

Chapitre 1

Structures et théories

1.1 Structures, langage associé

Définition 1.1.

1. Une **structure** \mathcal{M} est un ensemble M non vide (le **domaine** de \mathcal{M}) muni :
 - d'une famille $(c_i^{\mathcal{M}})_{i \in I}$ de constantes, où $c_i^{\mathcal{M}} \in M$,
 - d'une famille $(f_j^{\mathcal{M}})_{j \in J}$ de fonctions, où pour tout $j \in J$, $f_j^{\mathcal{M}}$ est une fonction totale de M^{n_j} dans M pour un entier $n_j > 0$,
 - d'une famille $(R_k^{\mathcal{M}})_{k \in K}$ de relations, où pour tout $k \in K$, $R_k^{\mathcal{M}}$ est un sous-ensemble de M^{n_k} pour un entier $n_k > 0$.

On supposera de plus qu'une structure est toujours munie de l'égalité, c'est-à-dire que la diagonale de M^2 est l'une des relations $R_k^{\mathcal{M}}$. Le domaine de \mathcal{M} sera souvent confondu avec \mathcal{M} .

2. Le **langage** L associé à une structure \mathcal{M} consiste en :
 - un symbole de constante c_i pour chaque constante $c_i^{\mathcal{M}}$,
 - un symbole de fonction f_j **d'arité** n_j pour chaque fonction $f_j^{\mathcal{M}}$,
 - un symbole de relation R_k **d'arité** n_k pour chaque relation $R_k^{\mathcal{M}}$.
3. Une **L -structure** est une structure \mathcal{M} dont le langage associé est L .

Notation. Un langage arbitraire sera noté

$$L = \{(c_i)_{i \in I}, (f_j)_{j \in J}, (R_k)_{k \in K}\}.$$

Une L -structure sera notée

$$\mathcal{M} = \langle M, (c_i^{\mathcal{M}})_{i \in I}, (f_j^{\mathcal{M}})_{j \in J}, (R_k^{\mathcal{M}})_{k \in K} \rangle$$

ou plus simplement s'il n'y a pas d'ambiguïté

$$\mathcal{M} = \langle M, (c_i)_{i \in I}, (f_j)_{j \in J}, (R_k)_{k \in K} \rangle.$$

Dans ces notations, l'égalité sera le plus souvent omise.

Exemple 1.2.

1. $\langle \mathbb{N}, 0, + \rangle$ et $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ sont des structures ayant le même langage associé $L = \{0, +\}$ qui est constitué d'un symbole de constante 0, d'un symbole + de fonction binaire et d'un symbole de relation = pour l'égalité.
2. Le langage des ordres $L_{ord} = \{<\}$ ne contient que deux relations binaires = et <. Les structures $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ et $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ sont des L_{ord} -structures.
3. Le langage des groupes $L_{gp} = \{1, \cdot, ^{-1}\}$ contient une constante 1, une fonction binaire \cdot , une fonction unaire $^{-1}$ et l'égalité.
4. Le langage des anneaux $L_{ann} = \{0, 1, +, -, \cdot\}$ contient deux constantes 0 et 1, trois fonctions binaires +, -, \cdot , et l'égalité.

1.2 Sous-structures, plongements, isomorphismes

Fixons pour toute la suite un langage $L = \{(c_i)_{i \in I}, (f_j)_{j \in J}, (R_k)_{k \in K}\}$.

Définition 1.3. Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux L -structures.

1. \mathcal{M} est une **sous-structure** de \mathcal{N} (noté $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$) si $M \subset N$ et si cette inclusion préserve les constantes, les fonctions et les relations, c'est-à-dire telle que :
 - pour toute constante $c \in L$, $c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{N}}$,
 - pour toute fonction n -aire $f \in L$ et pour tout $\bar{a} \in M^n$, $f^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = f^{\mathcal{N}}(\bar{a})$,
 - pour toute relation n -aire $R \in L$ et pour tout $\bar{a} \in M^n$, $\bar{a} \in R^{\mathcal{M}}$ ssi $\bar{a} \in R^{\mathcal{N}}$.
2. Un **plongement** de \mathcal{M} dans \mathcal{N} est une application σ de M dans N qui préserve les constantes, les fonctions et les relations, c'est-à-dire telle que :
 - pour toute constante $c \in L$, $\sigma(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$,
 - pour toute fonction n -aire $f \in L$ et pour tout $\bar{a} \in M^n$, $\sigma(f^{\mathcal{M}}(\bar{a})) = f^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{a}))$,
 - pour toute relation n -aire $R \in L$ et pour tout $\bar{a} \in M^n$, $\bar{a} \in R^{\mathcal{M}}$ ssi $\sigma(\bar{a}) \in R^{\mathcal{N}}$.
 Remarquons d'une part que l'image d'un plongement est une sous-structure et que réciproquement \mathcal{M} est une sous-structure de \mathcal{N} ssi $M \subset N$ et cette inclusion est un plongement de \mathcal{M} dans \mathcal{N} .
 Notons par ailleurs que comme le langage est toujours supposé égalitaire, un plongement est toujours injectif.
3. Un **isomorphisme** de \mathcal{M} dans \mathcal{N} est un plongement surjectif. Un **automorphisme** de \mathcal{M} est un isomorphisme de \mathcal{M} sur lui-même. On dénote $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ pour \mathcal{M} isomorphe à \mathcal{N} .

Remarque 1.4.

1. Soit \mathcal{N} une L -structure. On dira aussi qu'une partie M de N est une **sous-structure** de \mathcal{N} si M contient toutes les constantes et est close par toutes les fonctions. Dans ce cas, on vérifie (exercice) que la structure ("induite sur M ")

$$\mathcal{M} := \langle M, (c_i^{\mathcal{N}}), (f_j^{\mathcal{N}}|_{M^{n_j}}), (R_k \cap M^{n_k}) \rangle$$

est une sous-structure, au sens précédent, de \mathcal{N} .

2. Soit \mathcal{N} une L -structure et A une partie de N . Il existe une plus petite sous-structure de \mathcal{N} contenant A , la sous-structure engendrée par A , qui est la clôture de A et de l'ensemble des constantes de L par les fonctions de L .
3. Les notions de sous-structure et plongement dépendent du langage choisi. Par exemple, \mathbb{N} est une sous-structure de $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ et de $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ mais pas de $\langle \mathbb{Z}, 0, +, - \rangle$.

Exercice 1.5. Soit un corps K .

1. Remarquer que toute sous-structure de la structure $\langle K, 0, 1, +, -, \cdot \rangle$ est un anneau.
2. Ajouter une fonction f au langage telle que toute sous-structure de $\langle K, 0, 1, +, -, \cdot, f \rangle$ soit un corps.

Exercice 1.6. Soit I un ensemble totalement ordonné et $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ une chaîne de L -structures ($\mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}_j$, pour tout $i < j$). Alors la réunion $M = \cup_{i \in I} \mathcal{M}_i$, est munie canoniquement d'une L -structure, notée $\mathcal{M} = \cup_{i \in I} \mathcal{M}_i$, qui satisfait pour tout $i \in I$, $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}$.

