Groupes d’automorphismes de structures universelles.

Ecole Doctorale : Mathématiques et Informatique Fondamentale (Lyon), n°336.

Equipe de recherche : Institut Camille Jordan, UMR n° 5208 CNRS, équipe d’Algèbre, Géométrie et Logique.

Localisation : Université Claude Bernard, Lyon.

Directeur de thèse : Eric Jaligot.

Codirecteur : Julien Melleray.

Contact scientifique : Eric Jaligot, courriel : jaligot@math.univ-lyon1.fr .

Titre de la thèse : Groupes d’automorphismes de structures universelles .

Description du projet :
Le sujet de these proposé concerne les groupes d’automorphismes des structures mathématiques "riches" ou "universelles", plus precisément la question de savoir comment la richesse de la structure se transmet à son groupe d’automorphismes. Cette question semble ne pas avoir ete étudiée de façon systematique et peut se poser comme suit dans le formalisme très général de la théorie des modèles en logique mathématique : Etant donnée une classe $\mathcal{C}$ de structures (dans un langage fixé) ayant un modèle universel M, quand et comment est-il vrai que le groupe d’automorphismes de M est universel pour la classe des groupes d’automorphismes des structures de la classe $\mathcal{C}$? La notion d’universalite peut revêtir plusieurs formes et être couplée notamment a des notions d’homogenéité, comme par exemple dans le cas des "limites de Fraïssé", qui inclut entre autres objets intéressants le graphe aléatoire et l’espace d’Urysohn rationnel.

Des réponses a la question générale ci-dessus sont connus dans certains cas particuliers d’après des travaux des deux directeurs de these : Jaligot a étudié le cas des tournois, une classe de graphes qui semble concentrer l’ensemble des difficultés pour ce type de questions pour les structures purement relationelles, et Melleray a traité des analogues métriques de ces questions. Dans les deux cas évoqués il s’agit d’universalité au sens de stabilisateurs de certains ensembles infinis co-infinis, mais il existe aussi des résultats d’universalité au sens d’action transitives, et au sens de la complexité descriptive de certaines actions, entre autres l’action par conjugaison du groupes d’automorphismes de la structure riche sur l’ensemble de ses sous-groupes fermés. Le premier enjeu très concret de la thèse consisterait à trouver des formes uniformes des preuves de ces résultats, afin de mettre en lumière la théorie générale qui se cache très probablement derrière.

Ces questions sont aussi reliées à certaines propriétés, nécessaires et/ou suffisantes, d'amalgamation concernant la classe $\mathcal{C}$ de structures de base. Certains travaux récents de Kechris et Rosendal etablissent aussi des liens avec l'existence d'automorphismes "génériques" et leurs conséquences sur certaines propriétés algébriques du groupe d'automorphismes de la structure riche (propriété de Bergman, propriété du petit indice). Des questions analogues restent ouvertes en général, comme par exemple dans le cas très "rigide" des tournois. D'autres liens sont aussi connus en direction de la dynamique topologique, une branche particulierement active des mathematiques contemporaines, et de la théorie de Ramsey, dans une direction plus combinatoire de théorie des ensembles (travaux de Kechris-Pestov-Todorcevic en particulier). Un autre enjeu de la thèse serait de développer tous ces liens dans notre cadre plus général.

Ainsi, ce sujet de thèse propose une unification importante de nombreuses branches des mathématiques comme la théorie descriptive des ensembles, la combinatoire, la théorie des modèles, la théorie abstraite des groupes de permutations et la dynamique topologique.

Connaissances et compétences requises :

Ce sujet se situe au confluent de diverses branches des mathématiques, qui ne peuvent pas être toutes connues d'un étudiant ; il est donc difficile de cerner précisément les connaissances requises. Il faut avant tout que l'étudiant possède une bonne maturité mathématique, qui lui permette d'assimiler et de mettre en relation des notions issues de diverses branches des mathématiques. Il nous semble néanmoins important qu'un étudiant souhaitant travailler sur ce sujet possède de solides connaissances en théorie des modèles et/ou en combinatoire, ainsi qu'une bonne maîtrise des notions de base de la théorie des groupes et de la topologie.