C. R. Acad. Sci. Paris, t. xxx, Série I, p. xxx–xxx, 2005
Théorie des nombres/*Number Theory*
(Combinatoire/*Combinatorics*)

Démonstration de la conjecture de Dumont

Bodo LASS

Institut Camille Jordan, UMR 5208 du CNRS, Université Claude Bernard Lyon 1,
43, Boulevard du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex, France
Courriel : lass@igd.univ-lyon1.fr

(Reçu le 11 juillet 2005, accepté le 11 octobre 2005)

À Dominique Foata, pour son 70-ième anniversaire

Résumé. Soit

$$r_k^{1(2)}(n) := |\{(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in\mathbb{N}^k \mid n = x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2,\ x_i\equiv 1 \pmod 2,\ 1\le i\le k\}|,$$
$$c_k^{1(4)}(n) := |\{(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in\mathbb{N}^k \mid n = x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{k-1}x_k+x_kx_1,\ x_i\equiv 1\ (4)\}|,$$
$$c_k^{3(4)}(n) := |\{(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in\mathbb{N}^k \mid n = x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{k-1}x_k+x_kx_1,\ x_i\equiv 3\ (4)\}|.$$

Dumont [2] a conjecturé l'identité $r_k^{1(2)}(n)=c_k^{1(4)}(n)-(-1)^k c_k^{3(4)}(n)$ qui généralise, notamment, les résultats classiques de Lagrange, Gauß, Jacobi et Kronecker sur les décompositions de tout entier en deux, trois et quatre carrés. Nous donnons une preuve combinatoire de la conjecture de Dumont. © Académie des Sciences, Paris

A proof of Dumont's conjecture

Abstract. *Let*

$$r_k^{1(2)}(n) := |\{(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in\mathbb{N}^k \mid n = x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2,\ x_i\equiv 1 \pmod 2,\ 1\le i\le k\}|,$$
$$c_k^{1(4)}(n) := |\{(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in\mathbb{N}^k \mid n = x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{k-1}x_k+x_kx_1,\ x_i\equiv 1\ (4)\}|,$$
$$c_k^{3(4)}(n) := |\{(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in\mathbb{N}^k \mid n = x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{k-1}x_k+x_kx_1,\ x_i\equiv 3\ (4)\}|.$$

Dumont [2] has conjectured the identity $r_k^{1(2)}(n)=c_k^{1(4)}(n)-(-1)^k c_k^{3(4)}(n)$, which generalizes, in particular, the classical results of Lagrange, Gauß, Jacobi and Kronecker on the sums of two, three and four squares. We give a combinatorial proof of Dumont's conjecture. © Académie des Sciences, Paris

Abridged English Version

Let $\mathbb{N}^{a(b)}$ denote the set of strictly positive integers congruent to a modulo b, and let k and n be integers such that $1 \le k \le n$ and $n \equiv k \pmod 8$. We want to count the number of solutions of the following Diophantine equations:

$$r_k^{1(2)}(n) := |\{(x_1,x_2,\ldots,x_k) \in (\mathbb{N}^{1(2)})^k \mid n = x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2\}|,$$
$$c_k^{1(4)}(n) := |\{(x_1,x_2,\ldots,x_k) \in (\mathbb{N}^{1(4)})^k \mid n = x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{k-1}x_k+x_kx_1\}|,$$
$$c_k^{3(4)}(n) := |\{(x_1,x_2,\ldots,x_k) \in (\mathbb{N}^{3(4)})^k \mid n = x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{k-1}x_k+x_kx_1\}|.$$

Note présentée par Étienne GHYS.