Définition 1.7. Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux L -structures.

1. Un **isomorphisme partiel** de \mathcal{M} dans \mathcal{N} est un isomorphisme d'une sous-structure de \mathcal{M} sur une sous-structure de \mathcal{N} . (Remarque : tout plongement est un isomorphisme partiel.)
2. On dira qu'une famille non vide \mathcal{F} d'isomorphismes partiels de \mathcal{M} dans \mathcal{N} est un **va-et-vient** entre les structures \mathcal{M} et \mathcal{N} si pour tout $\sigma \in \mathcal{F}$,
 - pour tout $m \in M$, il existe $\tau \in \mathcal{F}$ prolongeant σ tel que $m \in \text{Dom}(\tau)$ (**VA**),
 - pour tout $n \in N$, il existe $\tau \in \mathcal{F}$ prolongeant σ tel que $n \in \text{Im}(\tau)$ (**VIENT**).
3. On dira que \mathcal{M} et \mathcal{N} se correspondent par va-et-vient s'il existe un va-et-vient entre ces structures.

Exemple 1.8. Deux ordres totaux denses sans extrémité se correspondent par va-et-vient.

Soient $\langle X, < \rangle$ et $\langle Y, < \rangle$ deux ordres totaux denses sans extrémité. Soit \mathcal{F} la famille des isomorphismes entre des parties finies de X et Y . Cette famille est évidemment non vide : pour tout $x \in X$ et $y \in Y$, l'application qui à x associe y est un isomorphisme de $\{x\}$ sur $\{y\}$. Soit σ un isomorphisme de $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset X$ sur $B = \{b_1, \dots, b_n\} \subset Y$. On peut supposer que pour tout i , $\sigma(a_i) = b_i$ et que $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Dans ce cas on a aussi $b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Montrons le VA (le VIENT est symétrique) : soit $x \in X \setminus A$. Alors ou bien $x < a_1$ et dans ce cas on prolonge σ en envoyant x sur un $y < b_1$, ou bien $a_i < x < a_{i+1}$ et on prolonge σ en envoyant x sur un $y \in Y$ tel que $b_i < y < b_{i+1}$, ou bien $a_n < x$ et on prolonge σ en envoyant x sur un $y > b_n$.

Exemple 1.9. Deux corps algébriquement clos K_1 et K_2 de même caractéristique et de degré de transcendance infini se correspondent par va-et-vient.

Soit \mathcal{F} la famille des isomorphismes entre des sous-corps finiment engendrés respectivement de K_1 et K_2 . Comme K_1 et K_2 ont même caractéristique, \mathcal{F} est non vide car leurs corps premiers sont isomorphes.

Soit $\sigma \in \mathcal{F}$ un isomorphisme de k_1 sur k_2 . Montrons le VA (le VIENT est symétrique) : soit $a \in K_1$.

Ou bien a est algébrique sur k_1 . Soit $P \in k_1[X]$ soit polynôme minimal. Alors $Q = \sigma(P)$ est un polynôme irréductible de $k_2[X]$. Comme K_2 est algébriquement clos il existe $b \in K_2$ qui a Q pour polynôme minimal sur k_2 . On obtient alors un isomorphisme de $k_1(a)$ sur $k_2(b)$ qui prolonge σ en envoyant a sur b .

Ou bien a est transcendant sur k_1 . Comme k_2 est finiment engendré et K_2 est de degré de transcendance infini, il existe $b \in K_2$ transcendant sur k_2 . Même conclusion que dans le cas précédent.

Remarque 1.10. Si deux structures \mathcal{M} et \mathcal{N} sont isomorphes alors il existe un va-et-vient entre ces deux structures, celui réduit à cet isomorphisme.

Réciproquement :

Proposition 1.11. *Deux structures dénombrables qui se correspondent par va-et-vient sont isomorphes.*

Démonstration. Soit \mathcal{F} un va-et-vient entre deux structures dénombrables \mathcal{M} et \mathcal{N} . On choisit une énumération $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de M et une énumération $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de N .

On définit alors par récurrence une suite croissante $(\sigma_i)_{i \in \omega}$ d'isomorphismes partiels dans \mathcal{F} telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout $j < i$, $m_j \in \text{Dom}(\sigma_i)$ et $n_j \in \text{Im}(\sigma_i)$. On choisit pour cela, n'importe quel élément de \mathcal{F} pour σ_0 . Supposons que $\sigma_i \in \mathcal{F}$ est choisi. Par va-et-vient, il existe $\tau \in \mathcal{F}$ prolongeant σ_i tel que $m_i \in \text{Dom}(\tau)$ et $n_i \in \text{Im}(\tau)$. On prend alors pour σ_{i+1} , l'isomorphisme partiel τ .

Soit $\sigma = \cup_{i \in \mathbb{N}} \sigma_i$. Alors $\text{Dom}(\sigma) = M$ et $\text{Im}(\sigma) = N$. Vérifions que σ est un plongement :

– soit c une constante de L . Alors

$$\sigma(c^{\mathcal{M}}) = \sigma_0(c^{\text{Dom}(\sigma_0)}) = c^{\text{Im}(\sigma_0)} = c^{\mathcal{N}}.$$

– soient f une fonction n -aire de L , R une relation n -aire de L et $\bar{a} \in M^n$. Alors il existe un entier i tel que $\bar{a} \in (\text{Dom}(\sigma_i))^n$. On a donc

$$\sigma(f^{\mathcal{M}}(\bar{a})) = \sigma_i(f^{\text{Dom}(\sigma_i)}(\bar{a})) = f^{\text{Im}(\sigma_i)}(\sigma_i(\bar{a})) = f^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{a}))$$

$$\text{et } \bar{a} \in R^{\mathcal{M}} \text{ ssi } \bar{a} \in R^{\text{Dom}(\sigma_i)} \text{ ssi } \sigma_i(\bar{a}) \in R^{\text{Im}(\sigma_i)} \text{ ssi } \sigma(\bar{a}) \in R^{\mathcal{N}}.$$

□

Exemple 1.12. Deux ordres totaux denses sans extrémité et dénombrables sont isomorphes.

1.3 Formules

Afin d'étudier des classes de structures et non pas une structure fixée telle que le corps des nombres complexes, on définit en théorie des modèles un langage *du premier ordre* à partir du langage de base vu précédemment. Ainsi on pourra exprimer certaines propriétés et définir par exemple la classe ou la *théorie* des corps algébriquement clos. On pourra aussi parler de certaines parties d'une classe de structures, les *ensembles définissables* qui correspondront en particulier pour les corps algébriquement clos, aux ensembles constructibles.

Nous avons précédemment fixé un langage L et nous allons de plus utiliser un ensemble infini dénombrable de variables qui sont généralement notées x, y, z, t, x_i, \dots pour construire récursivement (ou par induction) les L -termes et ensuite les L -formules (du premier ordre) :

Définition 1.13.

