))^{\nu_1} \cdots \sum_{\nu_{k-1} > 0} (u\, p(F_{k-1}))^{\nu_{k-1}} \\ & \times \sum_{\nu_0 \geq 0} \frac{u^{\nu_0}}{\chi(\nu_0 = 0)\, \varphi_{|F_1|}(q) + \chi(\nu_0 \neq 0)} \\ & \times \sum_{\nu_k \geq 0} \frac{u^{\nu_k}\, p(F_k)^{\nu_k}}{\chi(\nu_k = 0)\, \varphi_{|F_k \setminus F_{k-1}|}(q) + \chi(\nu_k \neq 0)}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Pour toute filtration $\mathcal{F}$ de X soit

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}}(X,u) := c_{\mathcal{F}}(q) \prod_{|F_j|\,\text{pair}} \left[\frac{p(F_j)u}{1 - p(F_j)u} + \frac{\chi(F_j = X)}{\varphi_{|F_j \setminus F_{j-1}|}(q)} + \frac{\chi(F_j = \emptyset)}{\varphi_{|F_1|}(q)}\right]$$

si $\mathcal{F}$ est paire, et 0 sinon. Nous déduisons de (4.17)

$$S(u) = \sum_{\mathcal{F} \in F(X)} \pi_{\mathcal{F}} \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(X,u).$$

Ainsi $S(u)$ est une fonction rationnelle en u avec des pôles simples en $1/p(Y)$, où Y est un sous-ensemble de X tel que $|Y| > 0$ soit pair. Il reste maintenant à déterminer les résidus $c(Y)$ en chaque pôle $u = 1/p(Y)$.

Commençons avec $c(\emptyset)$. En écrivant $\lambda_0 = \lambda_1 + k$ pour $k \geq 0$, nous voyons que

$$\begin{aligned} S(u) \;&=\; \sum_{\lambda} \chi(\lambda'\,\text{paire})\, c_\lambda(q) P_\lambda(X,q) u^{\lambda_1} \sum_{k \geq 0} \frac{u^k}{\chi(k=0)\varphi_{m_{\lambda_1}}(q) + \chi(k \neq 0)} \\ &=\; \sum_{\lambda} \chi(\lambda'\,\text{paire})\, c_\lambda(q) P_\lambda(X,q) u^{\lambda_1} \left(\frac{u}{1-u} + \frac{1}{\varphi_{m_{\lambda_1}}(q)}\right). \end{aligned}$$

Nous en déduisons à l'aide de (4.9)

$$c(\emptyset) = [S(u)(1-u)]_{u=1} = \Phi_q(X;0,0).$$

Pour déterminer les autres résidus, nous avons besoin d'autres notations, que nous rappelons ici. Pour tout $Y \subseteq X$, soient $Y' = X \setminus Y$ et $-Y = \{x_i^{-1} : x_i \in Y\}$. Soit $Y \subseteq X$ tel que $|Y|$ soit pair. Alors

$$c(Y) = \left[\sum_{\mathcal{F}} \pi_{\mathcal{F}} \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(X,\, u)(1-p(Y)u)\right]_{u=p(-Y)}. \tag{4.18}$$

Si $Y \notin \mathcal{F}$, le sommand correspondant vaut 0, donc nous n'avons à considérer que les filtrations $\mathcal{F}$ suivantes :

$$\emptyset = F_0 \subsetneq \cdots \subsetneq F_t = Y \subsetneq \cdots \subsetneq F_k = X \qquad 1 \le t \le k.$$

Décomposons alors $\mathcal{F}$ en deux filtrations $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 \quad &: \quad \emptyset \subsetneq -(Y \setminus F_{t-1}) \subsetneq \cdots \subsetneq -(Y \setminus F_1) \subsetneq -Y, \\ \mathcal{F}_2 \quad &: \quad \emptyset \subsetneq F_{t+1} \setminus Y \subsetneq \cdots \subsetneq F_{k-1} \setminus Y \subsetneq Y'. \end{aligned}$$

Alors, en écrivant $v = p(Y)u$ et $c_{\mathcal{F}}(q) = c_{\mathcal{F}_1}(q) \times c_{\mathcal{F}_2}(q)$, nous avons

$$\pi_{\mathcal{F}}(X) = \pi_{\mathcal{F}_1}(-Y)\pi_{\mathcal{F}_2}(Y') \prod_{x_i \in Y, x_j \in Y'} \frac{1-qx_i^{-1}x_j}{1-x_i^{-1}x_j},$$

et $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}(X,\, u)(1-p(Y)u)$ est égal à

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_{\mathcal{F}_1}(-Y,\, v)\mathcal{A}_{\mathcal{F}_2}(Y',\, v)(1-v)\left(\frac{v}{1-v} + \frac{\chi(Y=X)}{\varphi_{|Y\setminus F_{t-1}|}(q)}\right) \\ &\times \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1}{\varphi_{|Y\setminus F_{t-1}|}(q)}\right)^{-1}\left(\frac{v}{1-v} + \frac{1}{\varphi_{|F_{t+1}\setminus Y|}(q)}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Donc lorsque $u = p(-Y)$, c'est-à-dire $v = 1$,

$$\begin{aligned} &[\pi_{\mathcal{F}}(X)\mathcal{A}_{\mathcal{F}}(X,\, u)(1-p(Y)u)]_{u=p(-Y)} = \\ &\qquad [\pi_{\mathcal{F}_1}(-Y)\mathcal{A}_{\mathcal{F}_1}(-Y,\, v)(1-v)\pi_{\mathcal{F}_2}(Y')\mathcal{A}_{\mathcal{F}_2}(Y',\, v)(1-v)]_{v=1} \\ &\qquad\qquad \times \prod_{x_i \in Y, x_j \in Y'} \frac{1-qx_i^{-1}x_j}{1-x_i^{-1}x_j}. \end{aligned}$$

En utilisant (4.18) et le résultat de $c(\emptyset)$, qui peut s'écrire

$$\left[\sum_{\mathcal{F}} \pi_{\mathcal{F}} \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(X,u)(1-u)\right]_{u=1} = \Phi_q(X;0,0),$$

nous obtenons

$$c(Y) = \Phi_q(-Y;0,0)\Phi_q(Y';0,0) \prod_{x_i\in Y, x_j\in Y'} \frac{1-qx_i^{-1}x_j}{1-x_i^{-1}x_j}.$$

Chaque sous-ensemble Y de X peut être codé par une suite $\xi \in \{\pm 1\}^n$ selon la règle : $\xi_i = 1$ si $x_i \notin Y$ et $\xi_i = -1$ si $x_i \in Y$. Ainsi

$$c(Y) = \Phi_q(X^{\xi};0,0).$$

Remarquons aussi que

$$p(Y) = \prod_i x_i^{(1-\xi_i)/2}, \qquad p(-Y) = \prod_i x_i^{(\xi_i-1)/2}.$$

Alors, en extrayant le coefficient de u^k dans l'identité :

$$S(u) = \sum_{\substack{Y\subseteq X\\ |Y| \,\text{pair}}} \frac{c(Y)}{1-p(Y)u},$$

nous obtenons

$$\sum_{\substack{\lambda_1\le k\\ \lambda' \,\text{paire}}} c_{\lambda,k}(q) P_\lambda(X,q) = \sum_{\substack{Y\subseteq X\\ |Y| \,\text{pair}}} c(Y)p(Y)^k.$$

Finallement, en substituant la valeur de $c(Y)$ dans la formule précédente nous obtenons (4.11).
Remarque. Il serait intéressant de donner une démonstration de (4.11) en utilisant (4.7) et une autre formule de Pieri [48, p. 218].

4.2.4 Démonstration de (4.12)

Comme dans la démonstration de (4.11), calculons la fonction génératrice

$$F(u) := \sum_{\lambda_0,\lambda} d_{\lambda,\lambda_0}(q) P_\lambda(X;q)\, u^{\lambda_0}$$

où la somme est sur toutes les partitions $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et les entiers $\lambda_0 \geq \lambda_1$. Pour toute filtration $\mathcal{F}$ de X (voir (4.14)), soit

$$d_{\mathcal{F}}(q) := \prod_{i=1}^{k} \psi_{|F_i \setminus F_{i-1}|}(q), \quad \text{où} \quad \psi_n(q) := (q)_n \prod_{j=1}^{[n/2]} (1-q^{2j})^{-1}.$$

Ainsi, comme $r_j = m_{\mu_j}(\lambda)$, $j \geq 1$, nous avons

$$\begin{aligned} d_{\lambda,\, \lambda_0}(q) &= d_{\mathcal{F}}(q) \left(\chi(\nu_k = 0)\psi_{|F_k \setminus F_{k-1}|}(q) + \chi(\nu_k \neq 0)\right)^{-1} \\ &\qquad \times \left(\chi(\nu_0 = 0)\psi_{|F_1|}(q) + \chi(\nu_0 \neq 0)\right)^{-1}. \end{aligned}$$

D'après (4.15) nous avons

$$F(u) = \sum_{\mathcal{F} \in F(X)} \pi_{\mathcal{F}} \mathcal{B}_{\mathcal{F}}(X, u),$$

où

$$\mathcal{B}_{\mathcal{F}}(X,u) := d_{\mathcal{F}}(q) \prod_j \left[\frac{p(F_j)u}{1-p(F_j)u} + \frac{\chi(F_j = X)}{\psi_{|F_j \setminus F_{j-1}|}(q)} + \frac{\chi(F_j = \emptyset)}{\psi_{|F_1|}(q)} \right].$$

Nous en déduisons que $F(u)$ est une fonction rationnelle en u et peut être écrite comme suit :

$$F(u) = \frac{c(\emptyset)}{1-u} + \sum_{\substack{Y \subseteq X \\ |Y|>0}} \frac{c(Y)}{1-p(Y)u}.$$

En extrayant le coefficient de u^k dans l'identité précédente, nous obtenons

$$\sum_{\lambda_1 \leq k} d_{\lambda,k}(q) P_\lambda(X,q) = \sum_{Y \subseteq X} c(Y) p(Y)^k. \tag{4.19}$$

Il reste à déterminer les résidus. En écrivant $\lambda_0 = \lambda_1 + r$ où $r \geq 0$, nous voyons que :

$$\begin{aligned} F(u) &= \sum_\lambda d_\lambda(q) P_\lambda(X,q) u^{\lambda_1} \sum_{r \geq 0} \frac{u^r}{\chi(r=0)\psi_{m_{\lambda_1}}(q) + \chi(r \neq 0)} \\ &= \sum_\lambda d_\lambda(q) P_\lambda(X,q) u^{\lambda_1} \left(\frac{u}{1-u} + \frac{1}{\psi_{m_{\lambda_1}}(q)} \right), \end{aligned}$$

et nous déduisons de (4.10)

$$c(\emptyset) = (F(u)(1-u))\,|_{u=1} = \Phi_q(X; q, 1). \tag{4.20}$$

Pour déterminer les autres résidus, soient $Y' = X \setminus Y$ et pour $Y = F_t$, les deux filtrations :

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{F}_1 & : & \emptyset \subsetneq -(Y \setminus F_{t-1}) \subsetneq \cdots \subsetneq -(Y \setminus F_1) \subsetneq -Y, \\ \mathcal{F}_2 & : & \emptyset \subsetneq F_{t+1} \setminus Y \subsetneq \cdots \subsetneq F_{k-1} \setminus Y \subsetneq Y'. \end{array}$$

Alors en écrivant $v = p(Y)u$ et $d_{\mathcal{F}}(q) = d_{\mathcal{F}_1}(q) \times d_{\mathcal{F}_2}(q)$, nous avons

$$\pi_{\mathcal{F}}(X) = \pi_{\mathcal{F}_1}(-Y)\pi_{\mathcal{F}_2}(Y') \prod_{x_i \in Y, x_j \in Y'} \frac{1 - q x_i^{-1} x_j}{1 - x_i^{-1} x_j},$$

et $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}(X,\, u)(1 - p(Y)u)$ peut s'écrire

$$\begin{array}{l} \mathcal{B}_{\mathcal{F}_1}(-Y,\, v)\mathcal{B}_{\mathcal{F}_2}(Y',\, v)(1-v) \left(\dfrac{v}{1-v} + \dfrac{\chi(Y = X)}{\psi_{|Y \setminus F_{t-1}|}} \right) \\ \times \left(\dfrac{v}{1-v} + \dfrac{1}{\psi_{|Y \setminus F_{t-1}|}(q)} \right)^{-1} \left(\dfrac{v}{1-v} + \dfrac{1}{\psi_{|F_{t+1} \setminus Y|}(q)} \right)^{-1}. \end{array}$$

En récrivant (4.20) comme suit :

$$\left[\sum_{\mathcal{F}} \pi_{\mathcal{F}} \mathcal{B}_{\mathcal{F}}(X,\, u)(1-u) \right]_{u=1} = \Phi_q(X; q, 1),$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} c(Y) &= \left[\sum_{\mathcal{F}} \pi_{\mathcal{F}} \mathcal{B}_{\mathcal{F}}(X; u)(1 - p(Y)u) \right]_{u = p(-Y)} \\ &= \Phi_q(-Y; q, 1)\Phi_q(Y'; q, 1) \prod_{x_i \in Y, x_j \in Y'} \frac{1 - q x_i^{-1} x_j}{1 - x_i^{-1} x_j}. \end{aligned}$$

Finalement, la démonstraiton est complète en substituant les valeurs de $c(Y)$ dans (4.19).