Let $y_1, y_2, \ldots, y_k$ be arbitrary strictly positive integers. The equivalence

$$m \;=\; \binom{y_1}{2} + \binom{y_2}{2} + \cdots + \binom{y_k}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 8m + k \;=\; (2y_1-1)^2 + (2y_2-1)^2 + \cdots + (2y_k-1)^2$$

shows that the congruence $n \equiv k \pmod 8$ is satisfied automatically in the first Diophantine equation (this is true for the two other equations too) and that $r_k^{1(2)}(n)$ also counts the number of decompositions of $(n-k)/8$ into k triangular numbers. Moreover, Jacobi's two and four odd squares theorems tell us that for $n \equiv 2 \pmod 8$ and $n \equiv 4 \pmod 8$ we have

$$r_2^{1(2)}(n) = \sum_{d|(n/2)} (-1)^{(d-1)/2}, \qquad r_4^{1(2)}(n) = \sum_{d|(n/4)} d,$$

respectively (the sums go over all positive divisors), whereas Kronecker's three odd squares theorem gives

$$r_3^{1(2)}(n) = |\{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3 \mid n = 4ac - b^2, b > 0, b < 2a, b < 2c\}|$$

for $n \equiv 3 \pmod 8$. The aim of André Weil's article [3] is to prove exactly those three theorems. Up to now, we could not see in such results anything else than special cases of the general conjecture that number theory is less beautiful than combinatorics. Dominique Dumont [2], however, recently recognized them as the cases $k = 2, 3, 4$ of the following marvellous conjecture (which he also proved for $n - k = 0, 8, 16, 24, 32, 40$).

Conjecture (Dumont). – *The following relation holds for all positive integers n and k:*

$$r_k^{1(2)}(n) \;=\; c_k^{1(4)}(n) - (-1)^k c_k^{3(4)}(n).$$

Once the right statement has been found, the proof almost takes care of itself. We think that this aphorism can be applied directly to Dumont's conjecture. In any case, it can be applied to our main result :

Theorem. – *Let the infinite matrices $A = (a_{ij})$ and $B = (b_{ij})$, $i,j = 0,1,2,3,\ldots$ be defined by $a_{ij} := q^{(4i+1)(4j+1)}$ for all i,j and by $b_{ij} := -q^{(4i-1)(4j-1)}$, $b_{0j} = b_{i0} = 0$ for $i,j > 0$, whereas $b_{00} := \sum_{n=0}^{\infty} q^{(2n+1)^2}$. Then there exists an inversible matrix X (defined in the main version) such that $XB = AX$. In particular, $\operatorname{tr}[A^k] = \operatorname{tr}[B^k]$, which is the generating function formulation of the identity $c_k^{1(4)}(n) = r_k^{1(2)}(n) + (-1)^k c_k^{3(4)}(n)$.*

---

1. Combinatoire

En suivant Andrews [1], commençons par rappeler les plus beaux théorèmes de la combinatoire des q-séries formelles (ceux qui préfèrent l'analyse complexe pourront supposer $|q| < 1$), qui utilisent tous les notations

$$(a;q)_n := (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1}), \quad (a;q)_\infty := \lim_{n\to\infty} (a;q)_n, \quad (a;q)_0 := 1.$$

Théorème q-Binomial (Cauchy).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}\, t^n \;=\; \frac{(at;q)_\infty}{(t;q)_\infty}.$$

Démonstration. – Posons $F(t) := (at;q)_\infty/(t;q)_\infty =: \sum_{n=0}^{\infty} A_n(a;q)\, t^n$. On vérifie immédiatement $(1-t)F(t) = (1-at)(atq;q)_\infty/(tq;q)_\infty = (1-at)F(tq)$, d'où $A_n(a;q) - A_{n-1}(a;q) = q^n A_n(a;q) - aq^{n-1}A_{n-1}(a;q)$, i.e. $A_n(a;q) = A_{n-1}(a;q)(1-aq^{n-1})/(1-q^n)$. $\square$

Corollaire (Euler).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(q;q)_n} \;=\; \frac{1}{(t;q)_\infty}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n(n-1)/2}}{(q;q)_n} \;=\; (-t;q)_\infty.$$

Démonstration. – Il suffit de poser $a=0$ ou bien de remplacer a par a/b et t par bt pour ensuite poser $b=0$ et $a=-1$. $\square$

Théorème Triple Produit (Jacobi).

