Une conjecture de Kontsevich et Shoikhet et la caractéristique d'Euler

BODO LASS

A J.-P. Jouanolou et A. Al Amrani,

dont j'ai oublié l'invitation à cause de cette Note

Salikhov [8] a démontré une conjecture de Kontsevich et Shoikhet [4] en la réduisant à la considération de trois familles de graphes, une considération qui ne fut explicitée que pour une de ces familles. Nous montrons que cette conjecture de Kontsevich et Shoikhet n'est, en fait, qu'un cas très particulier du théorème classique sur la caractéristique d'Euler, bien explicité par Teleman [10].

Salikhov [8] has proved a conjecture of Kontsevich and Shoikhet [4] by reducing it to the consideration of three families of graphs, a consideration which was left to the reader for two of those families. We show, that the conjecture is just a very particular case of the classical theorem on the Euler characteristic, well explicated by Teleman [10].

1991 AMS Subject Classification: 05C10, 05C25, 55U10
Key words: graph-complex, orientation, automorphism, Euler characteristic

Les deux définitions et le théorème suivant constituent l'essentiel d'un article récent de Salikhov :

DÉFINITION 1 ([3]). Soit $G = (V, E)$ un multigraphe, c'est-à-dire on accepte la présence de boucles et d'arêtes multiples. Un automorphisme $P \in \mathrm{Aut}(G)$ induit une permutation $|P_E|$ des arêtes de G et une transformation linéaire non-dégénérée $P_E \in \mathrm{GL}(H_1(G, \mathbb{R}))$ sur le premier groupe d'homologie du graphe G (en tant qu'espace topologique) avec des coefficients réels. L'homomorphisme d'orientation de Kontsevich $\Theta_K : \mathrm{Aut}(G) \to \{1, -1\}$ est défini par la formule $\Theta_K(P) := \mathrm{sign}(|P_E|) \cdot \mathrm{sign}(\det[P_E, H_1(G, \mathbb{R})])$.

DÉFINITION 2 ([4]). Soit $G = (V, E)$ un multigraphe. Orientons (à l'aide de flèches) les arêtes de G de façon arbitraire. Un automorphisme $P \in \mathrm{Aut}(G)$ induit une permutation P_V des sommets de G et une fonction $\epsilon_P : E \to \{1, -1\}$ définie par $\epsilon_P(e) := 1$ (resp. $\epsilon_P(e) := -1$), si la permutation induite $|P_E|$ respecte (resp. renverse) l'orientation sur l'arête $e \in E$. L'homomorphisme d'orientation de Shoikhet $\Theta_S : \mathrm{Aut}(G) \to \{1, -1\}$ est défini par la formule $\Theta_S(P) := \mathrm{sign}(P_V) \cdot \prod_{e \in E} \epsilon_P(e)$.

Il est facile de montrer que le dernier produit est indépendant de l'orientation choisie pour chaque arête, et l'on a

Théorème ([8]). *Soit $G = (V, E)$ un multigraphe connexe. Alors pour tout $P \in \mathrm{Aut}(G)$ on a* $\Theta_K(P) = \Theta_S(P)$.

Salikhov [8] démontre le théorème précédent sur plus de deux pages en le réduisant à la considération de trois familles de graphes, une considération qui ne fut explicitée que pour une de ces familles. Selon [8], ce théorème a été conjecturé par Kontsevich et Shoikhet dans [4], un article qui est situé dans le contexte de [1] et [3]. De plus, Salikhov [8] remercie « S. V. Duzhin for suggesting the problem and B. Shoikhet for useful discussions ». Nous tenons à souligner que nous n'avons pas eu la chance de voir l'article de Kontsevich et Shoikhet [4] personnellement.

Avant de formuler les définitions ci-dessus, Salikhov [8] a introduit « the so-called *half-edge language* » pour décrire les multigraphes, bien que les deux définitions fassent plutôt appel aux concepts classiques de la théorie des graphes et de la topologie algébrique (de Hopf ou Lefschetz).

En fait, pour démontrer la conjecture de Kontsevich et Shoikhet, il suffit de remplacer la trace par le déterminant dans la démonstration du théorème du point fixe de Lefschetz (dans le cas particulier des complexes un-dimensionnels, voir [7], paragraphe 22). C'est ce que nous proposons d'expliciter dans cette Note.

Soit $C_1(G, \mathbb{R})$ (resp. $C_0(G, \mathbb{R})$) l'espace vectoriel engendré par les arêtes (resp. sommets) du graphe G. Le leitmotif de la topologie algébrique est d'associer à un automorphisme le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_1(G,\mathbb{R}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "P_E"'] & C_0(G,\mathbb{R}) \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "P_V"] & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1(G,\mathbb{R}) \arrow[r, "\partial"] & C_0(G,\mathbb{R}) \arrow[r, "\epsilon"] & \mathbb{R} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où P_E désigne la permutation « signée » des arêtes orientées selon la définition 2. Dans cette situation, le polynôme caractéristique est une application d'Euler-Poincaré définie sur le groupe d'Euler-Grothendieck (voir [2] ainsi que [5], chapitre IV.3 et XV.4, ou bien la nouvelle édition [6], chapitre XIV.3 et XX.3).