4.2.5 Premières conséquences

Le corollaire suivant du théorème 4.2 sera utile dans la suite, et il montre en lui-même le lien direct entre les polynômes de Hall-Littlewood et les q-identités.

Théorème 4.3 *Pour $k \geq 1$,*

$$\sum_{l(\lambda)\leq k} \frac{(q;q^2)_\lambda}{(q;q^2)_{\lambda_k}} z^{|\lambda|} q^{n(2\lambda)} \begin{bmatrix} n \\ 2\lambda \end{bmatrix} = (z;q^2)_n \sum_{r\geq 0} z^{kr} q^{(k+1)\binom{2r}{2}} \times \begin{bmatrix} n \\ 2r \end{bmatrix} \frac{1-zq^{4r-1}}{(zq^{2r-1})_{n+1}}. \tag{4.21}$$

$$\sum_{l(\lambda)\leq k} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{(q)_{\lambda_i-\lambda_{i+1}}}{(q^2;q^2)_{[(\lambda_i-\lambda_{i+1})/2]}} z^{|\lambda|} q^{n(\lambda)} \begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix} = (z^2;q^2)_n \sum_{r\geq 0} z^{kr} q^{r+(k+1)\binom{r}{2}} \times \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \frac{(1-zq^{-1})(1-z^2q^{2r-1})(1-zq^n)}{(1-zq^{r-1})(1-zq^r)(z^2q^{r-1})_{n+1}}. \tag{4.22}$$

Démonstration. Nous savons [48, p. 213] que si $x_i = z^{1/2}q^{i-1}$ $(1 \leq i \leq n)$ alors

$$P_{\lambda'}(X,q) = z^{|\lambda|/2} q^{n(\lambda)} \begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix}. \tag{4.23}$$

D'après (4.13) nous avons

$$c_{(2\lambda)',k}(q) = \frac{(q;q^2)_\lambda}{(q;q^2)_{\lambda_k}}.$$

En remplaçant λ par 2λ et en prenant les partitions conjuguées dans le membre de gauche de (4.11), nous obtenons le membre de gauche de (4.21). D'autre part, pour tout $\xi \in \{\pm 1\}^n$ tel que le nombre de $\xi_i = -1$ soit r, $0 \leq r \leq n$, nous avons

$$\Phi_q(X^\xi;0,0) = \Psi_q(X^\xi;-1) \prod_i (1-x_i^{2\xi_i}), \tag{4.24}$$

ce qui, d'après la définition de Ψ_q, vaut manifestement 0 sauf si $\xi \in \{-1\}^r \times \{1\}^{n-r}$. Maintenant, dans ce dernier cas, nous avons $\prod_i x_i^{k(1-\xi_i)/2} = z^{kr/2} q^{k\binom{r}{2}}$,

$$\prod_{i=1}^n (1-x_i^{2\xi_i}) = (-1)^r z^{-r} q^{-2\binom{r}{2}} (z;q^2)_n, \tag{4.25}$$

et [61, p. 476] :

$$\Psi_q(X^\xi; -1) = (-1)^r z^r q^{3\binom{r}{2}} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \frac{1 - zq^{2r-1}}{(zq^{r-1})_{n+1}}. \tag{4.26}$$

En substituant ceci dans le membre de droite de (4.11) et en remplaçant r par $2r$ nous obtenons le membre de droite de (4.21).

Puis, par (4.13) nous avons

$$d_{\lambda',k}(q) = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{(q)_{\lambda_i - \lambda_{i+1}}}{(q^2;q^2)_{[(\lambda_i - \lambda_{i+1})/2]}}.$$

De même, dans (4.12), en remplaçant x_i par zq^{i-1} $(1 \le i \le n)$ et en évoquant (4.23) nous voyons que le membre de gauche de (4.12) devient celui de (4.22). De plus, comme

$$\Phi_q(X^\xi; q, 1) = \Phi_q(X^\xi; 0, 0) \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - qx_i^{\xi_i}}{1 - x_i^{\xi_i}},$$

par (4.24), ceci vaut 0 sauf si $\xi \in \{-1\}^r \times \{1\}^{n-r}$ pour un certain r, $0 \le r \le n$. Dans ce dernier cas, nous avons

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1 - qx_i^{\xi_i}}{1 - x_i^{\xi_i}} = q^r \frac{1 - zq^{-1}}{1 - zq^{r-1}} \frac{1 - zq^n}{1 - zq^r}, \tag{4.27}$$

et en faisant appel à (4.24), (4.25) et (4.26) avec z remplacé par z^2,

$$\Phi_q(X^\xi; 0, 0) = q^{\binom{r}{2}} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} (1 - z^2 q^{2r-1}) \frac{(z^2;q^2)_n}{(z^2 q^{r-1})_{n+1}}. \tag{4.28}$$

En plongeant ceci dans le membre de droite de (4.12), nous obtenons celui de (4.22). □

Lorsque $n \to +\infty$, comme $\begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix} \to \frac{1}{(q)_\lambda}$, les équations (4.21) et (4.22) deviennent respectivement :

$$\sum_{l(\lambda) \le k} \frac{z^{|\lambda|} q^{n(2\lambda)}}{(q^2;q^2)_\lambda (q;q^2)_{\lambda_k}} = (z;q^2)_\infty \sum_{r \ge 0} \frac{z^{kr} q^{(k+1)\binom{2r}{2}}}{(q)_{2r} (zq^{2r-1})_\infty} (1 - zq^{4r-1}), \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{l(\lambda)\le k} \frac{z^{|\lambda|}q^{n(\lambda)}}{(q)_{\lambda_k}\prod_{i=1}^{k-1}(q^2;q^2)_{[(\lambda_i-\lambda_{i+1})/2]}} \\ &= (z^2;q^2)_\infty \sum_{r\ge 0} z^{kr}q^{r+(k+1)\binom{r}{2}} \frac{1-zq^{-1}}{(q)_r(1-zq^{r-1})}\frac{1-z^2q^{2r-1}}{(1-zq^r)(z^2q^{r-1})_\infty}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

De plus, en posant $z=q$ dans (4.29) et (4.30) nous déduisons respectivement après utilisation du triple produit de Jacobi (4.2) les deux multianalogues de type Rogers-Ramanujan suivants :

$$\sum_{l(\lambda)\le k} \frac{q^{2n_2(\lambda)}}{(q;q^2)_{\lambda_k}(q^2;q^2)_\lambda} = \prod_n (1-q^n)^{-1} \tag{4.31}$$

où $n \equiv \pm(2k+1),\ \pm(2k+3), \pm 2, \pm 4,\ \ldots, \pm 4k \pmod{8k+8}$ et

$$\sum_{l(\lambda)\le k} \frac{q^{|\lambda|+n(\lambda)}}{(q)_{\lambda_k}\prod_{i=1}^{k-1}(q^2;q^2)_{[(\lambda_i-\lambda_{i+1})/2]}} = \frac{1}{(q;q^2)_\infty}. \tag{4.32}$$

Le paragraphe suivant a pour but de donner d'autres identités de ce type. En fait, nous sommes parvenus à retrouver (4.31) ainsi que 5 autres identités du même type, à partir d'une même identité générale sur les q-séries, inspirée par (4.11).

4.3 Multianalogues de type Rogers-Ramanujan

4.3.1 Une identité générale

L'identité suivante est la q-identité clé qui permettra de déduire les identités de type Rogers-Ramanujan.

Théorème 4.4 *Pour $k \ge 1$,*

$$\begin{aligned} \sum_{l(\lambda)\le k} z^{|\lambda|}q^{n(2\lambda)} \frac{(a,\,b;q^{-2})_{\lambda_1}}{(q^2;q^2)_\lambda(q;q^2)_{\lambda_k}} &= \frac{(z;q^2)_\infty}{(abzq;q^2)_\infty} \\ \times \sum_{r\ge 0} z^{kr}q^{(k+1)\binom{2r}{2}} &\frac{(a,b;q^{-2})_r(aq^{2r+1}z,bq^{2r+1}z;q^2)_\infty}{(q)_{2r}(zq^{2r-1})_\infty}(1-zq^{4r-1}). \end{aligned} \tag{4.33}$$

Cette identité se démontre indépendemment de l'identité (4.11), même si celle-ci fût une source d'inspiration primordiale pour obtenir (4.33). De plus, sa démonstration, reportée au paragraphe suivant, même si elle se fait uniquement par l'approche élémentaire des q-séries, fait appel à la technique de décomposition en éléments simples de fonctions génératrices vue déjà plusieurs fois pour les polynômes de Hall-Littlewood.

Nous verrons par la suite, lors de la démonstraion de (4.33), qu'il est aussi possible de démontrer le théorème 4.3 de manière directe par l'approche élémentaire des q-séries, et sans utiliser le théorème 4.2.

Mais nous donnons d'abord les identités obtenues à partir de (4.33), ainsi que leurs versions élémentaires correspondant au cas où $k = 1$, qui nous donnent six identités de type Rogers-Ramanujan.

Remarque. Nous avons tenté d'obtenir une identité de type (4.33) en nous inspirant de (4.12), mais nous ne sommes pas parvenu à contourner les difficultés rencontrées.

