Développements limités et réversion des séries

R. Bacher et B. Lass

October 23, 2006

Résumé: Nous étudions quelques propriétés nouvelles liées aux développements limités et à la transformée de Hankel. Nous les démontrons en utilisant l'approche combinatoire de la réversion des séries et des fractions continues.

1 Introduction

Le but de cet article est de décrire quelques interactions entre combinatoire et algèbre. Plus précisément, nous étudions certains liens entre la réversion des séries (formelles) et les matrices de Hankel. Les deux sujets sont classiques : la plupart des fonctions importantes, par exemple exp, sin ou tan, possèdent en effet des fonctions inverses (log, arcsin, arctan dans notre cas) et un théorème célèbre de Lagrange relie le développement en série d'une fonction analytique au développement en série de sa fonction inverse (pour la composition). Du côté de la combinatoire, inverser des séries génératrices est une technique standard, par exemple pour la résolution de problèmes d'énumération, voir [8]. La formule de Lagrange-Bürmann est également utile dans l'étude de certains aspects des formes modulaires, voir [15]. Les matrices de Hankel apparaissent naturellement lorsqu'on considère les moments d'une mesure de probabilité convenable sur $\mathbb{R}$ et sont étroitement reliées aux polynômes orthogonaux et à certaines fractions continues. Un traitement combinatoire de ces matrices a été donné par exemple par Flajolet dans [5] ou par Viennot dans [19] et [20]. Les références [11] et [18] contiennent également quelques informations historiques.

Notre article est organisé comme suit.

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons le théorème de Lagrange (concernant la réversion des séries) et une preuve classique au début du chapitre 2. Dans le reste du chapitre, nous énonçons notre résultat principal, un lien entre le théorème de Lagrange et une suite de développements limités.

Le chapitre 3 relie la suite associée aux développements limités à la “transformée inverse”.

Le chapitre 4 contient deux exemples illustrant les résultats énoncés.

Le chapitre 5, indépendant du reste, décrit une déformation continue naturelle qui permet d'interpoler entre l'inversion $\frac{1}{f}$ et la réversion $(xf)^{\langle -1\rangle}$ d'une série formelle $f = 1 + x\mathbb{C}[[x]]$.

Nous discutons ensuite quelques jolies propriétés de la matrice de Hankel associée à la suite obtenue par des développements limités, au chapitre 6.

Le chapitre 7 rappelle une interprétation combinatoire classique qui fait le lien entre les matrices de Hankel et divers objets combinatoires (chemins, mots de Łukasiewicz). Ces ingrédients sont ensuite utilisés pour prouver une partie de nos résultats. Ce chapitre contient également des preuves succinctes de résultats classiques (à l'exception de la Proposition 2 qui est peut-être moins connue) ainsi qu'une digression décrivant une action du groupe diédral infini sur les mots de Łukasiewicz.

Le chapitre final contient des résultats concernant les déterminants de matrices de Hankel ainsi que les preuves des résultats non démontrés antérieurement.

Dans la suite, nous travaillerons toujours sur un corps de caractéristique zéro.

2 Le théorème d'inversion de Lagrange

L'ensemble des séries formelles du type $p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n$ telles que $\alpha_1 \neq 0$ (pour un corps de base fixé une fois pour toutes) constitue un groupe pour la *composition*. L'inverse $q(x)$ d'une telle série $p(x)$ est uniquement défini par l'équation $q \circ p(x) = x$, et d'ailleurs aussi par $p \circ q(x) = x$. Le passage de p à q, qui est ce que nous appelons ici la *réversion des séries*, est l'objet d'un théorème célèbre de Lagrange, qui semble avoir son origine historique dans l'article [13].

Pour la commodité du lecteur, nous indiquons d'abord au théorème 1 une démonstration du théorème de Lagrange sans doute assez proche de l'original, en suivant le joli article de Henrici [11]. Par ailleurs, le chapitre 7 contient une autre démonstration classique, basée sur la combinatoire des mots de Łukasiewicz. Il existe de nombreuses autres présentations, dont [2], pages 158-161, [8], pages 15-18, [9], pages 129-133, [16], pages 145-149, [18], pages 38-39, [21], pages 128-136.

L'ensemble des séries formelles du type $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ telles que $s_0 \neq 0$ constitue un autre groupe pour la *multiplication*. Le passage de $s(x)$ à $1/s(x)$ est ce que nous appelons ici *l'inversion des séries*, et nous y revenons aux chapitres 3 et 5. Il faut néanmoins prendre garde au fait que de nombreux auteurs utilisent le terme “inversion” dans le contexte du théorème de Lagrange.

Soit $g(x) = \sum_{n \geq N} \gamma_n x^n$ une série de Laurent formelle à une indéterminée, où $N \in \mathbb{Z}$ et où les coefficients γ_n sont dans le corps de base ; on pose $\gamma_n = 0$ pour $n < N$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous écrivons $[x^n](g(x))$ le n–ième coefficient γ_n de $g(x)$. Le théorème de Lagrange, ou de Lagrange–Bürmann, établit une relation entre les coefficients $\alpha_n = [x^n](q(x))$ et les coefficients $[x^{n-1}]\left(\left(\frac{x}{p(x)}\right)^n\right)$ pour $q(x)$ la réversion d'une série $p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n$ avec $\alpha_1 \neq 0$.

Théorème 1. *Soient $p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n$ une série formelle sans terme constant telle que $\alpha_1 \neq 0$, et $q(x)$ la série du même type telle que $q \circ p(x) = p \circ q(x) = x$. Alors*

$$n[x^n]\left(q^k(x)\right) \;=\; k[x^{n-k}]\left(\left(\frac{x}{p(x)}\right)^n\right)$$

pour tous $n, k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration, d'après [11]. Considérons une série de Laurent formelle $g(x)$ et la série de Laurent

$$g \circ q(x) \;=\; \sum_{j \geq N} \gamma_j x^j .$$

Nous obtenons d'abord

$$g \circ q \circ p(x) \;=\; g(x) \;=\; \sum_{j \geq N} \gamma_j p^j(x)$$

en composant avec $p(x)$ à la source, puis, pour $n \in \mathbb{Z}$ arbitraire,

$$(*) \qquad g(x)\frac{p'(x)}{p^{n+1}(x)} = \sum_{j \geq N} \gamma_j p^{j-n-1}(x)p'(x)$$

en multipliant par $p'(x)/p^{n+1}(x)$.

Nous allons appliquer deux règles de calcul très simples pour le calcul des résidus. La première concerne les dérivées : $[x^{-1}](h'(x)) = 0$ pour toute série de Laurent formelle $h(x)$; en particulier,

$$[x^{-1}]\left(p^{j-n-1}(x)p'(x)\right) = [x^{-1}]\left(\frac{d}{dx}\frac{p^{j-n}(x)}{j-n}\right) = 0$$

pour $j \neq n$. La seconde concerne les dérivées logarithmiques : $[x^{-1}]\left(\frac{h'(x)}{h(x)}\right) = 1$ pour toute série de puissance de la forme $h(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j x^j$ avec $\delta_1 \neq 0$.

En égalant les résidus des deux termes de (*), nous trouvons donc

$$(**) \qquad [x^{-1}]\left(g(x)\frac{p'(x)}{p^{n+1}(x)}\right) = [x^{-1}]\left(\gamma_n \frac{p'(x)}{p(x)}\right) = \gamma_n.$$

Comme le résidu de la série de Laurent $\frac{1}{n}(g/p^{-n})'(x) = \frac{g'(x)}{np^n(x)} - \frac{g(x)p'(x)}{p^{n+1}(x)}$ est nul, nous avons aussi

$$(***) \qquad n[x^n]\left(g \circ q(x)\right) = n\gamma_n = [x^{-1}]\left(\frac{g'(x)}{p^n(x)}\right).$$

En particulier, lorsque $g(x) = x^k$, nous avons

$$[x^{-1}]\left(\frac{kx^{k-1}}{p^n(x)}\right) = [x^{n-k}]\left(\frac{kx^n}{p^n(x)}\right)$$

et le théorème résulte de ce cas de l'égalité (***). □

Remarques. (i) Plus généralement, la formule (***) fournit le n–ième terme de la série de Laurent $g \circ q(x)$ pour tout $n \neq 0$, et la formule (**) pour $n = 0$ s'écrit

$$[x^0](g \circ q(x)) = [x^{-1}]\left(g(x)\frac{p'(x)}{p(x)}\right).$$

(ii) Si les coefficients sont complexes et si le rayon de convergence de la série $p(x)$ est strictement positif, alors il en est de même de celui de $q(x)$.

(iii) D'un point de vue numérique, la série de von Neumann $(\mathcal{J} - H)^{\langle -1 \rangle} = \mathcal{J} + H \circ (\mathcal{J} + H \circ (\mathcal{J} + \dots))$ permet de calculer efficacement la réciproque $(\mathcal{J} - H)^{\langle -1 \rangle}$ d'une perturbation H d'ordre > 1 de l'identité $\mathcal{J}$ en un nombre quelconque de variables. Cette formule est l'analogue compositionelle de la règle de Horner: $1 + H(1 + H(1 + \dots)) = \sum_{n=0}^{\infty} H^n$ qui converge vers $\frac{1}{1-H}$ pour H petit.

Exemples. Le théorème 1 ne s'applique bien au calcul des coefficients de q que s'il est facile de déterminer les coefficients de $\left(\frac{x}{p(x)}\right)^n$.

(i) Si $p(x) = \frac{x}{1+x}$, alors $\frac{x}{p(x)} = 1 + x$ et le théorème 1 implique $[x^n](q(x)) = 1$ pour tout $n \geq 1$, en accord avec les égalités $q(x) = \frac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$. (Notons que les deux séries $p(x)$ et $q(x)$ convergent dans le disque unité.)