1. On commence par définir l'ensemble des **termes** du langage L par l'induction suivante :
 - toutes les constantes de L et toutes les variables sont des L -termes,
 - si f est une fonction n -aire de L et t_1, \dots, t_n sont des termes, alors $f(t_1, \dots, t_n)$ est un terme.
2. On définit ensuite l'ensemble des **formules** de L par l'induction suivante :
 - **Les formules atomiques** : si R est une relation n -aire de L et t_1, \dots, t_n sont des termes alors $R(t_1, \dots, t_n)$ est une formule,
 - **Combinaisons booléennes (négation, conjonction, disjonction)** : si ϕ et ψ sont des formules alors $\neg\phi$ (**non** ϕ), $(\phi \wedge \psi)$ (**ϕ et ψ**) et $(\phi \vee \psi)$ (**ϕ ou ψ**) sont des formules,
 - **Quantifications universelle et existentielle** : si ϕ est une formule et x est une variable alors $\forall x\phi$ (**pour tout** x , ϕ) et $\exists x\phi$ (**il existe** x , ϕ) sont des formules.
3. Variables liées, variables libres :
 - si ϕ est une formule et x est une variable alors les occurrences de x dans les formules $\forall x\phi$ et $\exists x\phi$ sont **liées** au quanteur (ou quantificateur) \forall ou \exists , exceptées celles qui étaient liées auparavant dans la formule ϕ ,
 - si ϕ est une formule et x est une variable alors les occurrences de x qui ne sont liées à aucun quanteurs sont dites **libres**. En particulier toutes les occurrences des variables d'une formule sans quanteur sont libres.
4. Un **énoncé** ou **formule close** est une formule dont toutes les (occurrences de) variables sont liées.

Remarque. Une formule est un mot (**fni**) sur l'alphabet $L \cup \{x, y, z, t, \dots\} \cup \{\neg, \vee, \wedge, \exists, \forall\} \cup \{, , (,)\}$.

Exemple 1.14. Les termes de L_{ord} sont les variables ; les formules atomiques de L_{ord} sont les égalités et les inégalités. Les formules suivantes sont des énoncés de L_{ord} qui décriront, une fois interprétés, les ordres totaux :

1. $\forall x \neg x < x$,
2. $\forall x \forall y ((x < y \vee y < x) \vee x = y)$,
3. $\forall x \forall y \forall z \neg((x < y \wedge y < z) \wedge (z = x \vee z < x))$.

Nous allons très rapidement passer au sens ("naturel") que l'on donne à ces formules dans une structure. Pour être tout à fait rigoureux dans nos futurs définitions et démonstrations par induction sur la construction des formules, il est nécessaire de vérifier que la lecture des formules est unique. Nous laissons la vérification de ce résultat syntaxique au lecteur :

Fait 1.15 (Lecture unique).

1. *Chaque terme est, soit une variable, soit une constante, soit de la forme $f(t_1, \dots, t_n)$ où f est une fonction d'arité n et t_1, \dots, t_n sont des termes. Cette écriture est **uniquement déterminée**.*
2. *Chaque formule est :*
 - *soit atomique et de la forme $R(t_1, \dots, t_n)$ où R est une relation d'arité n et t_1, \dots, t_n sont des termes,*
 - *soit de la forme $\neg\phi$ où ϕ est une formule,*
 - *soit de la forme $(\phi_1 \wedge \phi_2)$ ou de la forme $(\phi_1 \vee \phi_2)$ où ϕ_1 et ϕ_2 sont deux formules,*
 - *soit de la forme $\exists x\phi$ ou de la forme $\forall x\phi$ où ϕ est une formule et x est une variable.*

*Cette écriture est **uniquement déterminée**.*

1.4 Satisfaction

Pour définir l'interprétation des termes et la satisfaction des formules dans une structure, on considérera toujours un terme t avec un choix de variables $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ tel que \bar{x} contiennent au moins toutes les variables ayant une occurrence dans t et de même on considérera une formule ϕ avec un uple \bar{x} de variables tel que toute variable ayant une occurrence libre dans ϕ se trouve dans l'uple \bar{x} . On utilisera alors les notations $t(\bar{x})$ et $\phi(\bar{x})$.

Notation. Pour toute la suite du cours les notations \bar{x}, \bar{y}, \dots désigneront des uples **finis** de variables et les notations $\bar{a}, \bar{b}, \bar{m} \dots$ désigneront des uples **finis** d'éléments.

Définition 1.16. Soit \mathcal{M} une L -structure.

1. Soit $t(\bar{x})$ un terme et $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n)$ un uple d'éléments de M de même longueur que \bar{x} . On obtient un terme $t(\bar{m})$, à **paramètres** \bar{m} , en substituant m_i à toute occurrence de x_i dans t . On définit alors l'**interprétation** $t^{\mathcal{M}}(\bar{m}) \in M$ du terme $t(\bar{m})$ par l'induction suivante :

- l'interprétation d'une constante c est $c^{\mathcal{M}}$,
 - l'interprétation d'un paramètre m est m ,
 - l'interprétation de $f(t_1, \dots, t_n)(\bar{m})$ où f est une fonction n -aire et t_1, \dots, t_n sont des termes est $f(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{M}}(\bar{m}) = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{m}), \dots, t_n^{\mathcal{M}}(\bar{m}))$.
2. De même pour une formule $\phi(\bar{x})$, on obtient une formule $\phi(\bar{m})$, à paramètres \bar{m} , en substituant m_i à toute occurrence libre de x_i dans ϕ . On définit alors la **satisfaction** de $\phi(\bar{m})$ dans \mathcal{M} , que l'on dénote $\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})$, par l'induction suivante :
- $\mathcal{M} \models R(t_1, \dots, t_n)(\bar{m})$ ssi $(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{m}), \dots, t_n^{\mathcal{M}}(\bar{m})) \in R^{\mathcal{M}}$,
 - $\mathcal{M} \models \neg\phi(\bar{m})$ ssi $\mathcal{M} \not\models \phi(\bar{m})$,
 - $\mathcal{M} \models (\phi_1 \wedge \phi_2)(\bar{m})$ ssi $\mathcal{M} \models \phi_1(\bar{m})$ et $\mathcal{M} \models \phi_2(\bar{m})$,
 - $\mathcal{M} \models (\phi_1 \vee \phi_2)(\bar{m})$ ssi $\mathcal{M} \models \phi_1(\bar{m})$ ou $\mathcal{M} \models \phi_2(\bar{m})$,
 - $\mathcal{M} \models \forall x\phi(x, \bar{m})$ ssi pour tout $a \in M$, $\mathcal{M} \models \phi(a, \bar{m})$,
 - $\mathcal{M} \models \exists x\phi(x, \bar{m})$ ssi il existe $a \in M$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(a, \bar{m})$.
3. Si $\phi(\bar{m})$ est satisfaite dans \mathcal{M} ($\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})$), on dit également que $\phi(\bar{m})$ est **vraie** dans \mathcal{M} , que \mathcal{M} **satisfait** $\phi(\bar{m})$ ou que \bar{m} satisfait $\phi(\bar{x})$ dans \mathcal{M} .
4. Soient $\phi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ deux formules. On dit que $\phi(\bar{x})$ **implique** $\psi(\bar{x})$ si pour toute L -structure \mathcal{M} et tout $\bar{m} \in M$, si $\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})$ alors $\mathcal{M} \models \psi(\bar{m})$.
Les formules $\phi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ sont **équivalentes** si $\phi(\bar{x})$ implique $\psi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ implique $\phi(\bar{x})$.