4.3.2 Applications

Pour toute partition λ, soit $n_2(\lambda) := \sum_i \lambda_i^2$. Le théorème 4.4 a pour conséquences les identités suivantes (remarquons que (4.34) n'est autre que (4.31)) :

Théorème 4.5 *Pour* $k \geq 1$,

$$\sum_{l(\lambda)\leq k} \frac{q^{2n_2(\lambda)}}{(q;q^2)_{\lambda_k}(q^2;q^2)_\lambda} = \prod_n (1-q^n)^{-1} \tag{4.34}$$

où $n \equiv \pm(2k+1),\ \pm(2k+3), \pm 2, \pm 4, \ldots, \pm 4k \pmod{8k+8}$ *;*

$$\sum_{l(\lambda)\leq k} \frac{q^{2n_2(\lambda)-2\lambda_1}}{(q;q^2)_{\lambda_k}(q^2;q^2)_\lambda}(1-q^{2\lambda_1}) = \frac{(q^{2k-1},\ q^{6k+9};\ q^{8k+8})_\infty}{\prod_n (1-q^n)} \tag{4.35}$$

où $n \equiv \pm(2k+5), \pm 2, \ldots, \pm 4k, \pm(4k+2) \pmod{8k+8}$ *;*

$$\sum_{l(\lambda)\le k} \frac{q^{2n_2(\lambda)-\lambda_1^2}}{(q;q^2)_{\lambda_k}(q^2;q^2)_\lambda}(-q;q^2)_{\lambda_1} = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}(q^{4k+2},\ -q^{2k}, -q^{2k+2};\ q^{4k+2})_\infty; \tag{4.36}$$

$$\sum_{l(\lambda)\le k} \frac{q^{2n_2(\lambda)-\lambda_1^2-\lambda_1}}{(q;q^2)_{\lambda_k}(q^2;q^2)_\lambda}(-1;q^2)_{\lambda_1}(1-q^{2\lambda_1}) = \frac{(-q^2;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}(q^{4k+2},\ -q^{2k-1},\ -q^{2k+3};\ q^{4k+2})_\infty; \tag{4.37}$$

$$\sum_{l(\lambda)\le k} \frac{q^{2n_2(\lambda)-2\lambda_1^2+\lambda_1}}{(q;q^2)_{\lambda_k}(q^2;q^2)_\lambda}(-1;q^2)_{\lambda_1}(-q;q^2)_{\lambda_1} = \frac{(-q)_\infty}{(q)_\infty}(q^{4k}, -q^{2k}, -q^{2k}; q^{4k})_\infty; \tag{4.38}$$

$$\sum_{l(\lambda)\le k} \frac{q^{2n_2(\lambda)-\lambda_1^2+\lambda_1}}{(q;q^2)_{\lambda_k}(q^2;q^2)_\lambda}(-1;q^2)_{\lambda_1} = \frac{(-q^2;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}(q^{4k+2},\ -q^{2k+1},\ -q^{2k+1};\ q^{4k+2})_\infty. \tag{4.39}$$

Démonstration. Pour $z=q$, nous pouvons récrire (4.33) comme suit :

$$\begin{aligned}&\sum_{l(\lambda)\le k} q^{2n_2(\lambda)-2\lambda_1^2+2\lambda_1}\frac{(a^{-1},\ b^{-1};\ q^2)_{\lambda_1}}{(q^2;\ q^2)_\lambda(q;\ q^2)_{\lambda_k}}(ab)^{\lambda_1} \\ &= \frac{(aq^2, bq^2;\ q^2)_\infty}{(q^2, abq^2;\ q^2)_\infty}\left(1+\sum_{r\ge 1} q^{2kr^2+r}\frac{(a^{-1}, b^{-1};\ q^2)_r}{(aq^2, bq^2;\ q^2)_r}(ab)^r(1+q^{2r})\right).\end{aligned} \tag{4.40}$$

Pour (4.34), faisons tendre a et b vers 0 dans (4.40), ce qui donne

$$\sum_{l(\lambda)\le k} \frac{q^{2n_2(\lambda)}}{(q;q^2)_{\lambda_k}(q^2;q^2)_\lambda} = (q^2;q^2)_\infty^{-1} J(-q^{2k+1},\ q^{4k+4}).$$

Nous déduisons ensuite le membre de droite de (4.34) à l'aide de (4.2) après quelques manipulations simples.

Pour (4.35), soit $a \to 0$ dans (4.40) et multiplions des deux côtés par $1 - q^{-2}$. En identifiant les coefficients en b nous obtenons :

$$\sum_{l(\lambda)\le k} \frac{q^{2n_2(\lambda)-2\lambda_1}}{(q;q^2)_{\lambda_k}(q^2;q^2)_\lambda}(1-q^{2\lambda_1}) = (q^2;q^2)_\infty^{-1}\, J(-q^{2k-1},\, q^{4k+4}).$$

Le résultat se déduit ensuite de (4.2) après de simples manipulations.

L'identité (4.36) se déduit de (4.40) en posant $a = -q^{-1}$ et $b \to 0$ et ensuite en appliquant (4.2) avec q remplacé par q^{4k+2} et $x = -q^{2k}$.

Pour (4.37), choisissons $a = -1$ dans (4.40) et multiplions les deux côtés par $1 - q^{-2}$, puis identifions le coefficient en b. L'identité se déduit alors en appliquant (4.2) avec q remplacé par q^{4k+2} et $x = -q^{2k-1}$.

L'identité (4.38) se déduit de (4.40) en prenant $a = -q^{-1}$ et $b = -1$ et en appliquant ensuite (4.2) avec q remplacé par q^{4k} et $x = -q^{2k}$. Pour (4.39), choisissons $a = -1$ et $b \to 0$ dans (4.40). L'identité se déduit en appliquant (4.2) avec q remplacé par q^{4k+2} et $x = -q^{2k+1}$. $\square$

Lorsque $k = 1$ les six identités ci-dessus deviennent respectivement les identités de type Rogers-Ramanujan suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2}}{(q)_{2n}} = \prod_{\substack{n=1\\ n\equiv\pm2,\pm3,\pm4,\pm5 \pmod{16}}}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}, \tag{4.41}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2+2n}}{(q)_{2n+1}} = \prod_{\substack{n=1\\ n\equiv\pm1,\pm4,\pm6,\pm7 \pmod{16}}}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}, \tag{4.42}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2}\frac{(-q;q^2)_n}{(q)_{2n}} = \frac{(q^6,q^6,q^{12};\,q^{12})_\infty}{(q)_\infty}, \tag{4.43}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2+n}\frac{(-q^2;q^2)_n}{(q)_{2n+1}} = \frac{(q^3,q^9,q^{12};\,q^{12})_\infty}{(q)_\infty}, \tag{4.44}$$

$$1+2\sum_{n\ge1} q^n\frac{(-q)_{2n-1}}{(q)_{2n}} = \frac{(q^4,\,-q^2,\,-q^2;\,q^4)_\infty}{(q)_\infty(q;q^2)_\infty}, \tag{4.45}$$

$$1+2\sum_{n\ge1} q^{n^2+n}\frac{(-q^2;q^2)_{n-1}}{(q)_{2n}} = \frac{(q^6,-q^3,-q^3;\,q^6)_\infty}{(q)_\infty\,(-q;q^2)_\infty}. \tag{4.46}$$

Remarquons que (4.41), (4.42), (4.43) et (4.44) sont déjà connues, elles correspondent respectivement aux équations (39), (38), (29) et (28) dans la liste de Slater [57]. L'identité (4.45) peut se déduire de l'identité de q-Kummer [24, p. 236] avec la substitution $q \leftarrow q^2$, $a=-1$ et $b=-q$, mais (4.46) semble être nouvelle.

4.4 Approche élémentaire des q-identités

4.4.1 Préliminaires

Rappelons que la formule binomiale a le q-analogue suivant [4, pp. 36-37] :

$$(z)_n = \sum_{m=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} (-1)^m z^m q^{m(m-1)/2}. \tag{4.47}$$

Comme d'après (2.1) les fonctions symétriques élémentaires $e_r(X)$ $(0 \le r \le n)$ ont pour fonction génératrice

$$(1+x_1 z)(1+x_2 z)\cdots(1+x_n z) = \sum_{r=0}^{n} e_r(X) z^r,$$

nous déduisons de (4.47) que pour tous les entiers $i \ge 0$ et $j \ge 1$:

$$e_r(q^i,\, q^{i+1},\, \ldots,\, q^{i+j-1}) = q^{ir} e_r(1,\, q,\, \ldots,\, q^{j-1}) = q^{ir+\binom{r}{2}} \begin{bmatrix} j \\ r \end{bmatrix}. \tag{4.48}$$

Le lemme suivant peut se déduire de la formule de Pieri (4.1) pour les polynômes de Hall-Littlewood, mais notre démonstration est élémentaire.

Lemme 4.6 *Pour toute partition μ telle que $\mu_1 \le n$ on a*

$$q^{\binom{m}{2}+n(\mu)} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ \mu \end{bmatrix} = \sum_{\lambda} q^{n(\lambda)} \begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix} \prod_{i \ge 1} \begin{bmatrix} \lambda_i - \lambda_{i+1} \\ \lambda_i - \mu_i \end{bmatrix}, \tag{4.49}$$

où la somme est sur toutes les partitions λ telles que λ/μ soit une m bande horizontale.

Démonstration. Soient $l := l(\mu)$ et $\mu_0 = n$. Partitionnons l'ensemble $\{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ en $l+1$ sous-ensembles :

$$X_i := \{j \mid 1 \le j \le n \text{ et } \mu'_j = i\} = \{j \mid \mu_{i+1}+1 \le j \le \mu_i\}, \qquad 0 \le i \le l.$$

En utilisant (4.48) pour extraire les coefficients de z^m dans l'identité suivante :

$$(1+z)(1+zq)\cdots(1+zq^{n-1}) = \prod_{i=0}^{l}\prod_{j\in X_i}(1+zq^{j-1}),$$

nous obtenons

$$q^{\binom{m}{2}}\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \sum_{\mathbf{r}}\prod_{i=0}^{l} q^{r_i\,\mu_{i+1}+\binom{r_i}{2}}\begin{bmatrix} \mu_i-\mu_{i+1} \\ r_i \end{bmatrix}, \tag{4.50}$$

où $\mathbf{r} = (r_0, r_1, \ldots, r_l)$ est une composition de m. Pour toute composition $\mathbf{r}$ de ce type, nous définissons une partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{l+1})$ par

$$\lambda_i := \mu_i + r_{i-1}, \qquad 1 \le i \le l+1.$$

Alors λ/μ est une m bande horizontale. Donc (4.50) peut s'écrire

$$q^{\binom{m}{2}}\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \sum_{\lambda}\prod_{i=0}^{l} q^{(\lambda_{i+1}-\mu_{i+1})\mu_{i+1}+\binom{\lambda_{i+1}-\mu_{i+1}}{2}}\begin{bmatrix} \mu_i-\mu_{i+1} \\ \mu_i-\lambda_{i+1} \end{bmatrix}, \tag{4.51}$$

où la somme est sur toutes les partitions λ telles que λ/μ soit une m bande horizontale. Maintenant, comme

$$(\lambda_{i+1}-\mu_{i+1})\mu_{i+1} + \binom{\lambda_{i+1}-\mu_{i+1}}{2} + \binom{\mu_{i+1}}{2} = \binom{\lambda_{i+1}}{2}, \qquad 0 \le i \le l,$$

et comme $\begin{bmatrix} n \\ \mu \end{bmatrix}\prod_{i=0}^{l}\begin{bmatrix} \mu_i-\mu_{i+1} \\ \mu_i-\lambda_{i+1} \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix}\prod_{i\ge 1}\begin{bmatrix} \lambda_i-\lambda_{i+1} \\ \lambda_i-\mu_i \end{bmatrix}$ sont égaux car ils valent tous les deux

$$\frac{(q)_n}{(q)_{n-\lambda_1}(q)_{\lambda_1-\mu_1}(q)_{\mu_1-\lambda_2}\cdots(q)_{\mu_l}},$$

en multipliant (4.51) par $q^{n(\mu)}\begin{bmatrix} n \\ \mu \end{bmatrix}$ nous obtenons (4.49). □

Lemme 4.7 *On a les identités suivantes :*

$$\sum_{\lambda} z^{|\lambda|}q^{2n(\lambda)}\begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix} = \frac{1}{(z)_n}, \tag{4.52}$$

$$\sum_{\lambda} z^{|\lambda|}q^{n(\lambda)}\begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix} = \frac{(-z)_n}{(z^2)_n}, \tag{4.53}$$

$$\sum_{\lambda}(q,q^2)_\lambda\, z^{|\lambda|}q^{n(2\lambda)}\begin{bmatrix} n \\ 2\lambda \end{bmatrix} = \frac{(z;q^2)_n}{(z)_n}. \tag{4.54}$$