(ii) Si $p(x) = xe^{-x}$, on obtient sans peine $q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} x^n$. (Notons que, dans ce cas, le rayon de convergence de $p(x)$ est infini et celui de q est $e^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$.)

De manière analogue, $p(x) = xe^{-x^2}$ donne $q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j+1)^{j-1}}{j!} x^{2j+1}$. (Le rayon de convergence de $p(x)$ est de nouveau infini tandis que la série de $q(x)$ converge absolument pour $|x| < 1/\sqrt{2e}$.)

(iv) Comme déja mentionné, la formule d'inversion de Lagrange-Bürmann n'est que rarement utile pour la réversion d'une série formelle. Des méthodes différentes sont généralement beaucoup plus simples. Un tel exemple est la fonction $p(x^2) = (\sin x)^2$; voir la page 130 de [21]. Nous ne savons pas utiliser la formule de Lagrange pour prouver que la réversion de $p(x)$ est donnée par la fonction hypergéométrique $q(x) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{2j-1} \frac{x^j}{j^2\binom{2j}{j}}$. Un calcul facile montre cependant que $q(x)$ est une solution (formelle) de l'équation différentielle

$$(x^2 - x)y'' + (x - \frac{1}{2})y' + \frac{1}{2} = 0 \ .$$

En dérivant $q(\sin^2(\sqrt{z})) = z$ par rapport à z et en posant $x = \sin^2 \sqrt{z}$, nous trouvons

$$q'(x) = \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$$

et ensuite

$$q''(x) = \frac{1}{2x(1-x)} \left(1 - (1-2x)\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} \right) \ .$$

Ceci montre que $q(x)$ est également solution de l'équation différentielle ci-dessus. Un développement à l'ordre deux des deux séries permet de conclure.

Les deux théorèmes qui suivent fournissent d'autres paires du type $(p(x), q(x))$. L'aspect peut–être original de notre exposition consiste à faire jouer un rôle important aux polynômes P_j (et plus bas aux polynômes Q_j), que nous voyons comme des *développements limités* des séries correspondantes. Si $s(x) = \sum_{j=0}^{\infty} s_j x^j$ est une série entière et k un entier positif, nous notons $\lfloor s(x) \rfloor_k = s_0 + s_1 x + \cdots + s_{k-1}x^{k-1}$ son développement limité à l'ordre $k-1$.

Considérons une série formelle $s(x) = \sum_{j=0}^{\infty} s_j x^j$ telle que $s_0 \neq 0$. Définissons successivement

- les polynômes

  $$P_1(x) = s_0, \quad P_2(x) = s_0^2 + s_0 s_1 x, \quad P_3(x) = s_0^3 + (s_0^2 s_1 + s_0 s_1 s_0)x + (s_0^2 s_2 + s_0 s_1^2)x^2, \ \ldots$$

  définis récursivement par $P_k(x) \ = \ \lfloor P_{k-1}(x)s(x) \rfloor_k$,

- les constantes $Q_n(0) = [x^{n-1}]P_n(x)$, $n \geq 1$, obtenues en considérant les coefficients de plus haut degrés dans les polynômes $P_1(x), P_2(x), \ldots$, où $P_n(x)$ est considéré comme étant de degré $n-1$,

- la série génératrice

  $$q(t) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(0) t^n$$

  des nombres $Q_n(0)$.

Théorème 2. *La série formelle $q(t)$ associée comme ci–dessus à $s(x) = \sum_{j=0}^{\infty} s_j x^j$ vérifie*

$$q(t) \;=\; ts(q(t)).$$

En posant $p(x) = x/s(x))$, on retrouve deux séries $p(x), q(x)$ telles que

$$p(q(t)) \;=\; \frac{q(t)}{s(q(t))} \;=\; \frac{ts(q(t))}{s(q(t))} \;=\; t.$$

Avec ces nouvelles notations, le théorème 1 s'écrit comme suit.

Théorème 3. *Si $q(t) = ts(q(t))$, alors*

$$q(t)^{k+1} = \sum_{n=k+1}^{\infty} t^n \frac{k+1}{n} [x^{n-k-1}] \left(s(x)^n\right)$$

pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ et, en particulier

$$q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} [x^{n-1}] \left(s(x)^n\right).$$

Nous offrons au chapitre 7 une autre preuve des théorèmes 2 et 3 (bien que ce dernier ne soit rien d'autre qu'une reformulation du théorème 1). Cette preuve, de nature combinatoire, n'est pas nouvelle. Elle consiste à interpréter les mots de Łukasiewicz comme des arbres plans enracinés.

3 La transformée inverse

Le but de ce chapitre est de décrire quelques aspects du groupe multiplicatif constitué des séries formelles du type $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ avec $s_0 \neq 0$. Rappelons qu'une telle série définit une suite de polynômes $P_1(x) = s_0, \dots, P_k(x) = \lfloor P_{k-1}(x)s(x) \rfloor_k, \dots$, où $P_k(x)$ est le développement limité à l'ordre $k-1$ de la série formelle $P_{k-1}(x)s(x)$. Introduisons maintenant les polynômes miroir $Q_n(x) = x^{n-1}P_n(1/x)$ et désignons par $q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(0)t^n$ la série génératrice associée à la suite des évaluations $Q_1(0)$, $Q_2(0)$, ...

Le résultat suivant exprime la série génératrice complète $Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)t^n$ en fonction de $q(t)$:

Théorème 4. *On a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)t^n = \frac{q(t)}{1 - xq(t)}\ .$$

Ce théorème sera démontré au chapitre 7. La preuve consiste à identifier les monômes contribuant aux coefficients de $q(t)$ avec les mots de Łukasiewicz.

Nous décrivons maintenant une interprétation en termes de “transformée inverse continue” de cette égalité. Cette interprétation suggère une jolie propriété des transformées de Hankel (décalées) de la série $Q_1(x), Q_2(x), \dots$ qui sera énoncée au chapitre 6 et qui constitue le résultat principal dans cet article.

Soit $a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \cdots$ une série génératrice. Introduisons l'application $I[a(t)] = a(t)/\big(1 + ta(t)\big)$ appellée la *transformée inverse* puisque $\big(1 + ta(t)\big)\big(1 - tI[a(t)]\big) = 1$. Par itération, on obtient $I^x[a(t)] = a(t)/\big(1 + xta(t)\big)$ ce qui permet d'interpoler les itérées

$$I^x(a(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k(x)\ t^k$$

de la transformée inverse. Le $k-$ième terme $I_k(x)$ de la suite

$$I_0(x) = a_0,\ I_1(x) = a_1 - a_0^2 x,\ I_2(x) = a_2 - 2a_0 a_1 x + a_0^3 x^2,\ \ldots$$

est alors un polynôme de degré k en x.

Posons $a(t) = \frac{q(t)}{t} = \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(0) t^n$. Le théorème 4 s'énonce aussi sous la forme

$$I^x\left[\frac{q(t)}{t}\right] = \frac{1}{t}\frac{q(t)}{1 + xq(t)} = \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(-x) t^n\ .$$

Autrement dit, on a $t\ I^x[t^{-1}Q(0)] = Q(-x)$.

Remarque. On aurait tout aussi bien pu définir la transformée de Hankel de $a(t)$ par la formule $\tilde{I}[a(t)] = a(t)/(1 - ta(t)) = -I[-a(t)]$.

Remarque. Un phénomène similaire d'interpolation continue se produit également pour la composition itérée $f^{\circ k} = f \circ f \circ \cdots \circ f$ d'une série formelle $f(t) = t + \sum_{i=2}^{\infty} a_i t^i$ dont le développement à l'ordre 1 est l'identité; ceci se généralise d'ailleurs facilement à un d$-$uplet de séries formelles $F(t_1, \ldots, t_d) = (f_1(t_1, \ldots, t_d), \ldots, f_d(t_1, \ldots, t_d))$. Il existe alors une suite

$$\begin{aligned} C_1(x) = 1,\ C_2(x) = a_2 x,\ C_3(x) = (a_2^2(x-1) + a_3)x, \\ C_4(x) = (((2x-3)a_2^3 + 5a_2 a_3)(x-1) + 2a_4)x/2,\ \ldots \end{aligned}$$

avec $C_n(x)$ un polynôme de degré $\le n-1$ en x tel que $f^{\circ x}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i(x) t^i$.

Pour le démontrer on peut considérer la différence finie

$$C_n(k+1) - C_n(k) = \text{coefficient de } t^n \text{ dans } \sum_{i=2}^{\infty} a_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} C_j(k) t^j\right)^i$$

qui est un polynôme de degré au plus $n-2$ en k (par récurrence sur n). On peut également le déduire en utilisant un isomorphisme de monoïde entre le monoïde des séries formelles sans terme constant (avec la composition des séries comme produit) et un groupe de matrices triangulaires supérieures. Un tel isomorphisme peut être donné par

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \longmapsto \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} & \cdots \\ & & & \ddots & \end{pmatrix}$$

où $\sum_{j=k}^{\infty} a_{k,j} x^j = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)^k$; voir par exemple le théorème 1.7a dans [10].

4 Exemples

Revenons aux exemples (i) et (ii) du chapitre 2.