Exercice 1.17. Toute formule est équivalente à une formule ne contenant ni le connecteur booléen \vee , ni le quanteur \forall .

On vérifie facilement que dans une conjonction ou une disjonction de plusieurs formules, tout choix de parenthèses donne une formule équivalente. On supprimera donc en général les parenthèses superflues.

Par la suite, nous utiliserons les abréviations suivantes :

- $\phi \rightarrow \psi$ pour $\neg\phi \vee \psi$,
- $\phi \leftrightarrow \psi$ pour $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$.

Exercice 1.18. Deux formules $\phi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ sont équivalentes si et seulement toute L -structure satisfait $\forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.

Exercice 1.19. Toute formule est équivalente à une formule **prénexe**, c'est-à-dire à une formule de la forme $Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_nx_n\phi$ où les Q_i sont des quanteurs et ϕ est une formule sans quanteur.

Maintenant que nous avons défini les formules, nous pouvons parler des structures vérifiant les mêmes énoncés. Dans le paragraphe **Théories** nous parlerons plus précisément de classes de structures vérifiant certains énoncés.

Définition 1.20. Deux L -structures \mathcal{M} et \mathcal{N} sont **élémentairement équivalentes** (noté $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$) si elles satisfont les mêmes énoncés.

Exemple 1.21.

1. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle \equiv \langle 2\mathbb{Z}, + \rangle$ car ces deux structures sont isomorphes (voir Cor 1.24).
2. $\langle \mathbb{Q}, + \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, + \rangle$. (Cf plus loin, théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion).
3. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle \not\equiv \langle \mathbb{Q}, + \rangle$ car $\forall x \exists y x = y + y$ est satisfaite dans \mathbb{Q} mais pas dans \mathbb{Z} .

Exercice 1.22. Si \mathcal{M} est une L -structure finie et $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$ alors $|\mathcal{N}| = |\mathcal{M}|$.

La méthode de va-et-vient sera souvent utilisée pour montrer que deux structures sont élémentairement équivalentes :

Proposition 1.23. Si \mathcal{F} est un va-et-vient entre deux structures \mathcal{M} et \mathcal{N} alors pour tout $\sigma \in \mathcal{F}$, tout $\bar{m} \in (\text{Dom}(\sigma))^n$ (ici n peut-être nul) et toute formule $\phi(\bar{x})$,

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathcal{N} \models \phi(\sigma(\bar{m})).$$

En particulier, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

Démonstration. Commençons par remarquer qu'un isomorphisme partiel préserve les formules atomiques. Soit σ un isomorphisme partiel de \mathcal{M} dans \mathcal{N} . Montrons par induction, que pour tout terme $t(\bar{x})$ et tout $\bar{m} \in (\text{Dom}(\sigma))^n$, $t^{\mathcal{M}}(\bar{m}) \in \text{Dom}(\sigma)$ et $\sigma(t^{\mathcal{M}}(\bar{m})) = t^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{m}))$. Pour les constantes et les variables, c'est évident car $\text{Dom}(\sigma)$ est une sous-structure de \mathcal{M} et σ est un isomorphisme de $\text{Dom}(\sigma)$ sur la sous-structure $\text{Im}(\sigma)$ de \mathcal{N} . Si $t(x)$ est le terme $f(t_1, \dots, t_n)$ où f est une fonction n -aire et $t_1(\bar{x}), \dots, t_n(\bar{x})$ sont des termes pour lesquels le résultat est vrai. Alors $f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{m}), \dots, t_n^{\mathcal{M}}(\bar{m})) \in \text{Dom}(\sigma)$ car $\text{Dom}(\sigma)$ est une sous-structure de \mathcal{M} . De plus

$$\sigma(t^{\mathcal{M}}(\bar{m})) = \sigma(f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{m}), \dots, t_n^{\mathcal{M}}(\bar{m}))) = f^{\mathcal{N}}(\sigma(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{m})), \dots, \sigma(t_n^{\mathcal{M}}(\bar{m})))$$

car σ est un isomorphisme partiel. Par hypothèse d'induction, on obtient

$$\sigma(t^{\mathcal{M}}(\bar{m})) = f^{\mathcal{N}}(t_1^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{m})), \dots, t_n^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{m}))) = t^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{m})).$$

On en déduit qu'un isomorphisme partiel préserve les formules atomiques et, par combinaisons booléennes, toutes les formules sans quanteur.

Nous montrons maintenant le résultat par induction sur la construction des formules pour tous les éléments de \mathcal{F} . Si le résultat est vrai pour deux formules, il est évidemment vrai pour toute combinaison booléenne de ces formules. Il suffit donc de vérifier que si le résultat est vrai pour $\phi(x, \bar{y})$ il est encore vrai pour $\exists x \phi(x, \bar{y})$. Soit $\sigma \in \mathcal{F}$ et $\bar{m} \in (\text{Dom}(\sigma))^n$. Si $\mathcal{M} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$ alors il existe $a \in M$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(a, \bar{m})$. Par VA, il existe $\tau \in \mathcal{F}$ prolongeant σ tel que $a \in \text{Dom}(\tau)$. Par hypothèse d'induction, $\mathcal{N} \models \phi(\tau(a), \tau(\bar{m}))$ donc $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, \sigma(\bar{m}))$. Si $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, \sigma(\bar{m}))$, on fait de même avec le VIENT. \square

Corollaire 1.24. Deux structures isomorphes sont élémentairement équivalentes.

Exercice 1.25. Montrer que deux ordres totaux denses sans extrémité sont élémentairement équivalents. En particulier $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, < \rangle$.

Exercice 1.26. Donner un exemple de structures \mathcal{M} et \mathcal{N} tel que \mathcal{M} est une sous-structure de \mathcal{N} mais n'est pas élémentairement équivalente à \mathcal{N} .

1.5 Ensembles définissables

Avec notre langage nous pourrons aussi étudier les parties définies par des formules dans une structure :

Définition 1.27. Soit \mathcal{M} une L -structure. Une partie D de M^n est un **ensemble définissable** dans \mathcal{M} si il existe une formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ et des paramètres \bar{b} dans M tels que

$$D = \{\bar{a} \in M^n : \mathcal{M} \models \phi(\bar{a}, \bar{b})\}.$$

On dit alors que D est définissable avec des paramètres dans B ou est défini par une formule à paramètres dans B si $\bar{b} \subset B$. Si de plus D est défini par une formule atomique, on dit que D est un **ensemble définissable atomique**.

On note $\text{Def}(\mathcal{M})$ la famille des ensembles définissables de \mathcal{M} .