Démonstration. L'identité (4.52) est due à Hall [30] et peut se prouver en utilisant l'identité q-binomiale [49]. Stembridge [61] a démontré (4.53) en utilisant aussi l'identité q-binomiale. Maintenant, en écrivant

$$\frac{(z^2;\, q^2)_n}{(z^2)_n} = (z)_n \, \frac{(-z)_n}{(z^2)_n}$$

et en appliquant successivement (4.47), (4.53) et (4.49) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{(z^2;\, q^2)_n}{(z^2)_n} &= \sum_{\mu,m} (-1)^m z^{m+|\mu|} q^{\binom{m}{2}+n(\mu)} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ \mu \end{bmatrix} \\
&= \sum_{\mu,m} (-1)^m z^{m+|\mu|} \sum_{\substack{\lambda \\ \lambda/\mu \text{ m-b.h.}}} \prod_{i \geq 1} \begin{bmatrix} \lambda_i - \lambda_{i+1} \\ \lambda_i - \mu_i \end{bmatrix} q^{n(\lambda)} \begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix} \\
&= \sum_{\lambda} z^{|\lambda|} q^{n(\lambda)} \begin{bmatrix} n \\ \lambda \end{bmatrix} \prod_{i \geq 1} \sum_{r_i \geq 0} (-1)^{r_i} \begin{bmatrix} \lambda_i - \lambda_{i+1} \\ r_i \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

L'identité (4.54) se déduit alors de

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} = \begin{cases} (q;\, q^2)_n & \text{si} \quad m = 2n, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

qui se démontre par exemple en utilisant encore l'identité q-binomiale [4, p.36]. □

Remarque. Lorsque $n \to \infty$ les identités précédentes deviennent respectivement les suivantes :

$$\sum_{\lambda} \frac{z^{|\lambda|} q^{2n(\lambda)}}{(q)_\lambda} = \frac{1}{(z)_\infty}, \tag{4.55}$$

$$\sum_{\lambda} \frac{z^{|\lambda|} q^{n(\lambda)}}{(q)_\lambda} = \frac{(-z)_\infty}{(z^2)_\infty}, \tag{4.56}$$

$$\sum_{\lambda} \frac{z^{|\lambda|} q^{n(2\lambda)}}{(q^2; q^2)_\lambda} = \frac{1}{(zq; q^2)_\infty}. \tag{4.57}$$

Remarquons aussi que (4.55) et (4.57) sont en réalité équivalentes puisque cette dernière peut être déduite de (4.55) en remplaçant q par q^2 et z par zq.

L'identité suivante est la q-somme de Gauss [24, p.10] due à Heine :

$$ {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ x \end{matrix}; q; \frac{x}{ab}\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(q)_n(x)_n}\left(\frac{x}{ab}\right)^n = \frac{(x/a,\ x/b)_\infty}{(x, x/ab)_\infty}. \tag{4.58} $$

Lemme 4.8 *On a*

$$ \sum_\lambda z^{|\lambda|} q^{n(2\lambda)} \frac{(a,\ b; q^{-2})_{\lambda_1}}{(q^2;q^2)_\lambda} = \frac{(azq,\ bzq; q^2)_\infty}{(zq,\ abzq; q^2)_\infty}. \tag{4.59} $$

Démonstration. En remplaçant z par z/q et q par $q^{1/2}$, l'identité est équivalente à

$$ \sum_\lambda z^{|\lambda|} q^{2n(\lambda)} \frac{(a,\ b; q^{-1})_{\lambda_1}}{(q)_\lambda} = \frac{(az,\ bz)_\infty}{(z,\ abz)_\infty}. \tag{4.60} $$

Maintenant, en écrivant $k = \lambda_1$ et $\mu = (\lambda_2, \lambda_3, \ldots)$, et en utilisant (4.52) nous obtenons

$$ \begin{aligned} \sum_\lambda z^{|\lambda|} q^{2n(\lambda)} \frac{(a,\ b; q^{-1})_{\lambda_1}}{(q)_\lambda} &= \sum_{k\geq 0} z^k q^{k(k-1)} \frac{(a, b; q^{-1})_k}{(q)_k} \sum_\mu z^{|\mu|} q^{2n(\mu)} \begin{bmatrix} k \\ \mu \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k\geq 0} (abz)^k \frac{(a^{-1}, b^{-1})_k}{(q)_k(z)_k}. \end{aligned} $$

L'identité (4.60) se déduit alors de (4.58). □

Remarque. La formule (4.60) a été déduite dans [61] d'une formule plus générale pour les polynômes de Hall-Littlewood.

4.4.2 Démonstration élémentaire du théorème 4.3

Nous allons simplement démontrer (4.21) pour n pair et nous laisserons au lecteur intéressé le cas où n est impair et (4.22) car les démonstrations sont vraiment similaires. Considérons la fonction génératrice du membre de gauche de (4.21) pour $n = 2r$:

$$ \begin{aligned} \varphi(u) &:= \sum_{k\geq 0} u^k \sum_{l(\lambda)\leq k} \frac{(q;q^2)_\lambda}{(q;q^2)_{\lambda_k}} z^{|\lambda|} q^{n(2\lambda)} \begin{bmatrix} 2r \\ 2\lambda \end{bmatrix} \\ &= \sum_\lambda u^{l(\lambda)} z^{|\lambda|} q^{n(2\lambda)} (q;q^2)_\lambda \begin{bmatrix} 2r \\ 2\lambda \end{bmatrix} \sum_{k\geq 0} \frac{u^k}{(q;q^2)_{\lambda_{k+l(\lambda)}}} \\ &= \sum_\lambda u^{l(\lambda)} z^{|\lambda|} q^{n(2\lambda)} (q;q^2)_\lambda \begin{bmatrix} 2r \\ 2\lambda \end{bmatrix} \left(\frac{u}{1-u} + \frac{1}{(q;q^2)_{\lambda_{l(\lambda)}}}\right). \end{aligned} \tag{4.61} $$

Mais chaque partition λ dont les parts sont majorées par r peut être codée par une paire de suites $\nu=(\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_l)$ et $\mathbf{m}=(m_0,\ldots,m_l)$ telles que $\lambda=(\nu_0^{m_0},\ldots,\nu_l^{m_l})$, où $r=\nu_0>\nu_1>\cdots>\nu_l>0$ et ν_i a pour multiplicité $m_i\geq 1$ pour $1\leq i\leq l$ et $\nu_0=r$ a pour multiplicité $m_0\geq 0$. En utilisant la notation :

$$<\alpha>=\frac{\alpha}{1-\alpha},\quad u_i=z^iq^{i(2i-1)}\quad \text{pour}\quad i\geq 0,$$

nous pouvons récrire (4.61) comme suit :

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \sum_\nu (q;q^2)_\nu \begin{bmatrix}2r\\2\nu\end{bmatrix}\left(<u>+\frac{1}{(q;q^2)_{\nu_l}}\right)\\ &\quad\times\sum_{\mathbf{m}}\left((u_ru)^{m_0}+\frac{\chi(m_0=0)}{(q;q^2)_{r-\nu_1}}\right)\prod_{i=1}^l(u_{\nu_i}u)^{m_i}\\ &= \sum_\nu\frac{(q)_{2r}}{(q^2;q^2)_\nu}B_\nu, \end{aligned}\tag{4.62}$$

où la somme est sur toutes les partitions strictes $\nu=(\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_l)$ et

$$B_\nu:=\left(<u>+\frac{1}{(q;q^2)_{\nu_l}}\right)\left(<u_ru>+\frac{1}{(q;q^2)_{r-\nu_1}}\right)\prod_{i=1}^l<u_{\nu_i}u>.$$

Donc $\varphi(u)$ est une fraction rationnelle dont les pôles simples sont situés en u_p^{-1} pour $0\leq p\leq r$. Soit $b_p(z,r)$ le résidu correspondant de $\varphi(u)$ en u_p^{-1} pour $0\leq p\leq r$. Alors nous déduisons de (4.62)

$$b_p(z,r)=\sum_\nu\frac{(q)_{2r}}{(q^2;q^2)_\nu}\left[B_\nu(1-u_pu)\right]_{u=u_p^{-1}}.\tag{4.63}$$

Nous allons d'abord considérer les cas où $p=0$ ou r. En utilisant (4.61) et (4.54) nous avons

$$b_0(z,r)=\left[\varphi(u)(1-u)\right]_{u=1}=\frac{(z;q^2)_{2r}}{(z)_{2r}}.\tag{4.64}$$

Maintenant, par (4.62) et (4.63) nous avons

$$b_0(z,r)=\sum_\nu\frac{(q)_{2r}}{(q^2;q^2)_\nu}\left(<u_r>+\frac{1}{(q;q^2)_{r-\nu_1}}\right)\prod_{i=1}^l<u_{\nu_i}>,\tag{4.65}$$

et

$$b_r(z,r) = \sum_{\nu} \frac{(q)_{2r}}{(q^2;q^2)_\nu} \left(< 1/u_r > + \frac{1}{(q;q^2)_{\nu_l}} \right) \prod_{i=1}^{l} < u_{\nu_i}/u_r >, \qquad (4.66)$$

qui, en posant $\mu_i = r - \nu_{l+1-i}$ pour $1 \le i \le l$ et $\mu_0 = r$, peut s'écrire

$$b_r(z,r) = \sum_{\mu} \frac{(q)_{2r}}{(q^2;q^2)_\mu} \left(< 1/u_r > + \frac{1}{(q;q^2)_{r-\mu_1}} \right) \prod_{i=1}^{l} < u_{r-\mu_i}/u_r > . \quad (4.67)$$

Nous comparons (4.67) et (4.65) et nous voyons que $b_r(z,r)$ est égal à $b_0(z,r)$ avec z remplacé par $z^{-1}q^{-2(2r-1)}$. Nous déduisons de (4.64)

$$b_r(z,r) = b_0(z^{-1}q^{-2(2r-1)}, r) = (z;q^2)_{2r} q^{r(2r-1)} \frac{1 - zq^{4r-1}}{(zq^{2r-1})_{2r+1}}. \qquad (4.68)$$

Considérons maintenant le cas où $0 < p < r$. Clairement, pour chaque partition ν, le sommant correspondant dans (4.63) est non nul seulement si $\nu_j = p$ pour un certain j, $0 \le j \le r$. De plus, chacune de ces partitions ν peut être décomposée en deux partitions strictes $\rho = (\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{j-1})$ et $\sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{l-j})$ telles que $\rho_i = \nu_i - p$ pour $0 \le i \le j-1$ et $\sigma_s = \nu_{j+s}$ pour $0 \le s \le l-j$. Donc nous pouvons écrire (4.63) comme suit :

$$b_p(z,r) \quad = \quad \begin{bmatrix} 2r \\ 2p \end{bmatrix} \sum_{\rho} \frac{(q)_{2r-2p}}{(q^2;q^2)_\rho} F_\rho(p) \times \sum_{\sigma} \frac{(q)_{2p}}{(q^2;q^2)_\sigma} G_\sigma(p),$$

où pour $\rho = (\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_l)$ avec $\rho_0 = r - p$,

$$F_\rho(p) := \left(< u_r/u_p > + \frac{1}{(q;q^2)_{r-p-\rho_1}} \right) \prod_{i=1}^{l(\rho)} < u_{\rho_i+p}/u_p >,$$

et pour $\sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_l)$ avec $\sigma_0 = p$,

$$G_\sigma(p) := \left(< 1/u_p > + \frac{1}{(q;q^2)_{\sigma_l}} \right) \prod_{i=1}^{l(\sigma)} < u_{\sigma_i}/u_p > .$$

En comparant avec (4.65) et (4.67) et en utilisant (4.64) et (4.68) nous obtenons

$$\begin{aligned} b_p(z,r) &= \begin{bmatrix} 2r \\ 2p \end{bmatrix} b_0(zq^{4p}, r-p)\, b_p(z,p) \\ &= \begin{bmatrix} 2r \\ 2p \end{bmatrix} (z;q^2)_{2r} q^{\binom{2r}{2p}} \frac{1 - zq^{4p-1}}{(zq^{2p-1})_{2r+1}}. \end{aligned}$$

Finalement, en extrayant les coefficients de u^k dans l'équation

$$\varphi(u) = \sum_{p=0}^{r} \frac{b_p(z,r)}{1-u_p u},$$

et en utilisant les valeurs de $b_p(z,r)$ nous obtenons (4.21).