Exemple trivial. Considérons la série formelle s définie par le polynôme $1+x$. On vérifie facilement que $P_n(x) = Q_n(x) = (1+x)^{n-1}$ et $q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n = \frac{t}{1-t}$. Les théorèmes 1, 2 et 3 se réduisent alors à des identités triviales et au théorème binomial, à savoir

$$\frac{t}{1-t(1+x)} = \frac{t/(1-t)}{1-xt/(1-t)}, \quad \frac{t/(1-t)}{1+t/(1-t)} = t$$

et

$$\left(\frac{t}{1-t}\right)^{k+1} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{k+1}{n}\binom{n}{k+1} t^n = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} t^{n+1} .$$

La transformée inverse de $q(t)/t$ est donnée par $I\left(\frac{q(t)}{t}\right) = \frac{1/(1-t)}{1+t/(1-t)} = 1$ et nous avons

$$I^x\left(\frac{q(t)}{t}\right) = \frac{1/(1-t)}{1+xt/(1-t)} = \frac{1}{1-t(1-x)} = \sum_{n=1}^{\infty} (t(1-x))^{n-1} = \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(-x)t^n$$

en accord avec les résultats du chapitre 3.

L'exemple de l'exponentielle. Pour la série $s(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ définissant l'exponentielle, nous avons

$$P_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}(n-j)\frac{(nx)^j}{j!}.$$

En effet, cette formule donne bien $P_1 = 1$ et le calcul

$$\begin{array}{rc} & \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{k}(n-j)\frac{n^j}{j!\ (k-j)!} \\ = & \frac{1}{n\ k!}\left(n(n+1)^k - nk(n+1)^{k-1}\right) \\ = & \frac{1}{n+1}(n+1-k)\frac{(n+1)^k}{k!} \end{array}$$

du coefficient $x^k, 0 \le k \le n$ dans $P_n(x)e^x$ la montre par récurrence. Nous obtenons ainsi

$$Q_n(x) = \sum_{j=1}^{n} j\ n^{n-1-j}\frac{x^{j-1}}{(n-j)!}$$

et

$$q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(0)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-2}\frac{t^n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{(nt)^n}{n!},$$

en accord avec le théorème 3. Le théorème 4 implique les égalités

$$(k+1)(n-k)n^{n-2-k} = k\sum_{m=k}^{n-1}\binom{n-k}{n-m} m^{m-1-k}(n-m)^{n-m-1}$$

pour tous les entiers n, k tels que $n > k > 1$. Pour finir, mentionnons la jolie évaluation

$$P_n(1) = Q_n(1) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}(n-j)\frac{n^j}{j!} = \sum_{j=0}^{n}\frac{n^j}{j!} - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{n^j}{j!} = \frac{n^n}{n!}.$$

5 Interpolation entre inversion et réversion d'une série formelle

L'anneau $\mathbb{C}[[x]]$ des séries formelles est un anneau commutatif local dont l'idéal maximal $\mathfrak{m} = x\mathbb{C}[[x]]$ est l'ensemble des séries formelles sans terme constant. Notons

$$\mathcal{U} = \mathbb{C}[[x]] \setminus \mathfrak{m} = \mathbb{C}^* + \mathfrak{m}$$

le groupe multiplicatif formé des éléments inversibles de $\mathbb{C}[[x]]$ et $\mathcal{SU} = 1+\mathfrak{m} \subset \mathcal{U}$ le sous-groupe des séries formelles de coefficient constant 1. Notons

$$\mathcal{D} = \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2 = \{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x^j \in \mathbb{C}[[x]] | \alpha_1 \neq 0\}$$

le groupe non-commutatif des séries formelles pour la composition. On a $\mathcal{D} = x\mathcal{U}$ en tant qu'ensemble et $\mathcal{SD} = x\mathcal{SU} = x + \mathfrak{m}^2$ peut être interprété comme le sous-groupe des "difféomorphismes locaux formels tangents à l'identité en 0".

Le but de ce chapitre est de décrire une déformation naturelle continue (qui est holomorphe pour des séries holomorphes) entre le groupe multiplicatif commutatif $\mathcal{SU}$ et le groupe non-commutatif $\mathcal{SD}$ (identifié à $\mathcal{SU}$ via la bijection ensembliste $A \longrightarrow xA$ de $\mathcal{SU}$ sur $\mathcal{SD}$).

L'action naturelle $\alpha \cdot A = A \circ \alpha$ de $\alpha \in \mathcal{D}$ sur un élément $A \in \mathbb{C}[[x]]$ agit par automorphismes sur $\mathcal{U}$ et $\mathcal{SU}$ et on peut donc former le produit semi-direct $\mathcal{I} = \mathcal{U} \rtimes \mathcal{D}$ qui est un groupe pour la loi de composition

$$(A, \alpha)(B, \beta) = (C, \gamma) = (A(B \circ \alpha), \beta \circ \alpha)$$

où $C = A(B \circ \alpha)$ est le produit de la série A avec la série $B \circ \alpha$. L'élément inverse $(A, \alpha)^{-1}$ de (A, α) est donné par

$$(A, \alpha)^{-1} = \left(\frac{1}{A \circ \alpha^{\langle -1 \rangle}}, \alpha^{\langle -1 \rangle} \right)$$

où la réversion (ou série réciproque) $\alpha^{\langle -1 \rangle}$ de $\alpha \in \mathcal{D}$ est définie par l'identité $\alpha \circ \alpha^{\langle -1 \rangle} = \alpha^{\langle -1 \rangle} \circ \alpha = x$. On a les homomorphismes $A \longmapsto (A, x)$ et $(A, \alpha) \longmapsto \alpha$ (avec section $\alpha \longmapsto (1, \alpha)$) provenant de la suite exacte scindée évidente

$$0 \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{I} = \mathcal{U} \rtimes \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow 1 .$$

Notons $\mathcal{SI} = \mathcal{SU} \rtimes \mathcal{SD}$ le noyau $\mathrm{Ker}(\psi)$ de l'homomorphisme de groupes $\psi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ définie par $\psi(A, \alpha) = (A(0), \alpha'(0))$.

Remarque. (i) Le groupe $\mathcal{I}$ peut se généraliser facilement en considérant le produit semi-direct $U \rtimes D$ où U est un groupe de germes de fonctions inversibles au voisinage d'un point $P \in X$ avec X un espace topologique et où D est un groupe de germes d'homéomorphismes avec point fixe X. En particulier, on peut, au moins formellement, remplacer le groupe multiplicatif $\mathcal{U}$ par le groupe multiplicatif des séries de Laurent non-nulles.

(ii) Le noyau $\mathcal{SI} = \mathrm{Ker}(\psi) = \mathcal{SU} \rtimes \mathcal{SD}$ est contractile pour une topologie raisonnable sur $\mathbb{C}[[x]]$ (obtenu par exemple en considérant la convergence coefficient par coefficient). On a donc $\pi_1(\mathcal{I}) = \pi_1(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}^2$ pour le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{I})$ et on peut considérer l'extension centrale

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \tilde{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow 1$$

définissant le revêtement universel $\tilde{\mathcal{I}}$ de $\mathcal{I}$, obtenu en relevant l'extrémité des chemins continus issus du neutre $(1, x) \in \mathcal{I}$ ou, de manière équivalente, en considérant des relèvements réels des arguments de $A(0), \alpha'(0) \in \mathbb{C}^*$ pour $(A, \alpha) \in \mathcal{I}$.

(iii) Le groupe abstrait $\mathcal{I}$ est isomorphe à un "sous-groupe de Lie" dans les matrices triangulaires inférieures infinies, voir [1].

Pour la description de l'interpolation entre le groupe multiplicatif $\mathcal{U}$ et le groupe non-commutatif $\mathcal{D}$ il faut soit se restreindre au sous-groupe $\mathcal{SI} = \mathcal{SU} \rtimes \mathcal{SD} = \mathrm{Ker}(\psi)$ qu'on pourrait appeller le *groupe d'interpolation spécial* soit travailler dans un groupe intermédiaire entre $\mathcal{I}$ et son revêtement universel $\tilde{\mathcal{I}}$. Nous allons décrire en détail le premier cas. Le deuxième cas est traité brièvement dans [1].

Pour $\tau \in \mathbb{C}$, introduisons le sous-ensemble

$$\mathcal{SG}(\tau) = \{(A, xA^\tau) \mid A \in \mathcal{SU} = 1 + x\mathbb{C}[[x]]\} \subset \mathcal{SI}$$

où l'on choisit l'unique détermination "continue" du logarithme des séries formelles de manière à avoir $A^\tau = e^{\tau \log A} \in \mathcal{SU} = 1 + x\mathbb{C}[[x]]$ pour $A \in \mathcal{SU}$.

Proposition 1. *(i) L'ensemble $\mathcal{SG}(\tau)$ est un sous-groupe pour tout $\tau \in \mathbb{C}$.*

(ii) Le groupe $\mathcal{SG}(0)$ est isomorphe au groupe commutatif $\mathcal{SU}$.

(iii) Pour $\tau \neq 0$ les groupes $\mathcal{SG}(\tau)$ sont tous isomorphes au groupe non-commutatif $\mathcal{SD}$. Un isomorphisme est donné par $\alpha \longmapsto \left(\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{1/\tau}, \alpha\right) \in \mathcal{SG}(\tau)$ pour $\alpha \in \mathcal{SD}$.

Corollaire 1. *Pour $\tau \in [0, 1]$, l'application*

$$\tau \longmapsto \frac{1}{A \circ (xA^\tau)^{\langle -1 \rangle}}$$

est une déformation continue reliant l'inverse multiplicatif $\frac{1}{A}$ de $A \in \mathcal{SU}$ à la série réciproque $\frac{x}{A \circ (xA)^{\langle -1 \rangle}} = (xA)^{\langle -1 \rangle}$ de $(xA) \in \mathcal{SD}$.

Idée de la preuve de la proposition 1 L'assertion (ii) est évidente.