Exemple 1.28. Dans un groupe $\langle G, 1, \cdot, {}^{-1} \rangle$, le centralisateur C de G est définie par $\phi(x) := \forall y \ xy = yx$. Soit $\psi(x, y) := (xy = yx)$. Pour tout $a \in G$, le centralisateur de a , $C(a)$, est définie par $\psi(x, a)$.

Exercice 1.29. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est une partie définissable dans la structure $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$. A-t-on besoin de paramètres ?

Exercice 1.30. Montrer que l'ordre sur \mathbb{R} est définissable sans paramètre dans la structure $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$.

Exercice 1.31. La famille $\text{Def}(\mathcal{M})$ est close par

1. combinaisons booléennes finies : si $A, B \in \text{Def}(\mathcal{M})$, le complémentaire de A , l'union et l'intersection de A et B sont dans $\text{Def}(\mathcal{M})$,
2. produits cartésiens : si $A, B \in X$, $A \times B \in \text{Def}(\mathcal{M})$,
3. projections : si A est une partie définissable de M^{n+m} alors la projection de A sur M^n est définissable,
4. spécialisations : si A est une partie définissable de M^{n+m} et si $\bar{b} \in M^m$ alors

$$A(\bar{b}) := \{\bar{a} \in M^n : (\bar{a}, \bar{b}) \in A\} \in \text{Def}(\mathcal{M}),$$

5. permutations des coordonnées : si A est une partie définissable de M^n et σ une permutation de $\{1, \dots, n\}$ alors

$$\sigma(A) := \{(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}) : (a_1, \dots, a_n) \in A\} \in \text{Def}(\mathcal{M}).$$

La famille $\text{Def}(\mathcal{M})$ est en fait la plus petite famille de parties de $\cup_{n>0} M^n$, contenant les ensembles définissables atomiques et étant close par combinaisons booléennes finies, produits cartésiens et projections.

Exemple 1.32. Soit K un corps commutatif considéré dans le langage L_{ann} . La famille des ensembles atomiques de \mathcal{M} est formée des parties définies par des équations polynomiales. Si on clôt par intersections finis, on obtient alors les **fermés de Zariski**. Alors si on clôt par combinaisons booléennes finies, on obtient les **ensembles constructibles**. Ce n'est pas en général clos par projection. Par contre c'est le cas si K est un corps algébriquement clos (Théorème de Chevalley). Ce résultat correspond, d'un point de vue modèle théorique, à l'élimination des quantificateurs dans les corps algébriquement clos (cf suite du cours). Les ensembles définissables d'un corps algébriquement clos sont donc exactement les ensembles constructibles.

Proposition 1.33. Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux L -structures. Supposons que \mathcal{M} est fini. Alors $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ ssi $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

Démonstration. Soit n le cardinal de \mathcal{M} et (a_1, \dots, a_n) une énumération de M . Remarquons qu'il y a un nombre fini de parties de M^n car M est fini. Soit $(D_i)_{i \in I}$ une énumération des parties de M^n contenant \bar{a} et définissables dans \mathcal{M} sans paramètre. Notons pour tout $i \in I$, une formule $\phi_i(\bar{x})$ définissant D_i . Soit $\phi(\bar{x})$ la conjonction de cet ensemble fini de formules. Alors $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$, donc $\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x})$. Comme $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$, $\mathcal{N} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x})$. Soit donc $\bar{b} \in N^n$ tel que $\mathcal{N} \models \phi(\bar{b})$.

Notons σ l'application de M dans N qui à a_k associe b_k . Nous allons vérifier que σ est un isomorphisme. Remarquons tout d'abord que σ est bijective. En effet il existe un ensemble définissable D_{i_0} qui dit que les a_k sont distincts. Par conséquent les b_k sont distincts et comme N a même cardinal que M (voir exercice), $N = \{b_1, \dots, b_k\}$.

Vérifions que σ est un plongement :

1. soit c une constante de L . Alors il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $c^{\mathcal{M}} = a_k$. Soit D_c la partie de M^n définie par la formule $x_k = c$. Il existe $i \in I$ tel que $D_c = D_i$. Donc $\mathcal{M} \models \forall \bar{x} (\phi_i(\bar{x}) \leftrightarrow x_k = c)$. D'où $c^{\mathcal{N}} = b_k$.
2. soient f une fonction r -aire et $\bar{m} = (m_1, \dots, m_r) \in M^r$. Soit $m_0 := f^{\mathcal{M}}(\bar{m})$. Pour tout $j \in \{0, \dots, r\}$, soit $k_j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $m_j = a_{k_j}$. On considère alors $D_{f, \bar{m}}$ la partie de M^n définie par la formule $f(x_{k_1}, \dots, x_{k_r}) = x_{k_0}$. On en déduit que $\sigma(m_0) = f^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{m}))$.
3. soient R une relation r -aire et $\bar{m} = (m_1, \dots, m_r) \in M^r$. Pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, soit $k_j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $m_j = a_{k_j}$. On considère alors la partie $D_{R, \bar{m}}$ de M^n définie par $R(x_{k_1}, \dots, x_{k_r})$ si $\mathcal{M} \models R^{\mathcal{M}}(\bar{m})$, la partie $D_{\neg R, \bar{m}}$ de M^n définie par $\neg R(x_{k_1}, \dots, x_{k_r})$ sinon. On en déduit que $\mathcal{M} \models R^{\mathcal{M}}(\bar{m})$ ssi $\mathcal{N} \models R^{\mathcal{N}}(\sigma(\bar{m}))$.

□

1.6 Théories

Nous définissons enfin les mots *modèle* et *théorie* :

Définition 1.34. Soit Σ un ensemble d'énoncés.

1. Une L -structure \mathcal{M} est un **modèle** de Σ (noté $\mathcal{M} \models \Sigma$) si tout énoncé de Σ est satisfait par \mathcal{M} .
2. On dit que Σ est **consistant** si Σ a un modèle.
3. Un énoncé ϕ est une **conséquence** de Σ (noté $\Sigma \vdash \phi$) si tout modèle de Σ satisfait ϕ .
4. Une **théorie** T est un ensemble consistant d'énoncés contenant toutes ses conséquences. Si T correspond à l'ensemble des conséquences de Σ , on dit que Σ est un **ensemble d'axiomes** pour T ou une **axiomatisation** de T .
5. Une théorie T est **complète** si elle est maximale pour l'inclusion, ce qui signifie que pour toute formule ϕ , $\phi \in T$ ou $\neg\phi \in T$.
6. En général si une théorie T est axiomatisée par Σ , on confond T et Σ . En particulier on dira que Σ est complet si pour tout énoncé ϕ , $\Sigma \vdash \phi$ ou $\Sigma \vdash \neg\phi$.
7. Si \mathcal{M} est une L -structure, on note $\text{Th}(\mathcal{M})$ la théorie constituée de l'ensemble des énoncés vrais dans \mathcal{M} . Cette théorie est évidemment complète.

Remarque 1.35.