4.4.3 Démonstration du théorème 4.4

Considérons la fonction génératrice du membre de gauche de (4.33) :

$$\begin{aligned}
\varphi_{ab}(u) \quad &:= \sum_{k\geq 0} u^k \sum_{l(\lambda)\leq k} z^{|\lambda|} q^{n(2\lambda)} \frac{(a,\ b;q^{-2})_{\lambda_1}}{(q^2;q^2)_\lambda (q;q^2)_{\lambda_k}} \\
&= \sum_{\lambda} \sum_{k\geq 0} u^{k+l(\lambda)} z^{|\lambda|} q^{n(2\lambda)} \frac{(a,\ b;q^{-2})_{\lambda_1}}{(q^2;q^2)_\lambda (q;q^2)_{\lambda_{l(\lambda)+k}}} \\
&= \sum_{\lambda} u^{l(\lambda)} z^{|\lambda|} q^{n(2\lambda)} \frac{(a,\ b;q^{-2})_{\lambda_1}}{(q^2;q^2)_\lambda} \left(\frac{u}{1-u} + \frac{1}{(q;q^2)_{\lambda_{l(\lambda)}}} \right), \qquad (4.69)
\end{aligned}$$

où la somme porte sur toutes les partitions λ. Comme dans la démonstration précédente, nous pouvons remplacer toute partition λ par une paire $(\nu, \mathbf{m})$, où ν est une partition stricte constituée des parts distinctes $\nu_1, \ldots, \nu_l$ de λ, telles que $\nu_1 > \cdots > \nu_l > 0$, et $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_l)$ est la suite des multiplicités de ν_i pour $1 \leq i \leq l$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\varphi_{ab}(u) \quad &= \sum_{\nu,\,\mathbf{m}} \frac{(a,\ b;q^{-2})_{\nu_1}}{(q^2;q^2)_\nu} \left(\frac{u}{1-u} + \frac{1}{(q;q^2)_{\nu_l}} \right) \prod_{i=1}^{l} (u_{\nu_i} u)^{m_i} \\
&= \sum_{\nu} \frac{(a,\ b;q^{-2})_{\nu_1}}{(q^2;q^2)_\nu} \left(< u > + \frac{1}{(q;q^2)_{\nu_l}} \right) \prod_{i=1}^{l} < u_{\nu_i} u >, \qquad (4.70)
\end{aligned}$$

où la somme porte sur toutes les partitions strictes ν, et n'est donc pas cette fois une somme finie. Mais chaque terme de cette somme, en tant que fonction rationnelle en u, a un ensemble fini de pôles, qui sont nécessairement de la forme u_r^{-1} pour $r \geq 0$. Donc chaque terme est une combinaison linéaire finie de fractions décomposées en éléments simples. De plus, la somme de leurs développements converge coefficient par coefficient. Donc φ_{ab} a un développement

$$\varphi_{ab}(u) = \sum_{r\geq 0} \frac{c_r}{1-u_r u}, \qquad (4.71)$$

où c_r représente la somme formelle des coefficients de la fraction provenant des termes de (4.70). Il reste à déterminer ces résidus c_r ($r \geq 0$). En utilisant (4.59) et (4.69), nous obtenons immédiatement

$$c_0 = [\varphi_{ab}(u)(1-u)]_{u=1} = \frac{(azq,\, bzq; q^2)_\infty}{(zq,\, abzq; q^2)_\infty}.$$

D'après (4.70), ceci donne l'identité

$$\sum_\nu \frac{(a,\, b; q^{-2})_{\nu_1}}{(q^2; q^2)_\nu} \prod_{i=1}^{l} < u_{\nu_i} >= \frac{(azq,\, bzq; q^2)_\infty}{(zq,\, abzq; q^2)_\infty}. \tag{4.72}$$

Clairement la contribution d'un sommant de (4.70) dans c_r ($r > 0$) ne sera pas nulle seulement si la partition correspondante ν a une part égale à r. Pour toute partition ν telle que $\exists j \,|\, \nu_j = r$, soient $\rho_i = \nu_i - r$ pour $1 \leq i < j$ et $\sigma_i = \nu_{i+j}$ pour $0 \leq i \leq l-j$, nous obtenons donc deux partitions ρ et σ, avec σ_i majorée par r. En multipliant (4.70) par $(1-u_r u)$ et en posant $u = 1/u_r$ nous obtenons

$$\begin{aligned} c_r &= \sum_\rho \frac{(a,b;q^{-2})_{\rho_1+r}}{(q^2;q^2)_\rho} \prod_{i=1}^{j-1} < u_{r+\rho_i}/u_r > \\ &\times \sum_\sigma \frac{1}{(q^2;q^2)_\sigma} \left(< 1/u_r > + \frac{1}{(q;q^2)_{\sigma_{l-j}}} \right) \prod_{i=1}^{l-j} < u_{\sigma_i}/u_r > . \end{aligned}$$

D'après (4.66) la somme sur σ vaut $b_r(z,r)/(q)_{2r}$, et en appliquant (4.68), nous avons

$$\begin{aligned} c_r &= (z;q^2)_{2r} q^{\binom{2r}{2}} \frac{1-zq^{4r-1}}{(zq^{2r-1})_{2r+1}} \frac{(a,b;q^{-2})_r}{(q)_{2r}} \\ &\qquad \times \sum_\rho \frac{(aq^{-2r}, bq^{-2r}; q^{-2})_{\rho_1}}{(q^2;q^2)_\rho} \prod_{i=1}^{j-1} < u_{r+\rho_i}/u_r > . \end{aligned}$$

Maintenant la somme sur ρ peut être évaluée en utilisant (4.72) avec a, b et z remplacés respectivement par aq^{-2r}, bq^{-2r} et zq^{4r}. Après simplification, nous obtenons

$$c_r = q^{\binom{2r}{2}} \frac{(z;q^2)_\infty}{(zq^{2r-1})_\infty} \frac{(a,b;q^{-2})_r (azq^{2r+1}, bzq^{2r+1}; q^2)_\infty}{(q)_{2r}(abzq;q^2)_\infty} (1-zq^{4r-1}),$$

ce qui achève la démonstration en remplaçant ces valeurs dans (4.71).

4.5 Méthode de Bailey

4.5.1 Lemme de Bailey et extension d'Andrews

Une approche classique des identités de type Rogers-Ramanujan est basée sur la méthode de Bailey (voir [6, 63]).

Définition 4.9 *Une paire de suites* $(\alpha_n,\, \beta_n)$ *est une* paire de Bailey *si il existe deux paramètres* x *et* q *tels que*

$$\beta_n = \sum_{r=0}^{n} \frac{\alpha_r}{(q)_{n-r}(xq)_{n+r}} \qquad \forall n \geq 0. \tag{4.73}$$

On rappelle le lemme de Bailey dans sa forme la plus générale [6, p. 25-26].

Lemme 4.10 (Lemme de Bailey) *Si* $(\alpha_n,\, \beta_n)$ *est une paire de Bailey, alors* $(\alpha'_n,\, \beta'_n)$ *en est une aussi, où*

$$\alpha'_n = \frac{(\rho_1)_n(\rho_2)_n(xq/\rho_1\rho_2)^n}{(xq/\rho_1)_n(xq/\rho_2)_n}\alpha_n$$

et

$$\beta'_n = \sum_{j\geq 0} \frac{(\rho_1)_j(\rho_2)_j(xq/\rho_1\rho_2)^j}{(q)_{n-j}(xq/\rho_1)_n(xq/\rho_2)_n}\beta_j.$$

L'idée est donc de partir d'une paire de Bailey $(\alpha_n,\, \beta_n)$ simple (c'est-à-dire que (4.73) est prouvée facilement) pour obtenir une paire $(\alpha'_n,\, \beta'_n)$ par le lemme de Bailey, à laquelle on applique (4.73), puis lorsque c'est possible l'identité de Jacobi (4.2) afin d'obtenir une identité de type Rogers-Ramanujan. Slater, dans [56] et [57], a obtenu une liste de 130 identités en utilisant cette technique.
A titre d'exemple, nous donnons ici une démonstration des identités de Rogers-Ramanujan (voir par exemple [6],[8], [19]) par cette méthode. Soient

$$\alpha_n = \frac{(-1)^n q^{n(n-1)/2}(x)_n(1-xq^{2n})}{(1-x)(q)_n}, \qquad \beta_n = \delta_{n,0}, \tag{4.74}$$

alors le fait que $(\alpha_n,\, \beta_n)$ est une paire de Bailey se démontre simplement en inversant la relation (4.73), ou en utilisant une formule due à Agarwal, qui se démontre elle-même par récurrence [11, p.586]. Alors appliquons deux fois le lemme de Bailey, avec dans les deux cas les constantes $\rho_1 \to \infty$ et $\rho_2 \to \infty$, pour obtenir une paire $(\alpha''_n,\, \beta''_n)$ telle que

$$\alpha''_n = \frac{(-1)^n q^{n(5n-1)/2} x^{2n} (x)_n (1-xq^{2n})}{(1-x)(q)_n}, \qquad \beta''_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{q^{j^2} x^j}{(q)_{n-j}(q)_j}.$$

Appliquons alors (4.73) à $(\alpha''_n,\, \beta''_n)$, et nous obtenons en multipliant par $(q)_\infty$ et en prenant la limite $n \to \infty$:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n q^{n^2}}{(q)_n} = \frac{1}{(xq)_\infty} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n q^{n(5n-1)/2} x^{2n} (x)_n (1-xq^{2n})}{(1-x)(q)_n}. \tag{4.75}$$

Alors posons $a = 1$ (resp. $a = q$), puis appliquons le triple produit de Jacobi (4.2) pour obtenir (4.3) (resp. (4.4)).

Cet exemple montre la puissance de cette technique, qui permet en fait d'obtenir une infinité de paires de Bailey à partir d'une seule paire, comme l'a remarqué Andrews [5, 6]. Il est donc possible d'obtenir des multianalogues de type Rogers-Ramanujan à partir d'une paire de Bailey. Andrews a formalisé ceci dans une identité très générale (théorème 3.4 dans [6]) itérant k fois le lemme de Bailey ci-dessus. Nous récrivons ici ce résultat.