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n \;=\; (q^2;q^2)_\infty(-qz;q^2)_\infty(-q/z;q^2)_\infty.$$

Démonstration. – Nous utilisons trois fois le corollaire précédent:

$$\begin{aligned}
(q^2;q^2)_\infty(-qz;q^2)_\infty &= (q^2;q^2)_\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}z^n}{(q^2;q^2)_n} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2}z^n(q^{2n+2};q^2)_\infty \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}z^n(q^{2n+2};q^2)_\infty \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}z^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m q^{m^2+m+2mn}}{(q^2;q^2)_m} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m q^m z^{-m}}{(q^2;q^2)_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+m)^2} z^{n+m} \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-q/z)^m}{(q^2;q^2)_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}z^n \\
&= \frac{1}{(-q/z;q^2)_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}z^n. \quad \square
\end{aligned}$$

Corollaire (Gauss).

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \;=\; \frac{(q;q)_\infty}{(-q;q)_\infty}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2} \;=\; \frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty}.$$

Démonstration. – L'identité $1+q^n = (1-q^{2n})/(1-q^n)$ entraîne $(-q;q)_\infty = (q^2;q^2)_\infty/(q;q)_\infty = 1/(q;q^2)_\infty$. Les cas $z=-1$ et $z=q$ du théorème précédent impliquent donc bien les deux identités $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} = (q^2;q^2)_\infty(q;q^2)_\infty(q;q^2)_\infty = (q;q)_\infty(q;q^2)_\infty = (q;q)_\infty/(-q;q)_\infty$ et $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(n+1)/2} = \frac{1}{2}(q;q)_\infty(-q;q)_\infty(-1;q)_\infty = (q;q)_\infty(-q;q)_\infty(-q;q)_\infty = (q^2;q^2)_\infty(-q;q)_\infty = (q^2;q^2)_\infty/(q;q^2)_\infty$. $\square$

2. Algèbre linéaire

Nous regardons maintenant des matrices infinies $A = (a_{ij})$, $i, j = 0, 1, 2, 3, \ldots$, dont les éléments a_{ij} sont des q-séries formelles. Appelons une telle matrice *admissible* si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $|i-j| > k$ implique $\deg(a_{ij}) > n$, où $\deg(\sum_{m=0}^{\infty} a_m q^m)$ est la plus petite valeur de m avec $a_m \neq 0$ ($\deg(0) = \infty$). Autrement dit, une matrice est admissible si sa réduction modulo q^N est concentrée sur un nombre fini de lignes diagonales pour tout N. L'identité I est admissible et le produit AB de deux matrices admissibles A et B est bien défini et admissible. De plus, la multiplication des matrices admissibles est associative. Si $A = (a_{ij})$ est une matrice admissible avec $\deg(a_{ij}) > 0$ pour tout i, j, alors $(I + A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k$ est également bien défini et admissible. Appelons la matrice $A = (a_{ij})$ *admise* si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $\max(i, j) > k$ implique $\deg(a_{ij}) > n$. Autrement dit, une matrice est admise si sa réduction modulo q^N est une matrice finie pour tout N. Pour chaque matrice admise $\mathrm{tr}\big[A\big]$ est bien définie. De plus, si A est une matrice admise et X est une matrice admissible, alors AX et XA sont des matrices admises et l'on a l'identité $\mathrm{tr}\big[AX\big] = \mathrm{tr}\big[XA\big]$.

