PROJET DE THÈSE

Nom et numéro de l'école doctorale : L'école doctorale de mathématiques et d'informatique fondamentale de Lyon (ED MathIF, numéro 336).

Nom de l'unité de recherche : Institut Camille Jordan, UMR 5208 du CNRS.

Localisation : Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1, 43 boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex, France.

Directeur de thèse : Abderezak Ould Houcine.

L'adresse courriel du contact scientifique : ould@math.univ-lyon1.fr

Titre de la thèse : Equations dans les produits libres.

DESCRIPTION DU PROJET :

L'étude de la théroie élémentaire des groupes est un sujet en pleine expansion, et très prometteur en raison des relations que cette étude engendre entre la théorie des modèles et la théorie géométrique des groupes. L'un des plus célèbres problèmes dans ce domaine est la conjecture de Tarski sur l'équivalence élémentaire des groupes libres. En 1998, O. Kharlampovich et A. Myasnikov ont annoncé une solution positive à ce problème. Une autre solution a été obtenue par Z. Sela autour de 2000-2002, qui utilise des techniques de la théorie géométrique des groupes.

L'une des fondamentales étapes dans la résolution de la conjceture de Tarski par Z. Sela, O. Kharlampovich et A. Myasnikov sur l'équivalence élémentaire des groupes libres, est la compréhension de l'ensemble des solutions des équations dans un groupe libre. Les ingrédients principaux dans cette étude sont les limites des actions sur les arbres, la décomposition des groupes agissants sur les arbres réels et qui vérifient certaines propriétés de stabilité (au sens de la géométrie); qui géneralisent les décompositions des groupes agissant sur les arbres dans le cadre de la théorie de Bass-Serre.

Dans l'étude de certaines propriétés modèles-théoriques des groupes, il devient nécessaire de comprendre la conservation de ces propriétés par passage aux produits libres (et aux produits libres amalgamés). Une des questions ouvertes et qui a un intérêt modèle-théorique, est de savoir si un produit libre de deux groupes equationnelement noetheriens est equationnelement noetherien; et plus généralement si le produit libre de deux groupes stables est stable (au sens de la théorie des modèles). Dans ce contexte la compréhension des solutions des équations devient nécessaire.

Le groupe libre de rang 2 est le produit libre de deux copies de $\mathbb{Z}$; d'où l'idée de voir si les techniques utilisées dans ce cadre, et certaines propriétés des groupes limites, et par conséquent les solutions des équations, peuvent se généraliser aux produits libres. L'idée principale est de remplacer l'action du groupe libre sur son graphe de Cayley par l'action d'un produit libre sur l'arbre de Bass-Serre qui lui est associé.

Le présent projet de thèse propose d'étudier ces actions, leurs limites et leurs utilisation dans l'étude des équations dans un produit libre. Bien sûr, dans un premier temps, il faudra certainement se restreindre à certains types de groupes. Pour être plus précis, voici un shéma général plus détaillé.

Soient G_1 et G_2 deux groupes nontriviaux et soit $G = G_1 * G_2$ leur produit libre. Soit $w(x_1, \cdots, x_n) = 1$ une équation (on suppose pour simplifier, qu'elle est sans paramètres). Soit $H = \langle x_1, \cdots, x_n | w(x_1, \cdots, x_n) = 1\rangle$. Alors l'ensemble des solutions dans G de l'équation $w(x_1, \cdots, x_n) = 1$ peut être vu comme l'ensemble des homomorphismes de H dans G. Donc l'étude des solutions d'une équation revient à l'étude de l'ensemble des homomorphismes d'un groupe donné H dans G.

On considère l'action de G sur l'arbre de Bass-Serre T qui lui est associé. Pour chaque homomorphisme f de H dans G, H a une action sur T, par $h.x = f(h)x; x \in T$. Si on considère une suite d'homomorphismes $(f_n)_{n\geq 0}$, on obtient une suite d'actions de H sur T. Si la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ vérifie des bonnes propriétés, on obient une action de H sur la limite des arbres, donc sur un arbre réel. Bien sûr tout le problème c'est d'avoir une "bonne" action de H sur l'arbre réel en question, à partir de laquelle on peut déduire des propriétés de H. C'est toute l'étude qu'il faudra réaliser : voir quelles sont les conditions que doivent satisfaire G_1 et G_2 pour que l'action soit "bonne".

On entend par une "bonne" action une action qui à peu près les mêmes propriétés que celle obtenue à partir d'un groupe libre. Dans ce cadre, il faudra envisager aussi des généralisations des actions stables étudiées par Rips et Sela sur les arbres réels. Dans un premier temps l'étude sera restreinte au cas où G_1 et G_2 sont des groupes nilpotents libres; c'est le context le plus proche des groupes abéliens libres.

Les connaissances et compétences requises : théorie des groupes, actions sur les arbres, théorie de Bass-Serre, actions sur les arbres réels.

Abderezak OULD HOUCINE, Université de Lyon, Université Lyon1, CNRS, UMR 5208, Institut Camille Jordan, Bâtiment du Doyen Jean Braconnier, 43, blvd du 11 novembre 1918, F-69200 Villeurbanne Cedex, France.

E-mail address: `ould@math.univ-lyon1.fr`