1. Deux théories complètes qui ont un modèle commun sont égales.
2. Deux modèles \mathcal{M} et \mathcal{N} sont élémentairement équivalents ssi $\text{Th}(\mathcal{M}) = \text{Th}(\mathcal{N})$ ssi \mathcal{M} et \mathcal{N} sont modèles d'une même théorie complète.
3. Une théorie est complète si ses modèles sont tous élémentairement équivalents.

Exercice 1.36. Soit T une théorie complète.

1. Si T a un modèle fini \mathcal{M} , alors tous ses modèles sont isomorphes à \mathcal{M} .
2. Si T a un modèle infini, alors tous ses modèles sont infinis. (Nous verrons plus loin que, contrairement au cas fini, une structure infinie ne peut pas être déterminée par sa théorie.)

Exemple 1.37.

1. Théorie des ensembles infinis dans le langage réduit à l'égalité :
– $\exists x_1 x_2 \dots x_n \wedge_{i \neq j} (x_i \neq x_j)$, pour tout $n > 0$.

2. Théorie des ordres totaux :
– $\forall x \neg x < x$,
– $\forall x \forall y ((x < y \vee y < x) \vee x = y)$,
– $\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z) \rightarrow (x < z)$.

Cette théorie n'est pas complète. Par exemple $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ et $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ sont des modèles de cette théorie qui ne sont pas élémentairement équivalents. Le premier satisfait l'énoncé $\exists x \forall y \neg (y < x)$ alors que le second non.

3. Théorie des ordres totaux denses sans extrémité :
– théorie des ordres totaux,
– $\forall x \forall y (x < y) \rightarrow (\exists z (x < z < y))$,

– $\forall x \exists y \exists z (y < x < z)$.

Cette théorie est complète. (Voir exo 1.25.)

4. La théorie des corps commutatifs n'est pas complète, elle a des modèles finis et infinis. La théorie des corps commutatifs de caractéristique 0 n'est pas non plus complète. La formule $\exists x(x^2 = -1)$ est vraie dans \mathbb{C} mais pas dans \mathbb{R} .

5. Théorie des corps algébriquement clos de caractéristique p fixé :

– théorie des corps commutatifs,

– $\underbrace{1 + \dots + 1}_p = 0$ si $p > 0$; $\underbrace{1 + \dots + 1}_n \neq 0$, pour tout $n > 0$, si $p = 0$.

– $\forall y_0 \dots \forall y_n (y_n \neq 0 \rightarrow \exists x \sum_{i=0}^n y_n x^i = 0)$, pour tout $n > 0$.

Cette théorie est complète. (Voir exo 2.18 ou exemple 2.21.)

6. Théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion non triviaux dans $L = \{0, +, -\}$:

– théorie des groupes abéliens,

– $\exists x \neq 0$,

– $\forall x \exists y ny = x$, pour tout $n > 0$,

– $\forall x(x = 0 \vee nx \neq 0)$, pour tout $n > 0$.

Cette théorie est complète. (Voir exemple 2.21)

Exercice 1.38. Soit L le langage réduit à une relation binaire E (et l'égalité).

1. Donner une axiomatisation (dans ce langage) de la théorie de la relation d'équivalence à deux classes infinies.
2. Donner une axiomatisation de la théorie de la relation d'équivalence à une infinité de classes toutes infinies.

1.7 Extensions élémentaires

Définition 1.39.

1. Un plongement σ de \mathcal{M} dans \mathcal{N} est **élémentaire** si pour toute formule $\phi(\bar{x})$ et tout $\bar{m} \in M^n$,

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathcal{N} \models \phi(\sigma(\bar{m})).$$

2. \mathcal{M} est une **sous-structure élémentaire de \mathcal{N}** (notée $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$) si \mathcal{M} est une sous-structure de \mathcal{N} telle que pour toute formule $\phi(\bar{x})$ et tout $\bar{m} \in M^n$,

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathcal{N} \models \phi(\bar{m}).$$

3. Un isomorphisme partiel σ de \mathcal{M} dans \mathcal{N} est **élémentaire** si pour toute formule $\phi(x_1, \dots, x_n)$ et tout $\bar{m} \in \text{dom}(\sigma)^n$.

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathcal{N} \models \phi(\sigma(\bar{m})).$$

Notation. Pour \mathcal{M} une L -structure et A un ensemble de paramètres dans M , on note $\text{Th}(\mathcal{M}, A)$ l'ensemble des énoncés à paramètres dans A qui sont vrais dans \mathcal{M} , c'est-à-dire la théorie de la $L \cup \{a : a \in A\}$ -structure $\langle M, L, a : a \in A \rangle$.

Exercice 1.40. Soit \mathcal{M} une sous-structure de \mathcal{N} . Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$,
2. $\text{Th}(\mathcal{M}, M) = \text{Th}(\mathcal{N}, M)$,
3. l'inclusion $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$ est un plongement élémentaire.

On appelle $\text{Th}(\mathcal{M}, M)$ le **diagramme élémentaire** de \mathcal{M} .

Remarque 1.41.

- Un isomorphisme est élémentaire (Rem 1.10 et prop 1.23).
- Si \mathcal{M} est une sous-structure élémentaire de \mathcal{N} alors $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. (De même, si \mathcal{M} se plonge élémentairement dans \mathcal{N} , alors $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.)
- La réciproque est fautive : une sous-structure élémentairement équivalente n'est pas nécessairement élémentaire. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle \equiv \langle 2\mathbb{Z}, + \rangle$ mais $\langle 2\mathbb{Z}, + \rangle \not\prec \langle \mathbb{Z}, + \rangle$.

Exercice 1.42. Soient $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_3$.

- Si $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_2 \prec \mathcal{M}_3$ alors $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_3$.
- Si $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_3$ et $\mathcal{M}_2 \prec \mathcal{M}_3$ alors $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$.
- Trouver un exemple tel que $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_3$ mais $\mathcal{M}_2 \not\prec \mathcal{M}_3$.

Exercice 1.43. Soit I un ensemble totalement ordonné et $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ une chaîne élémentaire de L -structures ($\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_j$, pour tout $i < j$). Alors pour tout $i \in I$, $\mathcal{M}_i \prec \cup_{i \in I} \mathcal{M}_i$.

Voici un critère utile pour vérifier qu'une sous-structure est élémentaire. Ce critère n'utilise que la satisfaction dans la grande structure :

Proposition 1.44 (Test de Tarski). Soit \mathcal{M} une sous-structure de \mathcal{N} . Alors $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ si et seulement si pour toute formule $\phi(x, \bar{y})$ et tout $\bar{m} \in M^n$, si $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$ alors il existe $m_0 \in M$ tel que $\mathcal{N} \models \phi(m_0, \bar{m})$.

Démonstration. Si $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ et $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$. Alors $\mathcal{M} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$. Donc il existe $m_0 \in M$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(m_0, \bar{m})$. Alors $\mathcal{N} \models \phi(m_0, \bar{m})$.