Nous nous intéressons ici plus spécialement aux matrices de la forme q^{ij} (pour les étudier dans le cas $|q| < 1$ et mettre fin à « l'injustice de la transformation de Fourier » de se borner au bord $|q| = 1$). Définissons donc les deux matrices admises $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ et la matrice admissible $X = (x_{ij})$ par

$$a_{ij} := q^{(4i+1)(4j+1)},$$

$$b_{ij} := \begin{cases} -q^{(4i-1)(4j-1)}, & \text{si } \ i, j > 0, \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^{(2n+1)^2}, & \text{si } \ i = j = 0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \qquad x_{ij} := \begin{cases} -\dfrac{q^{12(j-i-1)+4}}{1 - q^{16(j-i-1)+8}}, & \text{si } \ j > i, \\[2ex] \dfrac{q^{4(i-j)}}{1 - q^{16(i-j)+8}}, & \text{si } \ 1 \le j \le i, \\[2ex] \dfrac{(q^8; q^{16})_i}{(q^{16}; q^{16})_i}\, q^{4i}, & \text{si } \ j = 0. \end{cases}$$

Théorème. – *Nous avons* $XB = AX$.

Démonstration. – D'abord, il nous faut montrer, pour tout $i \ge 0$ et $j \ge 1$, que

$$-\sum_{m=1}^{i} \frac{q^{4(i-m)}}{1 - q^{16(i-m)+8}} \cdot q^{(4m-1)(4j-1)} + \sum_{m=i+1}^{\infty} \frac{q^{12(m-i-1)+4}}{1 - q^{16(m-i-1)+8}} \cdot q^{(4m-1)(4j-1)}$$

$$= -\sum_{n=0}^{j-1} \frac{q^{12(j-n-1)+4}}{1 - q^{16(j-n-1)+8}} \cdot q^{(4n+1)(4i+1)} + \sum_{n=j}^{\infty} \frac{q^{4(n-j)}}{1 - q^{16(n-j)+8}} \cdot q^{(4n+1)(4i+1)}.$$

En posant $m - i - 1 = n - j = k$, nous obtenons

$$\sum_{n=j}^{\infty} \frac{q^{4(n-j)}}{1 - q^{16(n-j)+8}} \cdot q^{(4n+1)(4i+1)} - \sum_{m=i+1}^{\infty} \frac{q^{12(m-i-1)+4}}{1 - q^{16(m-i-1)+8}} \cdot q^{(4m-1)(4j-1)}$$

$$= q^{16ij+4j-4i+1} \sum_{k=0}^{\infty} q^{8k} \frac{(q^{16k+8})^i - (q^{16k+8})^j}{1 - q^{16k+8}} \; = \; q^{16ij+4j-4i+1} \sum_{k=0}^{\infty} q^{8k} (-1)^{[i>j]} \sum_{l=\min(i,j)}^{\max(i,j)-1} (q^{16k+8})^l$$

$$= (-1)^{[i>j]} q^{16ij+4j-4i+1} \sum_{l=\min(i,j)}^{\max(i,j)-1} \frac{q^{8l}}{1 - q^{16l+8}}, \qquad \text{où } \ [i > j] := \begin{cases} 1, & \text{si } \ i > j, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'autre part, en posant $i-m=j-n-1=k$, nous obtenons

$$\sum_{m=1}^{i} \frac{q^{4(i-m)}}{1-q^{16(i-m)+8}} \cdot q^{(4m-1)(4j-1)} - \sum_{n=0}^{j-1} \frac{q^{12(j-n-1)+4}}{1-q^{16(j-n-1)+8}} \cdot q^{(4n+1)(4i+1)}$$

$$= q^{16ij+4j-4i+1}\left[(-1)^{[j>i]} \sum_{k=\min(i,j)}^{\max(i,j)-1} q^{8k}\frac{(q^{16k+8})^{-\min(i,j)}}{1-q^{16k+8}} + \sum_{k=0}^{\min(i,j)-1} q^{8k}\frac{(q^{16k+8})^{-j}-(q^{16k+8})^{-i}}{1-q^{16k+8}}\right]$$

$$= (-1)^{[j>i]}q^{16ij+4j-4i+1}\left[\sum_{k=\min(i,j)}^{\max(i,j)-1} q^{8k}\frac{(q^{16k+8})^{-\min(i,j)}}{1-q^{16k+8}} - \sum_{k=0}^{\min(i,j)-1} q^{8k} \sum_{l=\min(i,j)}^{\max(i,j)-1} (q^{16k+8})^{-l-1}\right]$$