Théorème 4.11 (Andrews) *Si $(\alpha_n,\, \beta_n)$ est une paire de Bailey, alors pour tout $k \geq 1$*

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 0} \frac{(b_1, c_1, \ldots, b_k, c_k)_n}{\left(\frac{xq}{b_1}, \frac{xq}{c_1}, \ldots, \frac{xq}{b_k}, \frac{xq}{c_k}\right)_n} \frac{(q^{-N})_n}{(xq^{N+1})_n} \left(\frac{x^k q^{k+N}}{b_1 c_1 \cdots b_k c_k}\right)^n \frac{(-1)^n}{q^{n(n-1)/2}} \alpha_n \\
&= \frac{\left(xq, \frac{xq}{b_k c_k}\right)_N}{\left(\frac{xq}{b_k}, \frac{xq}{c_k}\right)_N} \sum_{l(\lambda)\leq k} q^{|\lambda|} x^{|\lambda|-\lambda_1} \frac{(b_k, c_k)_{\lambda_1} \cdots (b_1, c_1)_{\lambda_k}}{(b_{k-1}c_{k-1})^{\lambda_2} \cdots (b_1 c_1)^{\lambda_k}} \frac{\left(q^{-N}\right)_{\lambda_1}}{\left(\frac{b_k c_k}{xq^N}\right)_{\lambda_1}} \\
&\quad \times \frac{\left(\frac{xq}{b_{k-1}c_{k-1}}\right)_{\lambda_1-\lambda_2} \cdots \left(\frac{xq}{b_1 c_1}\right)_{\lambda_{k-1}-\lambda_k}}{\left(\frac{xq}{b_{k-1}}, \frac{xq}{c_{k-1}}\right)_{\lambda_1} \cdots \left(\frac{xq}{b_1}, \frac{xq}{c_1}\right)_{\lambda_{k-1}}} \frac{(q)_{\lambda_k}}{(q)_\lambda} \beta_{\lambda_k}.
\end{aligned} \tag{4.76}$$

4.5.2 Applications à nos identités

Dans ce qui suit, nous allons démontrer par cette méthode notre identité (4.40), de laquelle proviennent nos six multianalogues (4.34)-(4.39).

Le point de départ est donc le théorème 4.11 d'Andrews. En effet, soit $N \to \infty$ et pour $i = 1, \ldots, k-1$, soient $b_i \to \infty$, $c_i \to \infty$ et soient $b_k = a^{-1}$ et $c_k = b^{-1}$ dans (4.76), nous obtenons alors

$$\begin{aligned}\frac{(xq,\, abxq)_\infty}{(axq,\, bxq)_\infty} \sum_{l(\lambda)\le k} q^{n_2(\lambda)-\lambda_1^2+\lambda_1} x^{|\lambda|} (a^{-1}, b^{-1})_{\lambda_1} (ab)^{\lambda_1} \frac{(q)_{\lambda_k}}{(q)_\lambda} \beta_{\lambda_k} \\ = \sum_{n\ge 0} q^{(k-1)n^2+n} x^{kn} \frac{(a^{-1}, b^{-1})_n (ab)^n}{(axq,\, bxq)_n} \alpha_n,\end{aligned} \tag{4.77}$$

où $(\alpha_n,\, \beta_n)$ est une paire de Bailey.

Nous évoquons alors la paire de Bailey $(\alpha_n,\, \beta_n)$ suivante [56, F(1)] : $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ et pour $n \ge 1$

$$\alpha_n = q^{n^2}(q^{n/2} + q^{-n/2}), \qquad \beta_n = \frac{1}{(q^{1/2}, q)_n}, \tag{4.78}$$

et nous la plongeons dans (4.77) avec $x = 1$, ce qui donne (4.40) après avoir remplacé q par q^2.

Il est intéressant de noter que (4.45) et (4.46) sont des conséquences du lemme de Bailey avec la paire de Slater (4.78), mais elles n'apparaissent pas dans [56, 57].

Remarquons que Stembridge a déduit ses seize multianalogues de type Rogers-Ramanujan des spécialisations suivantes de son théorème 3.4 dans [61] :

$$\frac{(q,abq)_\infty}{(aq,bq)_\infty}\sum_{l(\lambda)\le k} q^{n_2(\lambda)-\lambda_1^2+\lambda_1}(ab)^{\lambda_1}\frac{(a^{-1},b^{-1})_{\lambda_1}}{(q)_\lambda} \tag{4.79}$$
$$= \sum_{n\ge 0} q^{(k+\frac{1}{2})n^2+\frac{1}{2}n}(-ab)^n\frac{(a^{-1},b^{-1})_n}{(aq,bq)_n}(1+q^n),$$

$$\frac{(q,abq^2)_\infty}{(aq^2,bq^2)_\infty}\sum_{l(\lambda)\le k} q^{n_2(\lambda)+|\lambda|-\lambda_1^2+\lambda_1}(ab)^{\lambda_1}\frac{(a^{-1},b^{-1})_{\lambda_1}}{(q)_\lambda} \tag{4.80}$$
$$= \sum_{n\ge 0} q^{(k+\frac{1}{2})n^2+(k+\frac{3}{2})n}(-ab)^n\frac{(a^{-1},b^{-1})_n}{(aq^2,bq^2)_n}(1-q^{2n+1}),$$

$$\frac{(-aq,q)_\infty}{(-q,aq^2)_\infty}\sum_{l(\lambda)\le k} q^{\frac{1}{2}(n_2(\lambda)+|\lambda|-\lambda_1^2+\lambda_1)}(-a)^{\lambda_1}\frac{(a^{-1})_{\lambda_1}}{(q)_\lambda} \tag{4.81}$$
$$= \sum_{n\ge 0} q^{\frac{k+1}{2}(n^2+n)}a^n\frac{(a^{-1})_n}{(aq^2)_n}(1-q^{2n+1}),$$

$$\frac{(-aq^{1/2},q)_\infty}{(-q^{1/2},aq)_\infty}\sum_{l(\lambda)\le k} q^{\frac{1}{2}(n_2(\lambda)-\lambda_1^2+\lambda_1)}(-a)^{\lambda_1}\frac{(a^{-1})_{\lambda_1}}{(q)_\lambda} \tag{4.82}$$
$$= \sum_{n\ge 0} q^{\frac{k+1}{2}n^2}a^n\frac{(a^{-1})_n}{(aq)_n}(1+q^n).$$

De la même manière, nous pouvons déduire les quatre identités précédentes de (4.76). Par exemple, pour (4.79) prenons $x = 1$ dans (4.77) et utilisons la paire de Bailey B(1) de [56], et pour (4.80) prenons $x = q$ dans (4.77) et utilisons la paire de Bailey B(3) de [56]. Pour (4.81) et (4.82), nous avons besoin d'une autre spécialisation de (4.76). Soient $N \to \infty$, $b_i \to \infty$ pour $i = 1, \ldots, k-1$ et $b_k = a^{-1}$ et $c_i = -\sqrt{xq}$ pour $i = 1, \ldots, k$ dans (4.76). Alors

$$\frac{(xq,\ -a\sqrt{xq})_\infty}{(axq,\ -\sqrt{xq})_\infty}\sum_{l(\lambda)\le k} q^{\frac{1}{2}(n_2(\lambda)-\lambda_1^2+\lambda_1)}x^{\frac{1}{2}|\lambda|}(a^{-1})_{\lambda_1}(-a)^{\lambda_1} \tag{4.83}$$
$$\times\frac{(-\sqrt{xq},q)_{\lambda_k}}{(q)_\lambda}\beta_{\lambda_k} = \sum_{n\ge 0} q^{\frac{1}{2}((k-1)n^2+n)}x^{\frac{1}{2}kn}\frac{(a^{-1})_n(-a)^n}{(axq)_n}\alpha_n,$$

où $(\alpha_n,\ \beta_n)$ est une paire de Bailey.

En prenant $x = q$ dans (4.83) et en utilisant la paire de Bailey E(3) de Slater [56], nous déduisons (4.81). Pour (4.82), prenons $x = 1$ dans (4.83) et utilisons la paire de Bailey suivante [56, p. 468] : $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ et pour $n \geq 1$

$$\alpha_n = (-1)^n q^{n^2}(q^{n/2} + q^{-n/2}), \qquad \beta_n = \frac{1}{(-q^{1/2}, q)_n}. \tag{4.84}$$

Récemment, Bressoud, Ismail et Stanton [20] ont remarqué que les seizes multianalogues de Stembridge [61], mais pas les quatre identités plus générales précédentes, peuvent être démontrées par le biais de changements de bases dans les paires de Bailey.

4.6 Interprétations en termes de partitions

Le but de ce paragraphe est d'analyser les interprétations combinatoires possibles en termes de partitions des identités (4.41)-(4.44) que nous avons obtenues.

4.6.1 L'approche d'Hirschhorn

Hirschhorn [32] a donné les interprétations combinatoires suivantes de (4.41) et (4.42), et Andrews et Santos [10] ont donné des extensions de ces interprétations :

Théorème 4.12 (Hirschhorn) *Le nombre de partitions $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ de n vérifiant $\lambda_{l-1} - \lambda_l \geq 2$, $\lambda_{l-3} - \lambda_{l-1} \geq 2, \ldots$ est égal au nombre de partitions de n en parts congrues à 1, 4, 6, 7, 9, 10, 12 ou 15 modulo 16.*
Le nombre de partitions $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ de n vérifiant $\lambda_l \geq 2$, $\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1} \geq 2, \ldots$ est égal au nombre de partitions de n en parts congrues à 2, 3, 4, 5, 11, 12, 13 ou 14 modulo 16.

Comme souvent concernant les identités de type Rogers-Ramanujan, la difficulté réside dans l'interprétation de la somme (ici au membre de gauche), car le produit est dans beaucoup de cas une fonction génératrice évidente de partitions. Notre but était de donner une interprétation en termes de partitions des identités (4.43) et (4.44). Pour cela, nous nous sommes intéressé au travail d'Hirschhorn, qui donne, toujours dans [32], le théorème suivant, permettant d'interpréter combinatoirement les identités (79) et (94) de la liste de Slater [57].

Théorème 4.13 (Hirschhorn) *Soient*

$$f(q) := \sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2}}{(q)_{2n}} \quad \textit{et} \quad g(q) := \sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2+n}}{(q)_{2n+1}}.$$

Alors f (resp. g) est la fonction génératrice des partitions $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 > \lambda_4 \geq \cdots$ (resp. $\lambda_1 \geq \lambda_2 > \lambda_3 \geq \lambda_4 > \cdots$).

Démonstration. Supposons que λ soit une partition de la forme $|\lambda| = n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{2s-1}$ vérifiant les conditions souhaitées dans la première assertion. Alors en enlevant 1 à λ_{2s-1}, 2 à λ_{2s-2}, ..., s à λ_1, nous obtenons une partition de $n - s^2$ en au plus $2s - 1$ parts. De même, si $|\lambda| = n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{2s}$, enlevons 1 à λ_{2s}, 2 à λ_{2s-1}, ..., $s+1$ à λ_1 pour obtenir une partition de $n - (s^2 + 2s)$ en au plus $2s$ parts. Donc nous en déduisons que la fonction génératrice cherchée est de la forme

$$1 + \sum_{s\geq 1} \frac{q^{s^2}}{(q)_{2s-1}} + \sum_{s\geq 1} \frac{q^{s^2+2s}}{(q)_{2s}} = f(q),$$

ce qui prouve la première assertion.
Pour la deuxième, on utilise la même méthode, en écrivant cette fois que

$$1 + \sum_{s\geq 1} \frac{q^{s^2+s+1}}{(q)_{2s-1}} + \sum_{s\geq 1} \frac{q^{s^2+s}}{(q)_{2s}} = g(q).$$

□

Concernant les membres de gauche de (4.43) et (4.44), nous pouvons écrire de même les égalités suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} \frac{(-q;q^2)_n}{(q)_{2n}} = 1 + \sum_{s\geq 1} q^{s^2} \frac{(-q;q^2)_s}{(q)_{2s-1}} + \sum_{s\geq 1} q^{s^2+2s} \frac{(-q;q^2)_s}{(q)_{2s}}, \tag{4.85}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2+n} \frac{(-q^2;q^2)_n}{(q)_{2n+1}} = 1 + \sum_{s\geq 1} q^{s^2+s+1} \frac{(-q^2;q^2)_{s-1}}{(q)_{2s-1}} + \sum_{s\geq 1} q^{s^2+s} \frac{(-q^2;q^2)_s}{(q)_{2s}}. \tag{4.86}$$

Ainsi, nous pouvons interpréter les membres de gauche de (4.43) et (4.44) à l'aide de couples de partitions. En effet, nous savons que (4.85) donne la fonction génératrice des couples de partitions (λ,μ) telles que μ soit constituée de parts impaires distinctes, $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 > \lambda_4 \geq \cdots$ et $\mu_1 \leq l(\lambda)$. De même, (4.86) donne la fonction génératrice des couples de partitions (λ,μ) telles que μ soit constituée de parts paires distinctes, $\lambda_1 \geq \lambda_2 > \lambda_3 \geq \lambda_4 > \cdots$ et $\mu_1 \leq l(\lambda)$. Mais comme le membre de droite de (4.44) a une interprétation évidente en termes de partitions, il faudrait trouver une bijection entre ce dernier ensemble de paires de partitions et un sous ensemble de partitions.