Réciproquement si $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ satisfont le critère de Tarski. On montre par induction sur les formules que pour toute formule $\phi(\bar{x})$ et tout $\bar{m} \in M^n$, $\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})$ ssi $\mathcal{N} \models \phi(\bar{m})$. Le résultat est évidemment vérifié pour les formules atomiques car \mathcal{M} est une sous-structure de \mathcal{N} . Si le résultat est vrai pour ϕ_1 et ϕ_2 , il est facile de voir qu'il est encore vrai pour les combinaisons booléennes de ϕ_1 et ϕ_2 . Il suffit donc de montrer que si le résultat est vrai pour $\phi(x, \bar{y})$ il est encore vrai pour $\exists x \phi(x, \bar{y})$. Soit $\bar{m} \in M^n$. Si $\mathcal{M} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$ alors il existe $m_0 \in M$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(m_0, \bar{m})$. Par hypothèse de récurrence, alors $\mathcal{N} \models \phi(m_0, \bar{m})$ et donc $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$. Si $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$. Alors par le critère de Tarski, il existe $m_0 \in M$ tel que $\mathcal{N} \models \phi(m_0, \bar{m})$. Par hypothèse de récurrence, $\mathcal{M} \models \phi(m_0, \bar{m})$ et donc $\mathcal{M} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$. \square

Corollaire 1.45 (Théorème de Löwenheim-Skolem Descendant). *Soient \mathcal{N} une L -structure infinie, A un ensemble de paramètres dans N , et κ un cardinal infini tel que $\max(|A|, |L|) \leq \kappa \leq |\mathcal{N}|$. Alors il y a une sous-structure élémentaire $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ contenant A et de cardinal κ .*

Démonstration. On peut supposer que $|A| = \kappa$. On construit par récurrence une chaîne $(\mathcal{M}_i)_{i \in \omega}$ de sous-structures de \mathcal{N} telle que \mathcal{M}_0 contient A , telle que pour tout $i \in \omega$, $|\mathcal{M}_i| = \kappa$ et telle que pour toute formule $\phi(x, \bar{y})$ et $\bar{m}_i \in M_i^n$, si $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, \bar{m}_i)$ alors il existe $m_{i+1} \in M_{i+1}$ tel que $\mathcal{N} \models \phi(m_{i+1}, \bar{m}_i)$.

Soit \mathcal{M}_0 la sous-structure de \mathcal{N} engendrée par A . Cette sous-structure est de cardinal κ car $|L| \leq \kappa = |A|$. Si \mathcal{M}_i est construit, alors pour toute formule $\phi(x, \bar{y})$ (il y en a $\max(|L|, \aleph_0)$) et tout paramètre $\bar{m} \in M_i^n$ tel que $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, \bar{m})$ (il y en a au plus κ), on choisit $n_{\phi, \bar{m}} \in N$ tel que $\mathcal{N} \models \phi(n_{\phi, \bar{m}}, \bar{m})$. On définit alors \mathcal{M}_{i+1} comme la sous-structure engendrée par M_i et les $n_{\phi, \bar{m}}$. Cette sous-structure est évidemment de cardinal κ et vérifie l'hypothèse de récurrence.

Soit $\mathcal{M} := \cup_{i \in \omega} \mathcal{M}_i$. Alors \mathcal{M} est une sous-structure de \mathcal{N} de cardinal κ qui de plus vérifie le test de Tarski. C'est donc une sous-structure élémentaire de \mathcal{N} . \square

Revenons aux ensembles définissables pour terminer ce chapitre :

Définition 1.46. Si \mathcal{M} est une sous-structure élémentaire de \mathcal{N} et $D \subset M^n$ est un ensemble définissable dans \mathcal{M} , alors D a une extension canonique en un ensemble $D' \subset N^n$ définissable dans \mathcal{N} , tel que $D' \cap M^n = D$: si D est défini par une formule $\phi(\bar{x}, \bar{b})$ ($\bar{b} \subset M$) alors $D' := \{\bar{a} \in N^n : \mathcal{N} \models \phi(\bar{a}, \bar{b})\}$. En pratique on confondra D' avec D .

Exercice 1.47. Vérifier que D' ne dépend pas du choix de ϕ pour D .

Exercice 1.48. Soient $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Le test de Tarski est équivalent à pour toute partie non vide définissable $D \subset N$ à paramètres dans M , $D \cap M \neq \emptyset$.

Chapitre 2

Compacité, Théorème de Löwenheim-Skolem

Ce chapitre est consacré à un théorème fondamental en théorie des modèles, le théorème de compacité et à ses premières conséquences. Commençons par énoncer ce théorème qui sera démontré dans le paragraphe suivant (2.2).

2.1 Énoncés du théorème de compacité

Théorème 2.1 (Compacité). *Soit Σ un ensemble d'énoncés tel que tout sous-ensemble fini de Σ a un modèle. Alors Σ a un modèle.*

Exercice 2.2. Soient Σ un ensemble d'énoncés et ϕ une conséquence de Σ ($\Sigma \vdash \phi$) alors ϕ est conséquence d'une partie finie de Σ . (Utiliser le théorème de compacité.)

Exercice 2.3.

1. Une théorie qui, pour tout entier n , a un modèle de cardinalité plus grand que n , a un modèle infini.
2. Il n'existe pas de théorie dans la langage L_{ord} dont les modèles sont précisément les ordres finis.
3. Il n'existe pas de théorie dans la langage L_{ann} dont les modèles sont précisément les corps finis.

Le théorème de compacité s'exprime topologiquement de la façon suivante : nous munissons l'ensemble \mathcal{T} des théories complètes dans le langage L d'une topologie. A tout énoncé ϕ , on associe l'ensemble $\langle \phi \rangle$ des théories complètes contenant ϕ . Alors les $\langle \phi \rangle$ forment une base d'ouverts pour une topologie, car si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux énoncés, $\langle \phi_1 \rangle \cap \langle \phi_2 \rangle = \langle \phi_1 \wedge \phi_2 \rangle$. Muni de cette topologie, \mathcal{T} est un espace séparé : si T_1 et T_2 sont deux théories complètes distinctes alors il existe un énoncé $\phi \in T_1$ tel que $\phi \notin T_2$. Donc $\langle \phi \rangle$ et $\langle \neg \phi \rangle$ sont des voisinages disjoints respectivement de T_1 et T_2 . Cet espace \mathcal{T} est de plus totalement discontinu, c'est-à-dire il admet une base d'ouverts qui sont

fermés : le complémentaire de $\langle \phi \rangle$ est $\langle \neg \phi \rangle$. Par conséquent, toute partie connexe de \mathcal{T} est soit vide, soit réduite à un point.

Théorème 2.4 (Compacité). *L'espace \mathcal{T} des théories complètes dans le langage L est compact.*

Exercice 2.5. Les deux énoncés ci-dessus du théorème de compacité sont équivalents.

Exercice 2.6. Les ouverts-fermés de \mathcal{T} sont les parties de la forme $\langle \phi \rangle$ pour ϕ un énoncé de \mathcal{T} .