$$= (-1)^{[j>i]}q^{16ij+4j-4i+1}\left[\sum_{l=\min(i,j)}^{\max(i,j)-1} q^{8l}\frac{(q^{16l+8})^{-\min(i,j)}}{1-q^{16l+8}} - \sum_{l=\min(i,j)}^{\max(i,j)-1} q^{-8(l+1)} \sum_{k=0}^{\min(i,j)-1} (q^{16l+8})^{-k}\right]$$

$$= (-1)^{[j>i]}q^{16ij+4j-4i+1}\sum_{l=\min(i,j)}^{\max(i,j)-1}\left[q^{8l}\frac{(q^{16l+8})^{-\min(i,j)}}{1-q^{16l+8}} - q^{-8(l+1)}\frac{(q^{16l+8})^{-\min(i,j)+1}-q^{16l+8}}{1-q^{16l+8}}\right]$$

$$= (-1)^{[j>i]}q^{16ij+4j-4i+1}\sum_{l=\min(i,j)}^{\max(i,j)-1}\frac{q^{8l}}{1-q^{16l+8}},$$

ce qui achève la démonstration dans le cas $i \geq 0$ et $j \geq 1$. Dans le cas $j=0$, grâce aux identités de Cauchy et de Gauß, nous avons pour tout i

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^8;q^{16})_n}{(q^{16};q^{16})_n}\, q^{4n} \cdot q^{(4n+1)(4i+1)} \;=\; q^{4i+1}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^8;q^{16})_n}{(q^{16};q^{16})_n}\,(q^{16i+8})^n \;=\; q^{4i+1}\frac{(q^{16i+16};q^{16})_\infty}{(q^{16i+8};q^{16})_\infty}$$

$$= q\,\frac{(q^{16};q^{16})_\infty}{(q^8;q^{16})_\infty}\cdot\frac{(q^8;q^{16})_i}{(q^{16};q^{16})_i}\,q^{4i} \;=\; \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^{(2n+1)^2}\right]\cdot\frac{(q^8;q^{16})_i}{(q^{16};q^{16})_i}\,q^{4i}. \quad \square$$

Corollaire. – *Nous avons* $c_k^{1(4)}(n) = r_k^{1(2)}(n) + (-1)^k c_k^{3(4)}(n)$.

Démonstration. – $\mathrm{tr}\big[A^k\big] = \mathrm{tr}\big[(XBX^{-1})^k\big] = \mathrm{tr}\big[(XB^k)X^{-1}\big] = \mathrm{tr}\big[X^{-1}(XB^k)\big] = \mathrm{tr}\big[B^k\big]$. $\square$

3. Théorie des nombres

Terminons cette Note avec quelques applications de notre théorème principal, en commençant avec le théorème dit « *Eurêka* » de Gauß.

Corollaire (Gauss). – *Tout nombre naturel se décompose en trois nombres triangulaires.*

Démonstration. – Puisque $m = \binom{y_1}{2}+\binom{y_2}{2}+\binom{y_3}{2} \Leftrightarrow 8m+3 = (2y_1-1)^2+(2y_2-1)^2+(2y_3-1)^2$, il faut montrer que $r_3^{1(2)}(8m+3) = c_3^{1(4)}(8m+3)+c_3^{3(4)}(8m+3) > 0$. En effet, en posant $x_1 = x_2 = 1$ et $x_3 = 4m+1$, nous avons $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = 8m+3$. $\square$

Corollaire (Jacobi).

$$r_2^{1(2)}(8m+2) \; = \; \sum_{d|4m+1} (-1)^{(d-1)/2}.$$

Démonstration. – Nous avons bien $8m+2 = x_1x_2 + x_2x_1 \;\Leftrightarrow\; 4m+1 = x_1x_2$. $\square$