Un petit calcul montre que l'application $(A, \alpha) \longmapsto \left(A\left(\frac{\alpha}{x}\right)^\lambda, \alpha\right)$ est un automorphisme de $\mathcal{SI}$. En considérant $\lambda = \tau^{-1}$, on démontre facilement l'assertion (iii) .

L'assertion (i) est maintenant triviale. □

Remarque. Une deuxième bijection naturelle entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{D}$ est donnée par $\alpha \in \mathcal{D} \longmapsto \alpha' \in \mathcal{U}$. L'application

$$\tau \longmapsto \frac{1}{A \circ \left(\int_0 A^\tau\right)^{\langle -1 \rangle}}$$

(provenant de l'automorphisme $(A, \alpha) \longmapsto (A(\alpha')^\lambda, \alpha)$ de $\mathcal{SI}$) permet d'interpoler entre $\frac{1}{A}$ et la série réciproque

$$\left(\int_0 A\right)^{\langle -1 \rangle} = \int_0 \frac{1}{A \circ \left(\int_0 A\right)^{\langle -1 \rangle}}$$

de $\int_0 A \in \mathcal{SD}$ associée à cette deuxième bijection, voir [1].

6 La transformée de Hankel

Ce chapitre contient notre résultat principal, suggéré par le théorème 4 du chapitre 3.

La $n-$ième *matrice de Hankel* $H(n)$ d'une suite $s = (s_0, s_1, s_2, \dots)$ est la matrice symétrique dont les coefficients $h_{i,j},\ 0 \leq i, j < n$ ne dépendent que de la somme $i + j$ des indices et sont donnés par $h_{i,j} = s_{i+j}$. La matrice $H(n)$ dépend donc seulement de $s_0, s_1, \dots, s_{2n-2}$. La *transformée de Hankel* de s est alors définie comme étant la suite

$$\det(H(1)) = s_0,\ \det(H(2)) = s_0 s_2 - s_1^2,\ \det(H(3)),\ \dots$$

des déterminants des matrices de Hankel d'ordre $1, 2, 3, \dots$ associées à s.

Une formule de Hadamard (voir [7], page 30, voir aussi [14]) implique que deux suites a et $b = I(a)$ dont les séries génératrices sont reliées par la transformation inverse $\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) / \left(1 + t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)$, ont même transformée de Hankel. Comme les polynômes $I_n(x)$ interpolent les itérées de la transformée inverse, la transformée de Hankel de la suite $I^x(a) = (I_0(x),\ I_1(x),\ I_2(x),\ \dots)$ ne dépend pas de x.

Pour un entier $k > 0$, définissons la $k-$ième transformée de Hankel de $s = (s_0,\ s_1,\ \dots)$ comme la suite $\left(d_{k,n} = \det(H_k(n))\right)_{n=1,2,\dots} = (s_k,\ s_k s_{k+2} - s_{k+1}^2,\ \dots)$ où $H_k(n) = (s_{i+j+k})_{0 \leq i,j < n}$ est la matrice de Hankel de taille $n \times n$ associée à la suite décalée $s_k,\ s_{k+1},\ s_{k+2},\ \dots$.

Théorème 5. *(i) La suite*

$$\left(\det\left((I_{i+j+k}(x))_{0 \leq i,j < n}\right)\right)_{n=1,2,3,\dots}$$

de la $k-$ième transformée de Hankel de $I^x(a) = (I_0(x),\ I_1(x),\ \dots)$ ne contient que des polynômes de degré $\leq k$ en x.

(ii) Le déterminant

$$\det((Q_{1+i+j}(x))_{0 \leq i,j < n})$$

pour $Q_1,\ Q_2,\ \dots$ associés à $s(x) = s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \dots$ comme dans le chapitre 3 ne dépend pas de s_1.

Remarque. L'identité de condensation de Dodgson (cf. [12]) montre que les déterminants $d_{k,n}$ vérifient l'égalité

$$d_{k-1,n+1}\ d_{k+1,n-1} = d_{k-1,n}\ d_{k+1,n} - d_{k,n}^2$$

où l'on a posé $d_{k,0} = 1$ pour tout k. Cette identité est parfois utile pour calculer récursivement la transformée de Hankel $(d_{0,n})_{n=1,2,\dots}$ à partir de $d_{k,1} = s_k$.

7 Mots de Łukasiewicz et réversion des séries (Lagrange)

Ce chapitre est dévolu à l'étude des mots de Łukasiewicz. Les propriétés de ces mots sont ensuite exploitées pour démontrer les théorèmes 2, 3 et 4.

Nous commençons par démontrer le théorème 4 qui équivaut à l'identité

$$[x^k] \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x) t^n = q(t)^{k+1}\ .$$

Soit

$$s(x) = s_0 + \sum_{j=1}^{\infty} s_j x^j$$

une série formelle dont les coefficients $s_0, s_1, s_2, \ldots$ sont des lettres qui ne commutent qu'avec la variable x. Comme au début, nous associons à $s(x)$ la suite des polynômes

$$P_1(x) = s_0, P_2(x) = s_0^2 + s_0 s_1 x, P_3(x) = s_0^3 + (s_0^2 s_1 + s_0 s_1 s_0)x + (s_0^2 s_2 + s_0 s_1^2)x^2, \ldots$$

définie de façon récursive par $P_k(x) = \lfloor P_{k-1}(x)s(x)\rfloor_k$. Notons $[x^k]P_n(x)$ le coefficient de x^k du polynôme $P_n(x)$. On a une bijection entre les monômes de $[x^k]P_n(x)$ et les chemins sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de $(0,0)$ à (n,k) ne traversant pas la diagonale $y = x$ et qui n'utilisent que des pas $(1,0), (0,1)$ orientés vers le nord ou vers l'est. En effet, associons à $s_{i_1}s_{i_2}s_{i_3}\ldots s_{i_n}$ le chemin

$$i_1 \times (0,1) + (1,0) + i_2 \times (0,1) + (1,0) + i_3 \times (0,1) + (1,0) + \cdots + i_n \times (0,1) + (1,0)$$

(on a toujours $i_1 = 0$). En particulier, le nombre de tels monômes contribuant au coefficient $[x^{n-1}]P_n(x)$ de plus haut degré est donné par le nombre de Catalan $C_{n-1} = \binom{2(n-1)}{n-1}\frac{1}{n}$. Posons $Q_n(x) = x^{n-1}\overline{P}_n(1/x)$ où $\overline{P}_n(x)$ est obtenu en lisant à l'envers les monômes contribuant aux coefficients x^0, x^1, $\ldots$, x^{n-1} de $P_n(x)$:

$$Q_1(x) = s_0, \quad Q_2(x) = s_0^2 x + s_1 s_0, \quad Q_3(x) = s_0^3 x^2 + (s_1 s_0^2 + s_0 s_1 s_0)x + s_2 s_0^2 + s_1^2 s_0, \ldots.$$

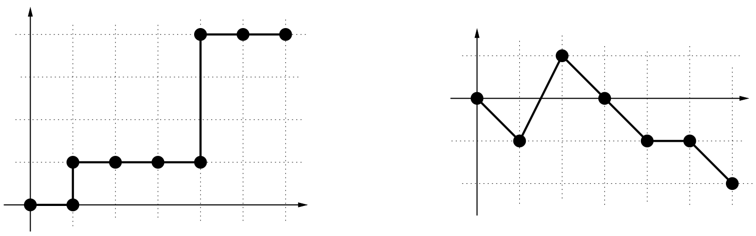
Munissons la lettre s_i du poids $w(s_i) = i - 1$ et posons

$$w(s_{i_1}s_{i_2}s_{i_3}\ldots s_{i_n}) = w(s_{i_1}) + w(s_{i_2}) + w(s_{i_3}) + \cdots + w(s_{i_n})$$

pour un mot $s_{i_1}s_{i_2}s_{i_3}\ldots s_{i_n}$ de longueur n. Représentons un mot $s_{i_1}\ldots s_{i_n}$ apparaissant dans $Q_n(x)$ par le chemin de sommets

$$(0,0),\ (1, s_{i_1} - 1),\ (2, s_{i_1} + s_{i_2} - 2),\ \ldots,\ (n, -n + \sum_{j=1}^{n} i_j) = (n, w(s_{i_1}\ldots s_{i_n}))$$

obtenu en concaténant les pas $(1, w(s_i)) = (1, i-1)$ associés à s_{i_1}, s_{i_2}, $\ldots$, s_{i_n}.



Le chemin associé au mot $s_0s_1s_0s_0s_3s_0$ (dans $P_6(x)$) et à son miroir $s_0s_3s_0s_0s_1s_0$ (dans $Q_6(x)$).

Les mots qui apparaissent dans $Q_n(0) = [x^0]Q_n(x)$ sont les *mots de Łukasiewicz* (voir [3]). Leur série génératrice est donnée par $q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(0)t^n$. Remarquons que les mots de Łukasiewicz de $Q_{n+1}(0)$ sont en bijection avec les parenthésages de longueur $2n$ comportant n parenthèses ouvrantes et fermantes. Pour le voir on commence par supprimer la dernière lettre s_0 d'un mot de Łukasiewicz et on remplace ensuite une lettre s_k par le mot de longueur $k+1$

consistant en k parenthèses ouvrantes "$((\ldots(($" suivi d'une parenthèse fermante "$)$". Pour le mot de Łukasiewicz $s_2s_0s_1s_2s_2s_0s_0s_0$ on obtient ainsi

$$\begin{array}{ccccccc} s_2 & s_0 & s_1 & s_2 & s_2 & s_0 & s_0 \\ (() &) & () & (() & (() &) &) \end{array} .$$

Lemme 1. *Le coefficient* $[x^k]Q_n(x)$ *de* $Q_n(x)$ *est la somme de tous les mots* $s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_n}$ *de longueur* n *et de poids* $w(s_{i_1}s_{i_2}s_{i_3}\ldots s_{i_n}) = \sum_{j=1}^n i_j - n = -(k+1)$ *tels que* $w(s_{i_1}s_{i_2}s_{i_3}\ldots s_{i_h}) \geq -k$ *pour tout* $h < n$.