4.6.2 Les identités de Göllnitz-Gordon

Göllnitz [26] et Gordon [27] ont démontré indépendemment et combinatoirement les deux identités suivantes, qui sont les analogues en modulo 8 des identités de Rogers-Ramanujan :

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2}\frac{(-q;q^2)_n}{(q^2;q^2)_n} = \frac{1}{(q,q^4,q^7;q^8)_\infty}, \tag{4.87}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2+2n}\frac{(-q;q^2)_n}{(q^2;q^2)_n} = \frac{1}{(q^3,q^4,q^5;q^8)_\infty}. \tag{4.88}$$

Les membres de droite de (4.87) et (4.88) ayant une interprétation évidente, nous nous intéressons ici simplement au théorème suivant.

Théorème 4.14 (Göllnitz-Gordon) *Soient*

$$\phi(q) := \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2}\frac{(-q;q^2)_n}{(q^2;q^2)_n} \quad \textit{et} \quad \psi(q) := \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2+2n}\frac{(-q;q^2)_n}{(q^2;q^2)_n}.$$

Alors ϕ (resp. ψ) est la fonction génératrice des partitions λ telles que $\lambda_j - \lambda_{j+1} \geq 2$ et $\lambda_j - \lambda_{j+1} \geq 3$ si λ_j est pair (resp. des partitions λ telles que $\lambda_j - \lambda_{j+1} \geq 2$ et $\lambda_j - \lambda_{j+1} \geq 3$ si λ_j est pair, et $\lambda_j \geq 2\ \forall j$).

Pour démontrer ce théorème, Göllnitz [26] a utilisé le lemme suivant :

Lemme 4.15 (Göllnitz) $f_N(q) := \dfrac{(-q;q^2)_N}{(q^2;q^2)_N} = \sum_{n\geq 0} f_N(n)q^n$ *est la fonction génératrice des partitions λ telles que $l(\lambda) \leq N$ et $\lambda_j - \lambda_{j+1} \geq 1$ si λ_j est impair.*

Démonstration. Par récurrence sur N, partons de l'égalité

$$(1-q^{2N+2})f_{N+1}(q) = (1+q^{2N+1})f_N(q),$$

qui équivaut à

$$f_{N+1}(n) = f_N(n) + \sum_{k\equiv 2N+1 \pmod{2N+2}} (f_N(n-k) + f_N(n-k-1)).$$

Il faut donc vérifier que la famille des partitions du lemme vérifie bien cette relation. Pour cela, considèrons λ une partition vérifiant les conditions du lemme au rang $N+1$. Alors ou bien λ vérifie ces conditions au rang N, ou bien $l(\lambda) = N+1$. Nous étudions donc ce dernier cas. Si $\lambda_{N+1} = 2p+1$, nous enlevons $2p+1$ à λ_{N+1} et λ_N et $2p+2$ aux autres parts, pour obtenir une partition de longueur $\leq N$, de poids $n-(2N+1)-(2p+1)(2N+2)$, dont la parité des parts est inchangée. Si $\lambda_{N+1} = 2p$, nous enlevons $2p$ à toutes les parts, pour obtenir une partition de longueur $\leq N$, de poids $n-(2N+2)p$, dont la parité des parts est inchangée. □

Pour prouver le cas de ϕ du théorème 4.14, il suffit de considérer une partition $\lambda = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_s > 0$ vérifiant les conditions voulues. Nous posons alors $\mu_i = \lambda_i - (2(s-i)+1)\ \forall i$, et la partition μ de poids $n-s^2$ est dans la famille du lemme.

Nous ne ppouvons prouver un lemme du même type pour (4.43) et (4.44), car $\dfrac{(-q;q^2)_N}{(q)_{2N}}$ et $\dfrac{(-q^2;q^2)_N}{(q)_{2N+1}}$ ne sont pas des fonctions génératrices de partitions. Il suffit en effet de considérer le cas $N=1$, par exemple avec Maple.

4.6.3 L'approche de Bressoud

Alladi [1] a mis en évidence une dualité entre les identités (4.41) et (4.42) et celles de Göllnitz-Gordon, grâce à la transformation suivante, qui permet de passer des unes aux autres :

Lemme 4.16 (Alladi)

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a^n q^{n^2}(-bq;q^2)_n}{(a^2;q^2)_n} = \sum_{n\geq 0} \frac{(ab)^n q^{2n^2}(-q^{2n+1};q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_n}. \tag{4.89}$$

Les substitutions considérées sont $a=b=1$, et $a=q^2,\ b=1$.

Nous pouvons nous demander si de même il existe des identités duales de (4.43) et (4.44) qui seraient plus faciles à prouver combinatoirement.

Bressoud [15] a lui aussi fait le rapprochement entre les identités (4.41) et (4.42) et celles de Göllnitz-Gordon, grâce cette fois à la transformation suivante :

Théorème 4.17 (Bressoud)

$$\sum_{n\geq 0}\frac{\alpha^n q^{n^2}}{(q,\alpha\beta q)_n}=\frac{1}{(\alpha)_\infty}\sum_{n\geq 0}\frac{\alpha^{2n}\beta^n q^{2n^2}(1-aq^{2n})(\alpha,\beta^{-1})_n}{(q,\alpha\beta q)_n}. \tag{4.90}$$

Cette identité est une conséquence du q-analogue de Whipple, prouvé par Watson [24].
En remplacant q par q^2 puis en posant $\beta=-1/q$, et en multipliant par $(-\alpha q;q^2)_\infty$, Bressoud obtient avec $\alpha=1$ et $\alpha=q^2$ respectivement :

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^{2n^2}\frac{(-q^{2n+1};q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_n} = \frac{(q^2;q^4)_\infty(q^3,q^5,q^8;q^8)}{(q)_\infty}, \tag{4.91}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^{2n^2+2n}\frac{(-q^{2n+3};q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_n} = \frac{(q^2;q^4)_\infty(q,q^7,q^8;q^8)}{(q)_\infty}. \tag{4.92}$$

En substituant q par $-q$, nous nous apercevons que (4.91) et (4.92) sont en fait (4.41) et (4.42). Pourtant, l'interprétation combinatoire faite par Bressoud de (4.91) et (4.92) correspond à celle de Göllnitz-Gordon.
En effet, par exemple pour (4.91), $q^{n^2}/(q)_n$ est la fonction génératrice des partitions en n parts de différence minimale 2, et donc $q^{2n^2}/(q^2;q^2)_n$ est la fonction génératrice des partitions en n parts paires de différence minimale 4. $(-q^{2n+1};q^2)_\infty$ étant la fonction génératrice des partitions en parts impaires distinctes supérieures à $2n+1$, le membre de gauche de (4.91) est la fonction génératrice des partitions en parts distinctes de différence minimale 4 entre les parts paires, et la plus petite part impaire est ≥ 2 fois le nombre de parts paires.
Puis Bressoud donne une bijection avec la famille de partitions correspondant à $\Phi(q)$ dans le théorème 4.14.

Chapitre 5

Conclusion

Nous rappellons tout d'abord ici un classique résultat de Littlewood [48] évaluant les fonctions de Schur sur l'alphabet $\{1, t, \ldots, t^{n-1}\}$. Pour chaque partition λ rappellons que

$$n(\lambda') = \sum_{i \geq 1} \binom{\lambda'_i}{2} = \sum_{i \geq 1} (i-1)\lambda_i.$$

La longeur d'équerre de λ en $x = (i, j) \in \lambda$ est définie par

$$h(x) := h(i, j) = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1.$$

Le contenu de x est $c(x) := j - i$.

Théorème 5.1 (Littlewood)

$$s_\lambda(1, t, \ldots, t^{n-1}) = t^{n(\lambda)} \prod_{x \in \lambda} \frac{1 - t^{n+c(x)}}{1 - t^{h(x)}}. \tag{5.1}$$

Lassalle, dans [46], donne une expression des fonctions monomiales m_λ évaluées sur ce même alphabet. Nous rappelons ce résultat ci-dessous.
Etant donnée une partition μ, notons C_μ l'ensemble des multi-entiers distincts obtenus par permutation des parts de μ. $c \in C_\mu$ est aussi appelé un *dérangement* de μ. Pour tout multi-entier $c = (c_1, \ldots, c_{l(\mu)})$, notons $[c_i] := \sum_{k \leq i} c_k$ la somme partielle d'ordre i.

Théorème 5.2 (Lassalle) *Pour toute partition μ on a*

$$\begin{aligned} m_\mu(1,t,\ldots,t^{n-1}) &= \sum_{c\in C_\mu}\prod_{i=1}^{l(\mu)}\frac{t^{[c_{i-1}]}}{1-t^{[c_i]}} \\ &= \sum_{c\in C_\mu}\prod_{i=1}^{l(\mu)}\frac{t^{(l(\mu)-i)c_i}}{1-t^{[c_i]}}. \end{aligned}$$

Il serait intéressant d'évaluer les polynômes de Hall-Littlewood sur ce même alphabet, ce qui permettrait de généraliser les théorèmes ci-dessus à l'aide d'une même expression. Lassalle a prouvé le théorème 5.2 en trouvant une relation de récurrence satisfaite par les membres de droite, donc cette méthode nécessite de conjecturer l'expression cherchée. La difficulté réside dans le fait qu'il est impossible d'affirmer l'existence d'une telle formule pour les polynômes de Hall-Littlewood, mais les formules de sommations de polynômes de Hall-Littlewood évaluées au chapitre 4 peuvent être une source d'inspiration.

Durant notre travail sur le lemme de Bailey, nous avons été amené à étudier certaines extensions ayant des applications intéressantes.
La notion de paire de Bailey peut être généralisée par la notion plus fine de *WP-paire de Bailey* [9, 15]. Une paire $(\alpha_n(a,k),\, \beta_n(a,k))$ est une WP-paire de Bailey si elle vérifie :

$$\beta_n(a,k) = \sum_{j=0}^{n}\frac{(k/a)_{n-j}(k)_{n+j}}{(q)_{n-j}(aq)_{n+j}}\alpha_j(a,k). \tag{5.2}$$

Il est montré dans [8] que si $(\alpha_n(a,k),\, \beta_n(a,k))$ est une WP-paire de Bailey, alors il en est de même pour $(\alpha'_n(a,k),\, \beta'_n(a,k))$ et $(\alpha''_n(a,k),\, \beta''_n(a,k))$, où

$$\alpha'_n(a,k) = \frac{(\rho_1,\rho_2)_n}{(aq/\rho_1, aq/\rho_2)_n}(k/c)^n\alpha_n(a,c), \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} \beta'_n(a,k) = {} & \frac{(k\rho_1/a, k\rho_2/a)_n}{(aq/\rho_1, aq/\rho_2)_n} \\ & \times\sum_{j\geq 0}\frac{(\rho_1,\rho_2)_j(k/c)_{n-j}(k)_{n+j}(1-cq^{2j})}{(k\rho_1/a, k\rho_2/a)_j(q)_{n-j}(qc)_{n+j}(1-c)}(k/c)^j\beta_j(a,c), \end{aligned} \tag{5.4}$$

avec
$$c = \frac{k\rho_1\rho_2}{aq},$$
et
$$\alpha''_n(a,k) = \frac{(qa^2/k)_{2n}}{(k)_{2n}}(k^2/qa^2)^n\alpha_n(a, qa^2/k), \tag{5.5}$$
$$\beta''_n(a,k) = \sum_{j\geq 0}\frac{(k^2/qa^2)_{n-j}}{(q)_{n-j}}(k^2/qa^2)^j\beta_j(a, qa^2/k). \tag{5.6}$$

Ces deux expressions généralisent donc de deux façons différentes le lemme de Bailey 4.10 page 72. Bressoud [13] a donné trois WP-paires de Bailey, conduisant par applications de (5.3)-(5.6) à de nouvelles identités de fonctions hypergéométriques, et à des versions polynômiales doublement bornées des identités de Rogers-Ramanujan [9].
Nous rappelons la conjecture de Borwein, toujours ouverte à ce jour, qui s'exprime d'une manière remarquablement simple (voir par exemple [7, 14]) :

Conjecture 5.3 (Borwein) *Si on pose*
$$(q, q^2; q^3)_n = A_n(q^3) - qB_n(q^3) - q^2C_n(q^3),$$
alors A_n, B_n et C_n sont des polynômes à coefficients positifs ou nuls.