Corollaire (Jacobi).

$$r_4^{1(2)}(8m+4) \; = \; \sum_{d|2m+1} d.$$

Démonstration. – Nous avons bien $8m+4 = x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1 \;\Leftrightarrow\; 2m+1 = \frac{x_1+x_3}{2}\cdot\frac{x_2+x_4}{2}$. Il s'ensuit que $r_4^{1(2)}(8m+4) = c_4^{1(4)}(8m+4) - c_4^{3(4)}(8m+4) = \sum_{d\cdot d'=2m+1} \frac{2d+2}{4}\cdot\frac{2d'+2}{4} - \frac{2d-2}{4}\cdot\frac{2d'-2}{4} = \sum_{d\cdot d'=2m+1} \frac{d+d'}{2} = \sum_{d|2m+1} d$. $\square$

Corollaire (Jacobi). – *Notons* $r_2(n) := |\{(x_1,x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid n = x_1^2 + x_2^2\}|$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Alors*

$$r_2(n) \; = \; 4 \sum_{d|n,\; 2\nmid d} (-1)^{(d-1)/2}.$$

Démonstration. – L'équivalence $2n = (x_1+x_2)^2 + (x_1-x_2)^2 \;\Leftrightarrow\; n = x_1^2 + x_2^2$ fournit une preuve bijective que $r_2(2n) = r_2(n)$, parce que l'on a automatiquement $y_1 \equiv y_2 \pmod 2$ si $2n = y_1^2 + y_2^2$. Il suffit donc de démontrer le corollaire dans le cas $n \equiv 2 \pmod 4$. Dans ce cas, cependant, nous avons $r_2(n) = 4r_2^{1(2)}(n)$. $\square$

Corollaire (Jacobi). – *Notons* $r_4(n) := |\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{Z}^4 \mid n = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\}|$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Alors*

$$r_4(n) \; = \; 8 \sum_{d|n,\; 4\nmid d} d.$$

Démonstration. – L'équivalence $2n = (x_1+x_2)^2 + (x_1-x_2)^2 + (x_3+x_4)^2 + (x_3-x_4)^2 \;\Leftrightarrow\; n = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ fournit une preuve bijective que $r_2(2n) = r_2(n)$ si n est pair, parce que l'on a automatiquement $y_1 \equiv y_2 \equiv y_3 \equiv y_4 \pmod 2$ si $2n = y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2$. Si n est impair, alors exactement un tiers des solutions de $2n = y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2$ satisfait aux relations $y_1 \equiv y_2 \pmod 2$ et $y_3 \equiv y_4 \pmod 2$, c'est-à-dire $r_2(2n) = 3r_2(n)$. Comme $4 \nmid d$ assure les mêmes relations pour le membre de droite, il suffit de démontrer le corollaire dans le cas $n \equiv 4 \pmod 8$. Dans ce cas, cependant, nous avons $r_4(n) = 16r_4^{1(2)}(n) + r_4(n/4) = 16r_4^{1(2)}(n) + r_4(n)/3$, i.e. $r_4(n) = 24r_4^{1(2)}(n)$. $\square$

Corollaire (Lagrange). – *Tout nombre naturel se décompose en quatre carrés.* $\square$

Remerciements. En tout premier lieu, je voudrais remercier vivement Dominique Dumont d'avoir rendu possible la rédaction de cet article en présentant sa conjecture merveilleuse au séminaire « Théorie des nombres et Combinatoire » à l'Institut Camille Jordan. Je remercie aussi Victor Guo, Frédéric Chapoton et un arbitre pour des remarques utiles.

Références bibliographiques

[1] Andrews G., The theory of partitions, Cambridge University Press, 1998; en russe: Teoriya razbienii, Nauka, 1982.

[2] Dumont D., A Conjecture on Sums of Any Number of Odd Squares, prépublication.

[3] Weil A., Sur les sommes de trois et quatre carrés, Enseignement Math. II. Sér. 20 (1974) 215-222.