Preuve. Le coefficient $[x^k]P_n(x)$ est constitué de tous les mots $s_{i_1}\ldots s_{i_n}$, $\sum_{j=1}^n i_j = k$, qui vérifient les inégalités $\sum_{j=1}^l i_j \leq l-1$ pour $l = 1, \ldots, n$.

Le miroir $s_{i_n}\ldots s_{i_1}$ de poids $w(s_{i_n}\ldots s_{i_1}) = \sum_{j=1}^n (i_j - 1) = -(n-k)$ d'un tel mot contribue au coefficient $[x^{n-1-k}]Q_n(x)$. Nous avons

$$w(s_{i_n}\ldots s_{i_{n+1-h}}) = -h + \sum_{j=n+1-h}^{n} i_j = -h + k - \sum_{j=1}^{n-h} i_j \ .$$

En utilisant la majoration $\sum_{j=1}^{n-h} i_j \leq n-h-1$ rencontrée ci-dessus, nous avons pour $h < n$

$$w(s_{i_n}\ldots s_{i_{n+1-h}}) \geq -h + k - (n-1-h) > -(n-k) \ .\square$$

Preuve du théorème 4. Soit $s_{i_1}\ldots s_{i_n}$ un mot de longueur n et de poids $w(s_{i_1}\ldots s_{i_n}) = \sum_{j=1}^n i_j - n = -(k+1)$ contribuant au coefficient $[x^k]Q_n(x)$ de Q_n. Un tel mot s'écrit de manière unique sous la forme $s_{i_1}\ldots s_{i_n} = l_0\ldots l_k$ où les mots $l_0, \ldots, l_k$ sont des mots de Łukasiewicz en $s_0, s_1, s_2, \ldots$ (voir la remarque ci-dessous pour un exemple). En effet, soit $a \geq 1$ le plus petit indice tel que $w(s_{i_1}\ldots s_{i_a}) = -1$. Le mot $l_0 = s_{i_1}\ldots s_{i_a}$ satisfait alors les conditions du lemme 1 avec $k = 0$. C'est donc un mot de Łukasiewicz. De plus, c'est le seul sous-mot initial de $s_{i_1}\ldots s_{i_n}$ qui soit de Łukasiewicz car un sous-mot initial de la forme $s_{i_1}\ldots s_{i_b}$ avec $b < a$ est de poids $w(s_{i_1}\ldots s_{i_b}) \geq 0$. D'autre part, un tel mot avec $b > a$ ne peut être à la fois de poids -1 et vérifier les conditions du lemme 1.

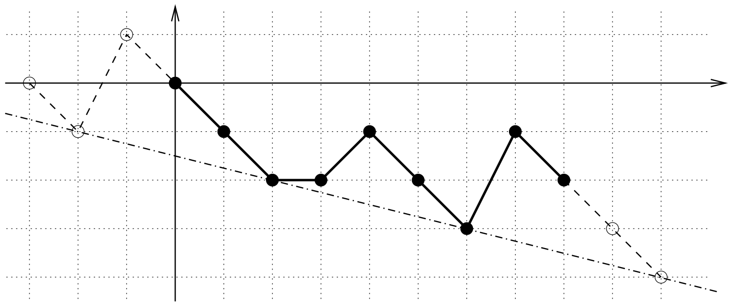
Si $k = 0$, le lemme 1 implique que $a = n$. Pour $k > 0$, on a $a < n$ et le complément $s_{i_{a+1}}\ldots s_{i_n}$ est un mot de poids $-k$ vérifiant de nouveau les conditions du lemme 1. Par récurrence sur k, on a alors $s_{i_{a+1}}\ldots s_{i_n} = l_1\ldots l_k$ avec $l_1, \ldots, l_k$ des mots de Łukasiewicz. Ceci montre que l'ensemble des mots formant le coefficient $[x^k]Q_n(x)$ est l'ensemble des mots de longueur n en $s_0, s_1, \ldots$ obtenus en concaténant $(k+1)$ mots de Łukasiewicz. On a donc l'égalité $[x^k]Q_n(x) = [t^n]q(t)^{k+1}$.
$\square$

Remarque. La factorisation $s_{i_1}\ldots s_{i_n} = l_0\ldots l_k$ d'un mot de poids $-(k+1)$ satisfaisant les conditions du lemme 1 en $(k+1)$ mots de Łukasiewicz est bien visible sur la représentation graphique introduite ci-dessus. Ainsi, pour le mot $s_0s_3s_0s_0s_1s_0$ contribuant au coefficient $x^{5-(0+3+0+0+1+0)} = x$ de $Q_6(x)$, on obtient $l_0 = s_0$ et $l_1 = s_3s_0s_0s_1s_0$.

Preuve du théorème 2. Soit $s_{i_1}s_{i_2}s_{i_3}\ldots s_{i_n}$ un mot de Łukasiewicz. Si $n = 1$, alors le mot est égal à s_0. Si $n \geq 2$, alors $i_1 \geq 1$ et $s_{i_2}s_{i_3}\ldots s_{i_n}$ est un monôme de $[x^{i_1-1}]Q_{n-1}(x)$. Il se factorise donc en i_1 facteurs de Łukasiewicz.

Ceci suggère de considérer la bijection suivante entre les mots de Łukasiewicz et les arbres plans enracinés: Au mot de Łukasiewicz $s_{i_1}s_{i_2}s_{i_3}\ldots s_{i_n}$ on fait correspondre l'arbre plan de

n sommets muni d'une racine de degré i_1. Les i_1 fils de la racine correspondent récursivement aux i_1 facteurs de Łukasiewicz du mot $s_{i_2}s_{i_3}\ldots s_{i_n}$. Cette bijection se traduit par l'identité $q(t) = ts(q(t))$ pour les séries génératrices. $\square$



Le mot $s_0s_0s_1s_2s_0s_0s_3s_0$, rendu cyclique.

Preuve du théorème 3. Le coefficient $[x^{n-k-1}]s(x)^n$ compte tous les mots $s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_n}$ de longueur n qui sont de poids $w(s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_n}) = \sum_{j=1}^n i_j \; - n = (n-k-1) - n = -(k+1)$. Ainsi le mot $s_0s_0s_1s_2s_0s_0s_3s_0$ apparaissant dans $[x^6]s(x)^8$ est de longueur 8 et de poids -2 et illustre le cas particulier $n = 8$ et $k = 1$. Associons à un tel mot la suite $n-$périodique (bi-infinie) de lettres $\ldots s_{i_{-2}}s_{i_{-1}}s_{i_0}s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_n}s_{i_{n+1}}s_{i_{n+2}}\ldots$ avec $s_{i_{n+h}} = s_{i_h}$ pour tout $h \in \mathbf{Z}$. Regardons la représentation graphique, c'est-à-dire la suite infinie de points

$$\begin{aligned}&\ldots, (-2, -w(s_{i_{-1}}s_{i_0})), (-1, -w(s_{i_0})), (0,0), (1, w(s_{i_1})), (2, w(s_{i_1}s_{i_2})), \ldots,\\ &(n, w(s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_n})) = (n, -(k+1)), \; (n+1, w(s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_{n+1}})) = (n+1, -(k+1) + w(s_{i_1})),\\ &(n+2, w(s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_{n+2}})) = (n+2, -(k+1) + w(s_{i_1}s_{i_2})), \ldots\end{aligned}$$

La suite des produits scalaires de ces points avec le vecteur $(k+1, n)$ est périodique et la longueur de la période est un diviseur de n. Supposons que la valeur minimale de ces produits scalaires est prise sur le point $(h, w(s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_h}))$ avec $h \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Par ailleurs, h est unique (modulo n) si $k = 0$. De toute façon, le mot $s_{i_{h+1}}s_{i_{h+2}}\ldots s_{i_n}s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_h}$ apparaît dans $[x^k]Q_n(x)$. On appelle ce mot un *réarrangement cyclique* de $s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_n}$. D'après la démonstration du théorème 1, ce réarrangement cyclique a une factorisation canonique en $k+1$ mots de Łukasiewicz. Parmi les n réarrangements cycliques possibles de $s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_n}$ il y en a donc exactement $(k+1)$ qui apparaissent dans $[x^k]Q_n(x)$: les $(k+1)$ réarrangements cycliques des facteurs de Łukasiewicz de $s_{i_{h+1}}s_{i_{h+2}}\ldots s_{i_n}s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_h}$. En effet, si l'on choisit un réarrangement cyclique dont la première lettre n'est pas la première lettre d'un facteur de Łukasiewicz, alors l'inégalité nécessaire pour l'appartenance à $[x^k]Q_n(x)$ n'est pas satisfaite pour le mot qui va jusqu'à la dernière lettre du facteur précédent.

Ainsi, pour notre exemple $s_0s_0s_1s_2s_0s_0s_3s_0$ représenté par la figure ci-dessus, les facteurs de Łukasiewicz du mot cyclique bi-infini sont délimités par les intersections du graphe représentant ce mot avec la droite $4y = -6 - x$, représentée en pointillé. Ses deux facteurs de Łukasiewicz sont donc $s_1s_2s_0s_0$ et $s_3s_0s_0s_0$. Parmi les huit réarrangement circulaire du mot $s_0s_0s_1s_2s_0s_0s_3s_0$, il n'y a donc que $s_1s_2s_0s_0s_3s_0s_0s_0$ et $s_3s_0s_0s_0s_1s_2s_0s_0$ qui apparaissent dans $[x^1]Q_8(x)$.