Bressoud a donné dans [14] une extension de cette conjecture, la conjecture généralisée de Borwein. La notion de *transformation de Burge* ([9, 21, 64]) a permis à Warnaar [64] de prouver des cas particuliers de positivité de la conjecture généralisée de Borwein. Andrews et Berkovich, dans [9], définissent la notion de *WP-paire de Burge* à partir de celle de WP-paires de Bailey, qui permet de retrouver certains résultats de Warnaar.

Bibliographie

[1] ALLADI (K.), *Some new observations on the Göllnitz-Gordon and Rogers-Ramanujan identities*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (3), 1995.

[2] ANDREWS (G. E.), *Plane partitions (I) : the MacMahon conjecture*, studies in Foundations and Combinatorics, Advances in Mathematic supplementary studies **1**, 131-150, 1978.

[3] ANDREWS (G.E.), *An analytic generalization of the Rogers-Ramanujan identities for odd moduli*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **71**, 4082-4085, 1974.

[4] ANDREWS (G. E.), *The theory of partitions*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Vol. **2**, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1976.

[5] ANDREWS (G. E.), *Multiple series Rogers-Ramanujan type identities*, Pacific J. Math., Vol. **114**, No. 2, 267-283, 1984.

[6] ANDREWS (G. E.), *q-Series : Their Development and Application in Analysis, Combinatorics, Physics, and Computer Algebra*, CBMS Regional Conference Series, Vol. **66**, Amer. Math. Soc., Providence, 1986.

[7] ANDREWS (G. E.), *On a conjecture of Peter Borwein*, J. Symbolic Computation **20**, 487-501, 1995.

[8] ANDREWS (G. E.), *Bailey's transform, lemma, chains and tree*, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Special Functions 2000, Tempe, Arizona, USA.

[9] ANDREWS (G. E.) et BERKOVICH (A.),*The WP-Bailey Tree and its Implications*, math.CO/0109141.

[10] ANDREWS (G. E.) et SANTOS (J. P. O.), *Rogers-Ramanujan Type Identities for Partitions with Attached Odd Parts*, The Ramanujan J. **1**, 91-99, 1997.

[11] Andrews (G. E.), Askey (R.) et Roy (R.) *Special Functions*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Vol. **71**, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[12] Bousquet-Mélou (M.) et Habsieger (L.) *Sur les matrices à signes alternants*, Discr. Math. **139**, 57-72, 1995.

[13] Bressoud (D. M.), *Some Identities for Terminating q-Series*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **81**, 211-223, 1981.

[14] Bressoud (D. M.), *The Borwein Conjecture and Partitions with Prescribed Hook Differences*, Electron. J. Combin. **3**, 1996.

[15] Bressoud (D.), *On partitions, orthogonal polynomials and the expansion of certain infinite products*, Proc. London Math. Soc. **42**(3), 478-500, 1981.

[16] Bressoud (D.), *Elementary proof of MacMahon's conjecture*, J. Alg. Combin. **7**, 253-257, 1998.

[17] Bressoud (D.), *Elementary proofs of identities for Schur functions and plane partitions*, The Ramanujan J. **4**, 69-80, 2000.

[18] Bressoud (D.), *Proofs and Confirmations, The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*, Cambridge University Press, 1999.

[19] Bressoud (D.), *An easy proof of the Rogers-Ramanujan identities*, J. Number T. **16**, 235-241, 1983.

[20] Bressoud (D.), Ismail (M.) et Stanton (D.), *Change of Base in Bailey Pairs*, The Ramanujan J. **4**, 435-453, 2000.

[21] Burge (W. H.), *Restricted Partition Pairs*, J. Combin. Th. Ser. A **63**, 210-222, 1993.

[22] Comtet (L.), *Analyse combinatoire*, Vol. 1 et 2, Presse Universitaire de France, Paris, 1970.

[23] Désarménien (J.), *La démonstration des identités de Gordon et MacMahon et de deux identités nouvelles*, Strasbourg, Publ. I.R.M.A., Actes du 15ème Séminaire Lotharingien de Combinatoire, 340/S-15, 39-49, 1987.

[24] Gasper (G.) et Rahman (M.), *Basic Hypergeometric Series*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Vol. **35**, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[25] Gessel (I.) et Viennot (G.), *Binomial determinants, paths and hook length formulae*, Adv. Math. **58**, 300-321, 1985.

[26] Göllnitz (H.), *Partitionen mit Differenzenbedingungen*, J. Reine Angew. Math. **225**, 154-190, 1967.

[27] Gordon (B.), *Some continued fractions of the Rogers-Ramanujan type*, Duke Math. J. **32**, 741-748, 1965.

[28] Gordon (B.), *Notes on Plane Partitions, V*, J. Combin. Th. Ser. B **11**, 157-168, 1971.

[29] Goulden (I.), *The number of Involutions with r Fixed Points and a Long Increasing Subsequence*, Europ. J. Combinatorics **12**, 109-113, 1991.

[30] Hall (P.), *A partition formula connected with Abelian groups*, Comment. Math. Helv. **11**, 126-129, 1938.

[31] Haiman (M.), *Hilbert schemes, polygraphs and the Macdonald positivity conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **14**, 941-1006, 2001.

[32] Hirschhorn (M. D.), *Some partition theorems of the Rogers-Ramanujan type*, J. Combin. Th. Ser. A **27**, 33-37, 1979.

[33] Ishikawa (M.) et Wakayama (M.), *Applications of Minor-Summation Formula II. Pfaffians and Schur Polynomials*, J. Combin. Th. Ser. A **88**, 136-157, 1999.

[34] Jouhet (F.) et Zeng (J.) *Généralisation de formules de type Waring*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire **44**, 2000.

[35] Jouhet (F.) et Zeng (J.), *Some new identities for Schur functions*, Adv. Appl. Math. **27**, 493-509, 2001.

[36] Jouhet (F.) et Zeng (J.), *New Identities of Hall-Littlewood Polynomials and Applications*, accepté en 2002 pour publication dans The Ramanujan J.

[37] Krattenthaler (C.), *The Major Counting of Nonintersecting Lattice Paths and Generating Functions for Tableaux*, Memoirs of the A. M. S. **115**, 552, 1-109, 1995.

[38] Krattenthaler (C.), *Identities for classical group characters of nearly rectangular shape*, J. Algebra **209**, 1-64, 1998.

[39] Krattenthaler (C.), *Partitions Planes et Matrices à Signes Alternants*, exposé au Séminaire Lotharingien de Combinatoire **48**, 2002.

[40] Lascoux (A.) *Littlewood's formulas for characters of orthogonal and symplectic groups*, preprint, 2001.

[41] LASCOUX (A.) et SCHÜTZENBERGER (M. P.) *Sur une conjecture de H. O. Foulkes*, C. R. Acad. Sci. Paris **286A**, 323-4, 1978.

[42] LASCOUX (A.) et LASSALLE (M.) *Une identité remarquable en théorie des partitions*, Math. Annalen **318**, 299-313, 2000.

[43] LASSALLE (M.) *Some Combinatorial Conjectures for Jack Polynomials*, Annals of Combinatorics **2**, 61-83, 1998.

[44] LASSALLE (M.) *Quelques conjectures combinatoires relatives à la formule classique de Chu-Vandermonde*, Adv. Appl. Math. **21**, 457-472, 1998.

[45] LASSALLE (M.) *Une identité en théorie des partitions*, J. Combin. Th. Ser. A **89**, 270-288, 2000.

[46] LASSALLE (M.) *Une q-spécialisation pour les fonctions symétriques monomiales*, Adv. Math. **162** (2), 217-242, 2001.

[47] LITTLEWOOD (D. E.) *The theory of group characters*, second edition, Oxford University Press, 1950.

[48] MACDONALD (I. G.) *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, second edition, Oxford Science Publications, 1995.

[49] MACDONALD (I. G.), *An elementary proof of a q-binomial identity*, q-series and partitions (Minneapolis, MN, 1988), 73–75, IMA Vol. Math. Appl., 18, Springer, New York, 1989.

[50] MACMAHON (M. P.) *Combinatory analysis*, reprinted by Chelsea Publ. Company, 1960.

[51] MILLS (W. H.), ROBBINS (D. P.) et RUMSEY (H.) *Alternating sign matrices and descending plane partitions*, J. Combin. Th. Ser. A **34**, 340-359, 1983.

[52] OKADA (S.), *Application of minor summation formulas to rectangular-shaped representations of classical groups*, J. Algebra **205**, 337-367, 1998.

[53] PAK (I.), *Partition bijections, a survey*, preprint, 2002.

[54] PROSPER (V.), *Combinatoire des polynômes multivariés*, Thèse, Université Paris 7, ftp ://schubert.univ-mlv.fr/pub/thesis/Vincent.Prosper/vpthesis.html, 1999.

[55] ROBBINS (D. P.) et RUMSEY (H.) *Determinants and alternating sign matrices*, Adv. Math. **62**, 169-184, 1986.

[56] Slater (L. J.), *A new proof of Rogers's transformations of infinite series*, Proc. London Math. Soc. **53** (2), 460-475, 1951.

[57] Slater (L. J.), *Further identities of the Rogers-Ramanujan type*, Proc. London Math. Soc. **54** (2), 147-167, 1951-52.

[58] Stanley (R. P.), *Enumerative Combinatorics*, Vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[59] Stanley (R. P.), *Theory and application of plane partitions, Parts 1 and 2*, Studies in Applied Math. **50**, 167-188, 259-279, 1971.

[60] Stanley (R. P.), *Some combinatorial properties of Jack symmetric functions*, Adv. Math. **77**, 76-115, 1989.

[61] Stembridge (J. R.), *Hall-Littlewood functions, plane partitions, and the Rogers-Ramanujan identities*, Trans. Amer. Math. Soc. **319**, no.2, 469-498, 1990.

[62] Veigneau S., *ACE, an Algebraic Environment for the Computer algebra system MAPLE*, `http : file ://phalanstere.univ-mlv.fr/ ace`, 1998.

[63] Warnaar (S. O.), *50 years of Bailey's lemma*, Algebraic combinatorics and applications (Gößweinstein, 1999), 333–347, Springer, Berlin, 2001.

[64] Warnaar (S. O.), *The Generalized Borwein Conjecture. I. The Burge Transform*, math.CO/0011220.

[65] Zeilberger (D.), *Proof of the alternating sign matrix conjecture*, Electronic J. Combinatorics **3**, R13, 1996.