En particulier, on a la relation suivante pour les déterminants des transformations induites sur les espaces d'homologie réduits (voir [10] ou [9], paragraphe 64, exercice 28) :

$$\begin{aligned}
&\det[P_E, \tilde{H}_1(G,\mathbb{R})] \cdot \det[id, \tilde{H}_{-1}(G,\mathbb{R})] / \det[P_V, \tilde{H}_0(G,\mathbb{R})] \\
= \ &\det[P_E,\ C_1(G,\mathbb{R})] \cdot \det[id,\ C_{-1}(G,\mathbb{R})] / \det[P_V,\ C_0(G,\mathbb{R})].
\end{aligned}$$

Évidemment, $C_{-1}(G,\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $\tilde{H}_{-1}(G,\mathbb{R}) = 0$ et $\tilde{H}_0(G,\mathbb{R}) = 0$ puisque G est connexe. Par conséquent, $\det[id, C_{-1}(G,\mathbb{R})] = \det[id, \tilde{H}_{-1}(G,\mathbb{R})] = \det[P_V, \tilde{H}_0(G,\mathbb{R})] = 1$, d'où

$$\det[P_E, H_1(G,\mathbb{R})] = \det[P_E, \tilde{H}_1(G,\mathbb{R})] = \det[P_E, C_1(G,\mathbb{R})] / \det[P_V, C_0(G,\mathbb{R})].$$

Mais $\det[P_E, C_1(G,\mathbb{R})] = \mathrm{sign}(|P_E|) \cdot \prod_{e\in E} \epsilon_P(e)$ et $\det[P_V, C_0(G,\mathbb{R})] = \mathrm{sign}(P_V)$. Ceci démontre bien la conjecture de Kontsevich et Shoikhet.

Remarque. On peut travailler partout avec des coefficients entiers (voir [7], paragraphe 22). En particulier, on sait *a priori* que $\det[P_E, H_1(G,\mathbb{R})] \in \mathbb{Z}$, d'où $\det[P_E, H_1(G,\mathbb{R})] \in \{1,-1\}$, puisque $\det[P_E, H_1(G,\mathbb{R})] \cdot \det[P_E^{-1}, H_1(G,\mathbb{R})] = 1$. En outre, on pourrait utiliser l'homologie non-réduite et supprimer l'hypothèse « connexe » si l'on fait intervenir la signature de la permutation induite sur les composantes connexes de G. Finalement, toutes sortes de généralisations de la conjecture de Kontsevich et Shoikhet aux endomorphismes (généralisés), aux complexes d'une dimension supérieure à un, etc. sont possibles. L'essentiel est l'applicabilité du résultat de Teleman [10].

Remerciements. Je voudrais remercier vivement D. Foata et J.-P. Jouanolou pour toute leur aide et assistance.

Références bibliographiques

[1] D. B. Fuchs, *Kogomologii beskonechnomernykh algebr Lie.* Nauka, 1984.

[2] J. L. Kelley et E. H. Spanier, *Euler characteristics.* Pacific J. Math. **26** (1968), 317-339.

[3] M. Kontsevich, *Formal (non)-commutative symplectic geometry.* in: The Gelfand Mathematical Seminars 1990-1992, Birkhäuser, 1993, 173-187.

[4] M. Kontsevich et B. Shoikhet, *Formality conjecture, geometry of complex manifolds and combinatorics of graph-complex.* preprint.

[5] S. Lang, *Algebra.* Addison-Wesley, 1965.

[6] S. Lang, *Algebra, Third Edition.* Addison-Wesley, 1997.

[7] J. R. Munkres, *Elements of algebraic topology.* Addison-Wesley, 1984.

[8] K. Salikhov, *On the orientation of graphs.* arXiv:math.CO/0012252, 5 pages.

[9] G. Scheja et U. Storch, *Lehrbuch der Algebra, Teil 2.* B. G. Teubner, Stuttgart, 1988.

[10] S. Teleman, *Sur la formule d'Euler-Poincaré-Hopf.* Rev. Math. Pures Appl. **2** (1957), 551-554.

Université Louis-Pasteur
Département de mathématique
7, rue René-Descartes
F-67084 Strasbourg
Courriel: lass@math.u-strasbg.fr

et

RWTH Aachen
Lehrstuhl II für Mathematik
Templergraben 55
D-52062 Aachen
Courriel: lass@math2.rwth-aachen.de