Dans le cas général, on obtient ainsi une bijection

$$\begin{array}{rcl}\{1,\,\ldots,\,k+1\}\times\left\{\begin{array}{l}\text{mots en}\\ s_0,\,s_1,\,\ldots\ \text{de}\\ \text{longueur } n \text{ et de}\\ \text{poids } -(k+1)\end{array}\right\} & \rightarrow & \{1,\ldots,n\}\times\left\{\begin{array}{l}\text{produits de } (k+1) \text{ mots}\\ \text{de Łukasiewicz de longueur}\\ \text{totale } n \text{ en } s_0,s_1,\ldots\end{array}\right\}\\ (k',mot) & \mapsto & (n',\,luk),\end{array}$$

où luk est le réarrangement cyclique de mot qui appartient à $[x^k]Q_n(x)$ et qui fait apparaître la première lettre de mot dans le k'-ième facteur de Łukasiewicz de luk (n' correspond à la nouvelle place de la première lettre de mot). Cette bijection implique l'égalité

$$(k+1)\ [x^{n-k-1}]s(x)^n = n\ [t^n]q(t)^{k+1}. \qquad \square$$

Remarque. Dans le contexte d'une variable t ne commutant pas avec les variables s_i, il faudrait introduire la variable t devant chaque lettre, i.e.

$$\begin{aligned} q(t) \ = \ & ts_0 + ts_1ts_0 + ts_2(ts_0)^2 + (ts_1)^2ts_0 + \\ & ts_3(ts_0)^3 + ts_2ts_1(ts_0)^2 + ts_2ts_0ts_1ts_0 + ts_1ts_2(ts_0)^2 + (ts_1)^3ts_0 + \cdots \end{aligned}$$

La dernière lettre d'un mot de Łukasiewicz $s_{i_1}s_{i_2}s_{i_3}\ldots s_{i_n}$ est toujours la lettre s_0 (i.e. $i_n = 0$). Comme $w(s_1) = 0$, le mot en les lettres $s_0,\ s_2,\ s_3,\ \ldots$ obtenu par suppression de toutes les lettres s_1 dans un mot de Łukasiewicz est encore un mot de Łukasiewicz. Appelons-le mot *réduit* de Łukasiewicz et notons $q_{s_1=0}(t)$ la série génératrice des mots réduits de Łukasiewicz. Nous avons alors le résultat suivant, utile au chapitre 8.

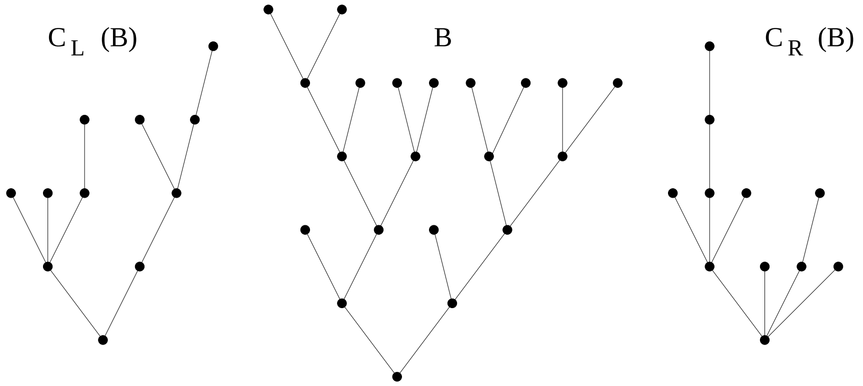
Proposition 2. *On a l'égalité entre séries génératrices* $q(t) = q_{s_1=0}((1-ts_1)^{-1}\ t)$.

Preuve. Un mot de Łukasiewicz $l = s_{i_1}s_{i_2}s_{i_3}\ldots s_{i_n}$ qui ne contient pas la lettre s_1, est le mot réduit de Łukasiewicz pour tous les mots de Łukasiewicz de la forme $s_1^{k_1}s_{i_1}s_1^{k_2}s_{i_2}s_1^{k_3}s_{i_3}\ldots s_1^{k_n}s_{i_n}$ avec $k_1,\ k_2,\ k_3,\ \ldots,\ k_n \in \{0,1,2,\ \ldots\}$.

Le mot réduit l intervient avec une contribution de $ts_{i_1}ts_{i_2}ts_{i_3}\ldots ts_{i_n}$ dans la série génératrice $q_{s_1=0}(t)$ des mots réduits. L'ensemble de tous les mots de Łukasiewicz dont l est le mot réduit contribue donc avec $(1-ts_1)^{-1}ts_{i_1}(1-ts_1)^{-1}ts_{i_2}\ldots(1-ts_1)^{-1}ts_{i_n}$ à la série génératrice $q(t)$ de tous les mots de Łukasiewicz. $\square$

7.1 Digression: Arbres binaires réguliers, arbres plans enracinés et mots de Łukasiewicz

Un *arbre binaire régulier* est un arbre plan enraciné (modulo la relation d'équivalence évidente) dont tous les sommets ont zéro ou deux enfants. Notons $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des arbres binaires réguliers avec $n+1$ feuilles (et $2n+1$ sommets, $2n$ arêtes) et $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des arbres plans enracinés ayant $n+1$ sommets (et n arêtes). Les deux ensembles $\mathcal{B}_n,\ \mathcal{T}_n$ ont même cardinalité, donnée par le $n-$ième nombre de Catalan $\binom{2n}{n}/(n+1)$ (cf. eg. l'Exercice 6.19 d,e dans [18]). Une bijection entre ces deux ensembles finis peut être décrite comme suit: Un arbre binaire régulier $B \in \mathcal{B}_n$ possède exactement n arêtes gauches (orientées NO) et n arêtes droites (orientées NE). En contractant toutes les arêtes gauches (respectivement droites) de B on obtient un arbre planaire enraciné $C_L(B)$ (respectivement $C_R(B)$) dans $\mathcal{T}_n$ et on vérifie facilement que les deux applications $C_L, C_R : \mathcal{B}_n \longrightarrow \mathcal{T}_n$ sont bijectives.



Les deux arbres $C_L(B), C_R(B)$ associés à un arbre binaire B.

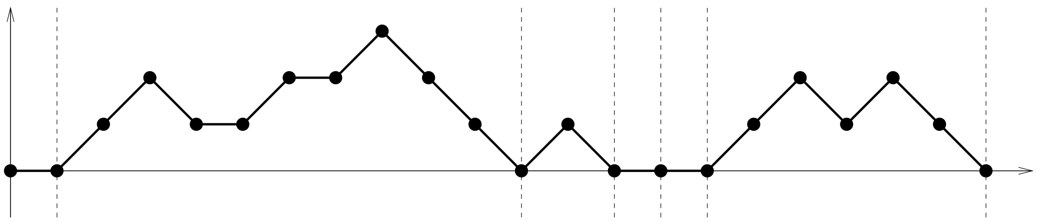
Désignons par $\overline{X}$ l'arbre "miroir" obtenu en réflechissant un arbre $X \in \mathcal{B}_n$ ou $X \in \mathcal{T}_n$ par rapport à une droite verticale. On montre facilement l'identité $\overline{C_R(B)} = C_L(\overline{B})$. En conjugant l'involution $T \longmapsto \overline{T}$ sur $\mathcal{T}_n$ par les bijections C_R, C_L, on obtient ainsi deux involutions $\iota_R(B) = C_R^{-1}(\overline{C_R(B)}) = \overline{C_L^{-1}(C_R(B))}$ et $\iota_L(B) = C_L^{-1}(\overline{C_L(B)}) = \overline{C_R^{-1}(C_L(B))}$ sur $\mathcal{B}_n$. Une construction analgoue, à savoir $\tilde{\iota}_R = C_R(\overline{C_R^{-1}(T)})$ et $\tilde{\iota}_L = C_L(\overline{C_L^{-1}(T)})$ définit deux involutions $\tilde{\iota}_R, \tilde{\iota}_L$ sur $\mathcal{T}_n$. Il serait intéressant de comprendre les orbites dans $\mathcal{B}_n$ (respectivement $\mathcal{T}_n$) sous l'action du groupe diédral de générateurs ι_R, ι_L (respectivement $\tilde{\iota}_R, \tilde{\iota}_L$). En particulier, les points fixes de ι_R (ou les points fixes de ι_L) sont en bijection avec les arbres "symétriques" de $\mathcal{T}_n$ qui satisfont $\overline{T} = T$ (au nombre de $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$) tandis que les points fixes de $\tilde{\iota}_R$ (ou les points fixes de $\tilde{\iota}_L$) correspondent bijectivement aux arbres symétriques binaires de $\mathcal{B}_n$. Le nombre d'arbres symétriques binaires réguliers est donné par le nombre de Catalan $\binom{2m}{m}/(m+1)$ pour $n = 2m+1$ impair. Pour $n > 0$ pair de tels arbres n'existent pas.

Pour terminer cette digression, mentionnons encore le fait (déjà rencontré dans la preuve du théorème 2) que la suite $i_1, \ldots, i_{n+1}$ des valences des $n+1$ sommets rencontrés pour la première fois lorsqu'on contourne un arbre $T \in \mathcal{T}_n$ en partant de sa racine définit bijectivement un mot de Łukasiewicz $s_{i_1} \ldots s_{i_{n+1}}$ de longueur $n+1$.

8 Déterminants de Hankel

Le but de ce chapitre est la preuve du théorème 5. Pour cela, nous introduisons les mots de Motzkin et rappelons quelques-unes de leurs propriétés. Des études plus complètes sont contenues par exemple dans [5] et [19], voir aussi [20].

Un *chemin de Motzkin* de longueur n est un chemin dans le premier quadrant $x, y \geq 0$ qui relie l'origine $(0,0)$ au point $(n,0)$ en utilisant n pas de la forme $(1,-1)$, $(1,0)$ ou $(1,1)$.



Un chemin de Motzkin de longueur 21 et ses 6 facteurs premiers.

Notons $\Gamma(n)$ l'ensemble des chemins de Motzkin de longueur n. Chaque $\gamma \in \Gamma(n)$ est affecté d'un poids $w(\gamma)$ défini comme le produit des poids des différents arcs qui le constituent : un palier $((i,h),(i+1,h))$ situé à la hauteur h est affecté du poids $p(h)$; une descente $((i,h+1),(i+1,h))$ de la hauteur $h+1$ à la hauteur h est affecté du poids $q(h)$; enfin, chaque montée $((i,h),(i+1,h+1))$ est affecté du poids 1. Le poids $w(\gamma)$ est ainsi un monôme en les variables (commutatives) $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$, ... et $q(0)$, $q(1)$, $q(2)$, ... et on peut former la série génératrice

$$\begin{aligned} c(u) &= 1+\sum_{n=1}^{\infty} u^n \sum_{\gamma\in\Gamma(n)} w(\gamma) \\ &= 1+p(0)u+(p(0)^2+q(0))u^2+(p(0)^3+2p(0)q(0)+p(1)q(0))u^3+\cdots \end{aligned}$$

des chemins de Motzkin. Le chemin de Motzkin de longueur 21 représenté ci-dessus contribue ainsi avec

$$\begin{aligned} &p(0)\ 1\ 1\ q(1)\ p(1)\ 1\ p(2)\ 1\ q(2)\ q(1)\ q(0)\ 1\ q(0)\ p(0)\ p(0)\ 1\ 1\ q(1)\ 1\ q(1)\ q(0) \\ &\quad = p(0)^3 p(1) p(2) q(0)^3 q(1)^4 q(2) \end{aligned}$$

au coefficient $[u^{21}]c(u)$.

Un chemin de Motzkin est *premier* s'il n'intersecte la droite horizontale discrète $\mathbb{Z}\times\{0\}$ qu'en ses extrémités $(0,0)$ et $(n,0)$. Il est clair que tout chemin de Motzkin premier est soit un palier à la hauteur 0 (valué $p(0)$), soit commence avec une montée de la hauteur 0 à la hauteur 1, continue avec un chemin de Motzkin (éventuellement vide) allant de la hauteur 1 à la hauteur 1 et se termine avec une descente de la hauteur 1 à la hauteur 0 (valuée $q(0)$). De plus, tout chemin de Motzkin non vide se factorise de manière unique en produit de chemins de Motzkin premiers (il suffit de considérer les sommets situés à la hauteur 0). En itérant, on obtient immédiatement le théorème suivant (voir [5]).

Théorème 6. *Soit*

$$c(u) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n u^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty} u^n \sum_{\gamma\in\Gamma(n)} w(\gamma)$$

la fonction génératrice des chemins de Motzkin. Alors

$$c(u) = \cfrac{1}{1-p(0)u-\cfrac{q(0)u^2}{1-p(1)u-\cfrac{q(1)u^2}{1-p(2)u-\cfrac{q(2)u^2}{\ddots}}}}$$

On appelle le développement du théorème précédent *fraction continue de Jacobi*, ou encore *J-fraction*. Il permet d'exprimer les coefficients c_n d'une série formelle à l'aide de chemins (de Motzkin). En fait, on a la généralisation suivante. Soit

$$d(u) = d_0+\sum_{n=1}^{\infty} d_n u^n = \cfrac{d_0}{1-p(0)u-\cfrac{q(0)u^2}{1-p(1)u-\cfrac{q(1)u^2}{\ddots}}} = d_0\, c(u)$$

et soit $D = (d_{i+j})_{0\le i,j<\infty}$ la matrice de Hankel (infinie) associée à la suite d_0, d_1, d_2, … de série génératrice $d(u)$. Appelons un mineur de D un *déterminant de Hankel.* Un tel mineur sera noté $D\binom{\alpha_0,\,\alpha_1,\,\dots,\,\alpha_k}{\beta_0,\,\beta_1,\,\dots,\,\beta_k}$, en désignant par $0 \le \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k$ et $0 \le \beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_k$ les indices respectifs des lignes et colonnes du mineur extrait. Le coefficient $m_{i,j}$ de la sous-matrice associée à $D\binom{\alpha_0,\,\alpha_1,\,\dots,\,\alpha_k}{\beta_0,\,\beta_1,\,\dots,\,\beta_k}$ est donc donné par $m_{i,j} = d_{\alpha_i+\beta_j}$ pour $0 \le i, j \le k$. Regardons, pour $0 \le i \le k$, les points $A_i = (-\alpha_i, 0)$ et $B_i = (\beta_i, 0)$. La somme des valuations (relativement aux variables $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$,… et $q(0)$, $q(1)$, $q(2)$, …) des chemins de Motzkin allant de A_i à B_j est $c_{\alpha_i+\beta_j}$, le terme (i, j) du déterminant $C\binom{\alpha_0,\,\alpha_1,\,\dots,\,\alpha_k}{\beta_0,\,\beta_1,\,\dots,\,\beta_k}$, où $C = (c_{i+j})_{0\le i,j<\infty}$ est la matrice de Hankel associée à la série génératrice $c(u)$. On peut donc énoncer le théorème suivant (voir [19], chapitres IV et V, [20] ou [6]).

Théorème 7. *On a*

$$\begin{aligned} D\begin{pmatrix}\alpha_0,\,\alpha_1,\,\dots,\,\alpha_k\\ \beta_0,\,\beta_1,\,\dots,\,\beta_k\end{pmatrix} &= d_0^{k+1} C\begin{pmatrix}\alpha_0,\,\alpha_1,\,\dots,\,\alpha_k\\ \beta_0,\,\beta_1,\,\dots,\,\beta_k\end{pmatrix}\\ &= d_0^{k+1} \sum_{(\sigma;\,\gamma_0,\,\gamma_1,\,\dots,\,\gamma_k)} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} w(\gamma_0)w(\gamma_1)\cdots w(\gamma_k), \end{aligned}$$

où la sommation est étendue aux paires formées par une permutation $\sigma \in S_{k+1}$ et une configuration $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$ de $k+1$ chemins de Motzkin sans sommets communs avec γ_i reliant A_i à $B_{\sigma(i)}$ pour tout $0 \le i \le k$.

Remarque. Dans le théorème précédent, deux chemins de Motzkin γ_i et γ_j peuvent s'intersecter en des points de la forme $\mathbf{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (de tels points ne sont pas considérés comme étant des sommets).

Preuve. En omettant la condition "sans sommets communs", on voit que la somme est $C\binom{\alpha_0,\,\alpha_1,\,\dots,\,\alpha_k}{\beta_0,\,\beta_1,\,\dots,\,\beta_k}$ par définition du déterminant. Cependant, si deux chemins $\gamma_i \ne \gamma_j$ ont un sommet commun, alors on peut continuer, à partir du premier sommet commun rencontré, le premier chemin sur le second et le second sur le premier. Il est évident que les contributions de ces deux configurations s'annulent. □

Le théorème précédent permet de calculer le déterminant de certaines matrices. On dénombre pour cela des chemins de Motzkin convenablement pondérés.

Théorème 8. *On a*

$$\deg_{p(0)} D\begin{pmatrix}\alpha_0,\,\alpha_1,\,\dots,\,\alpha_k\\ \beta_0,\,\beta_1,\,\dots,\,\beta_k\end{pmatrix} = \deg_{p(0)} C\begin{pmatrix}\alpha_0,\,\alpha_1,\,\dots,\,\alpha_k\\ \beta_0,\,\beta_1,\,\dots,\,\beta_k\end{pmatrix} \le (\alpha_k - k) + (\beta_k - k)$$

et

$$\begin{aligned} [p(0)^{\alpha_k+\beta_k-2k}]D\begin{pmatrix}\alpha_0,\,\alpha_1,\,\dots,\,\alpha_k\\ \beta_0,\,\beta_1,\,\dots,\,\beta_k\end{pmatrix} &= d_0^{k+1}[p(0)^{\alpha_k+\beta_k-2k}]C\begin{pmatrix}\alpha_0,\,\alpha_1,\,\dots,\,\alpha_k\\ \beta_0,\,\beta_1,\,\dots,\,\beta_k\end{pmatrix}\\ &= d_0^{k+1}B\begin{pmatrix}\alpha_0,\,\alpha_1,\,\dots,\,\alpha_{k-1}\\ \beta_0,\,\beta_1,\,\dots,\,\beta_{k-1}\end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec $B = (b_{i+j})_{0\le i,j<\infty}$ et

$$b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n u^n = \cfrac{q(0)}{1 - p(1)u - \cfrac{q(1)u^2}{1 - p(2)u - \cfrac{q(2)u^2}{\ddots}}}$$

En particulier,

$$D\binom{0,1,\ldots,k}{0,1,\ldots,k} = d_0^{k+1}q(0)^k q(1)^{k-1}q(2)^{k-2}\cdots q(k-2)^2 q(k-1)$$

ne dépend pas de $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$, …

Preuve. Pour que le degré $\deg_{p(0)} D\binom{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_k}{\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_k} = \deg_{p(0)} C\binom{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_k}{\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_k}$ en la variable $p(0)$ devienne maximal, il faut (et il suffit) que les configurations $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ satisfassent aux conditions suivantes : Le chemin γ_0 relie A_0 à B_0 et reste toujours à la hauteur 0 (ceci donne une contribution de $p(0)^{\beta_0+\alpha_0}$). Le chemin γ_i commençant à $A_i = (-\alpha_i, 0)$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, reste à la hauteur 0 jusqu'à $(-\alpha_{i-1}-1, 0)$ et monte à $(-\alpha_{i-1}, 1)$ ensuite (ceci donne une contribution de $p(0)^{\alpha_i-\alpha_{i-1}-1}$). Similairement, le chemin qui se termine à $B_i = (\beta_i, 0)$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, descend de $(\beta_{i-1}, 1)$ vers $(\beta_{i-1}+1, 0)$ et reste ensuite jusqu'à B_i à la hauteur 0 (ceci donne une contribution de $q(0)p(0)^{\beta_i-\beta_{i-1}-1}$). Ce qui n'a pas encore été considéré n'est rien d'autre qu'une configuration de k chemins de Motzkin (translatés par le vecteur $(0, 1)$) deux à deux disjoints qui relient les sommets $(-\alpha_0, 1)$, $(-\alpha_1, 1)$, …, $(-\alpha_{k-1}, 1)$ aux sommets $(\beta_0, 1)$, $(\beta_1, 1)$, …, $(\beta_{k-1}, 1)$. □

Preuve de l'assertion (i) du théorème 5. Soit $a(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + a_4u^4 + \cdots$ une série génératrice. Comme les termes de la suite $\Big(\det\big((I_{i+j+k}(x))_{0\le i,j<n}\big)\Big)_{n=1,2,3,\ldots}$ dépendent polynomialement de x et des coefficients a_0, a_1, …, il suffit d'étudier le cas générique $a_0 \neq 0$. Considérons la transformée inverse continue $I^x[a(u)] = a(u)/\big(1 + xua(u)\big)$. On a alors

$$I^x[a(u)] = \frac{a_0}{\frac{a_0}{a(u)} + a_0ux} = \frac{a_0}{1 - \left(\frac{a_1}{a_0} - a_0x\right)u - \left(\frac{1}{u^2} - \frac{a_1}{a_0u} - \frac{a_0}{a(u)u^2}\right)u^2}$$

et on remarque que

$$\frac{1}{u^2} - \frac{a_1}{a_0u} - \frac{a_0}{a(u)u^2} = \frac{a_0a_2 - a_1^2}{a_0^2} + \frac{a_0^2a_3 - 2a_0a_1a_2 + a_1^3}{a_0^3}u + \ldots$$

n'a pas de pôle en 0. On cherche à calculer le degré en x de $D\binom{0,1,\ldots,n-1}{k,k+1,\ldots,k+n-1}$ où D est comme ci-dessus. Le théorème 8 montre que ce degré est $\le (n-1) - (n-1) + k + n - 1 - (n-1) = k$ ce qui prouve l'assertion (i) du théorème 5. □

Remarque. Soit A_x la matrice de Hankel associée à la série $I^x[a(u)]$. Le théorème 8 montre l'égalité

$$[x^{\alpha_k+\beta_k-2k}]A_x\begin{pmatrix}\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\\ \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k\end{pmatrix} = a_0^{k+1}(-a_0)^{\alpha_k+\beta_k-2k}\widehat{A}\begin{pmatrix}\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}\\ \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{k-1}\end{pmatrix}$$

où $\widehat{A}$ est la matrice de Hankel associée à la série $\frac{1}{u^2} - \frac{a_1}{a_0u} - \frac{a_0}{a(u)u^2}$. L'identité

$$A_x\begin{pmatrix}0,1,\ldots,k\\ 0,1,\ldots,k\end{pmatrix} = A_{x=0}\begin{pmatrix}0,1,\ldots,k\\ 0,1,\ldots,k\end{pmatrix}$$

est d'ailleurs une illustration de la dernière partie du théorème 8.

Preuve de l'assertion (ii) du théorème 5. En appliquant l'assertion (i) du théorème 5 à l'identité $I^x[\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(0)t^n] = \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(-x)t^n$, nous pouvons supposer $x = 0$. On a maintenant le développement

$$\begin{aligned} q_{s_1=0}(u) &= s_0u + s_0^2s_2u^3 + s_0^3s_3u^4 + (s_0^4s_4 + 2s_0^3s_2^2)u^5 + \cdots \\ &= s_0 \cfrac{u}{1 - p(0)u - \cfrac{q(0)u^2}{1 - p(1)u - \cfrac{q(1)u^2}{1 - p(2)u - \cfrac{q(2)u^2}{\ddots}}}} \end{aligned}$$

avec $p(0) = 0$, $q(0) = s_0s_2$, $p(1) = \frac{s_0s_3}{s_2}$, $q(1) = s_0s_2 + \frac{s_0^2s_4}{s_2} - \frac{s_0^2s_3^2}{s_2^2}$, ... La proposition 2 du chapitre 7 implique donc

$$q(u) = q_{s_1=0}\left(\frac{u}{1-s_1u}\right)$$

et nous avons

$$q\left(\frac{u}{1-s_1u}\right) = s_0 \cfrac{u}{1 - \big(s_1 + p(0)\big)u - \cfrac{q(0)u^2}{1 - \big(s_1 + p(1)\big)u - \cfrac{q(1)u^2}{1 - \big(s_1 + p(2)\big)u - \cfrac{q(2)u^2}{\ddots}}}}$$

L'assertion (ii) découle maintenant de la dernière partie du théorème 8. □

Remarque. L'identité

$$\left(\frac{t}{1-tx}\right)^n = \sum_{k=n-1}^{\infty} \binom{k}{n-1} x^{k+1-n}\ t^{k+1}$$

montre qu'on a

$$\frac{1}{(1-xt)}\ a\left(\frac{t}{1-xt}\right) = \sum_{n,k} \binom{k}{n}\ a_n\ x^{k-n}\ t^k$$

pour $a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. La suite formée des coefficients $b_k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} a_n x^{k-n}$ est la *transformée binomiale* (de paramètre x) de la suite $a = (a_0, a_1, \ldots)$. Il découle de la preuve ci-dessus que deux suites reliées par une transformation binomiale possèdent la même transformée de Hankel.

Les auteurs remercient Pierre de la Harpe et Frédéric Chapoton pour des remarques et discussions intéressantes ainsi que le Fonds National Suisse de la Rechercher Scientifique pour un un soutien financier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Bacher, *Sur le groupe d'interpolation*, arXiv : math.CO/0609736.

[2] Bromwich, An introduction to the theory of infinite series (Second edition revised with the assistance of T. M. Macrobert), St Martin's Press; Macmillan (1959).

[3] R. Cori, *Words and Trees*, Chapitre 11 dans le livre [14].

[4] A. Dvoretzky et Th. Motzkin, *A problem on arrangements*, Duke Math. J., **14** (1947), 305-313.

[5] P. Flajolet, *Combinatorial aspects of continued fractions*, Discrete Math., **32** (1980), 125–161.

[6] S. Fomin, A. Zelevinsky, *Total positivity: Tests and parametrizations*, Math. Intell. **22**, No. 1 (2000), 23-33.

[7] J. Gilewicz, *Approximants de Padé*, Lecture Notes in Mathematics, **667**, Springer (1978).

[8] I.P. Goulden, J.M. Jackson, Combinatorial enumeration, John Wiley Sons Ltd (1983).

[9] E. Goursat, Cours d'Analyse, Tome II, 7-ième éd, Gauthiers-Villars (1949).

[10] P. Henrici, Applied and computational complex analysis, Volume I. Wiley Classics Library. New York etc: John Wiley Sons Ltd (1988).

[11] P. Henrici, *Die Lagrange-Bürmannsche Formel bei formalen Potenzreihen*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **86** no. 4 (1984), 115-134.

[12] C. Krattenthaler, *Advanced determinant calculus*, Sém. Loth. de Comb. 42 (1999), Article B42q.

[13] Lagrange: *N*ouvelle méthode pour résoudre des équations littérales par le moyen des séries, Mém. Acad. Roy. Belles-Lettres de Berlin **XXIV** (1770) dans Oeuvres de Lagrange, tome III, Gauthiers-Villars (1869), 5-73.

[14] M. Lothaire, *Combinatorics on Words*, Encyclopedia of Math. and its Applications, **17** (1983).

[15] C. L. Mallows, A. M. Odlyzko, N. J. A. Sloane, *Upper bounds for modular forms, lattices, and codes.* J. Algebra **36** (1975), no. 1, 68–76.

[16] G. Polya, G. Szegö, Problems and theorems in analysis I, Springer (1972).

[17] G. N. Raney, *Functional composition patterns and power series reversion*, Trans. Amer. Math. Soc., **94** (1960), 441-451.

[18] R. P. Stanley, Enumerative Combinatorics, Volume 2, Cambridge University Press (1999).

[19] G. Viennot, *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux*, Notes de conférences données à l'Université du Québec à Montréal, 1983.

[20] G. Viennot, *A combinatorial theory for general orthogonal polynomials with extensions and applications. Orthogonal polynomials and applications*, (Bar-le-Duc, 1984), Lecture Notes in Mathematics, **1171**, Springer (1985), 139-157.

[21] E. T. Whittaker, G. N. Watson, A course of modern analysis (4-th edition), Cambrige University Press (1978).

Roland Bacher
INSTITUT FOURIER
UMR 5582
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
e-mail: Roland.Bacher@ujf-grenoble.fr

Bodo Lass
INSTITUT DESARGUES
UMR 5028
21, Av. Claude Bernard
69622 VILLEURBANNE Cedex (France)
e-mail: lass@math.univ-lyon1.fr