Regardons maintenant un corollaire du théorème de compacité en termes d'ensembles définissables.

Corollaire 2.7 (Compacité). *Soit \mathcal{M} une L -structure et $(\phi_i(\bar{x}, \bar{m}_i))_{i \in I}$. Si pour toute partie finie I_0 de I , il existe $\bar{a} \in M^n$ tel que pour tout $i \in I_0$, $\mathcal{M} \models \phi_i(\bar{a}, \bar{m}_i)$ alors il existe une extension élémentaire \mathcal{N} de \mathcal{M} et $\bar{a} \in N^n$ tel que pour tout $i \in I$, $\mathcal{N} \models \phi_i(\bar{a}, \bar{m}_i)$.*

En d'autres termes, si $(D_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de M^n définissables dans \mathcal{M} tel que toute intersection finie de parties de cette famille est non vide dans la structure \mathcal{M} alors cette famille a une intersection non vide dans une extension élémentaire de \mathcal{M} .

Démonstration. Soit \bar{c} un n -uple de nouvelle constante. Considérons l'ensemble d'énoncés

$$\Sigma := \text{Th}(\mathcal{M}, M) \cup \{\phi_i(\bar{c}, \bar{m}_i) : i \in I\}$$

dans le langage $L \cup \{m : m \in M\} \cup \{\bar{c}\}$. Alors par hypothèse, pour toute partie finie de Σ , il existe $\bar{a} \in M^n$ telle $\langle M, L, m, \bar{a} : m \in M \rangle$ soit modèle de cette partie finie. Donc par le théorème de compacité Σ est consistant. Soit \mathcal{N} un modèle de Σ alors l'interprétation des constantes $\{m : m \in M\}$ forme une sous-structure élémentaire de \mathcal{N} , la structure de N dans le langage L . Cette sous-structure est isomorphe à \mathcal{M} car $\mathcal{N} \models \text{Th}(\mathcal{M}, M)$. Par un isomorphisme, on peut donc supposer que \mathcal{M} est une sous-structure élémentaire de \mathcal{N} et l'interprétation $\bar{a} \in N^n$ de \bar{c} dans \mathcal{N} implique que pour tout $i \in I$, $\mathcal{N}' \models \phi_i(\bar{a}, \bar{m}_i)$. \square

Exemple 2.8.

1. **Les entiers non-standards** : il existe une extension élémentaire de la structure $\langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot \rangle$ contenant un entier (non-standard) non nul qui est divisible par tous les entiers standards non nuls (les entiers de \mathbb{N}^*).
2. **Les réels non-standards** : il existe une extension élémentaire \mathbb{R}' de la structure $\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, < \rangle$ contenant un réel c (non-standard) strictement positif qui est **infinitement petit**, c'est-à-dire tel que pour tout réel r standard strictement positif ($r \in \mathbb{R}, r > 0$), $0 < c < r$. On a alors pour tout $r' \in \mathbb{R}'$ **borné** (tel qu'il existe $r_0 \in \mathbb{R}$ avec $-r_0 < r' < r_0$), il existe un unique réel standard $r \in \mathbb{R}$ **infinitement proche** de r' . On appelle r la **partie standard** de r' .

2.2 Ultraproduits - Une démonstration du théorème de compacité

Définition 2.9. Soit I un ensemble non vide. Un ensemble F de parties de I est un **filtre** sur I si :

- $I \in F$ et $\emptyset \notin F$,
- si $X, Y \in F$ alors $X \cap Y \in F$,
- si $X \in F$ et $X \subset Y$ alors $Y \in F$.

Un **ultrafiltre** est un filtre maximal pour l'inclusion.

Exercice 2.10. Un filtre U sur I est un ultrafiltre ssi pour toute partie A de U , A ou $I - A$ est dans U .

Exercice 2.11. Tout filtre sur I est contenu dans un ultrafiltre. (On utilisera le lemme de Zorn).

A l'aide d'un ultrafiltre, on peut construire de nouvelles structures à partir d'une famille de structures donnée :

Définition 2.12. Soit $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ une famille de L -structures et U un ultrafiltre sur I . L'ultraproduit $\prod_{i \in I} \mathcal{M}_i / U$ est la structure \mathcal{M} suivante :

1. le domaine de \mathcal{M} est le produit des M_i modulo la relation d'équivalence suivante :

$$(a_i)_{i \in I} \sim (b_i)_{i \in I} \text{ si et seulement si } \{i \in I : a_i = b_i\} \in U.$$

Cette relation est de manière évidente réflexive et symétrique. La transitivité découle du fait que U est un filtre : on a $\{i \in I : a_i = c_i\} \supset \{i \in I : a_i = b_i\} \cap \{i \in I : b_i = c_i\}$. On notera $[a_i]_{i \in I}$ la classe modulo U de l'uple $(a_i)_{i \in I}$.

2. pour toute constante $c \in L$, on pose $c^{\mathcal{M}} := [c^{\mathcal{M}_i}]_{i \in I}$.
3. pour toute fonction n -aire f de L , on pose

$$f^{\mathcal{M}} : ([a_i^1]_{i \in I}, \dots, [a_i^n]_{i \in I}) \mapsto [f^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n)]_{i \in I}.$$

4. pour toute relation n -aire R de L , on pose

$$R^{\mathcal{M}} := \{([a_i^1]_{i \in I}, \dots, [a_i^n]_{i \in I}) \in M^n : \{i \in I : (a_i^1, \dots, a_i^n) \in R^{\mathcal{M}_i}\} \in U\}.$$

Exercice 2.13. Vérifier que les fonctions et relations sont bien définies, c'est-à-dire qu'elle ne dépendent pas du choix des représentants. Noter de plus que la définition de $=^{\mathcal{M}}$ correspond à la vrai égalité sur M .

Théorème 2.14 (Critère de Łos). Soit U un ultrafiltre sur I et $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ une famille de L -structures. Si $\bar{m} = ([m_i^1]_{i \in I}, \dots, [m_i^n]_{i \in I})$ est un n -uple dans l'ultraproduit $\mathcal{M} := \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i / U$ et $\phi(\bar{x})$ est une formule, alors

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ si et seulement si } \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \phi(m_i^1, \dots, m_i^n)\} \in U.$$

En particulier si θ est un énoncé alors \mathcal{M} est modèle de cet énoncé si et seulement si il existe $X \in U$ tel que pour tout $i \in X$, \mathcal{M}_i est un modèle de θ .

Démonstration. On commence par vérifier par induction sur la construction des termes que si $t(\bar{x})$ est un terme alors

$$t^{\mathcal{M}}(\bar{m}) = [t^{\mathcal{M}_i}(m_i^1, \dots, m_i^n)]_{i \in I}.$$

Par définition de l'ultraproduit, c'est évident si $t(\bar{x})$ est une constante ou une variable. Soient $t_1(\bar{x}), \dots, t_k(\bar{x})$ des termes pour lesquels la propriété est vérifiée et $f \in L$ une fonction k -aire. Par hypothèse de récurrence, pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$,

$$t_j^{\mathcal{M}}(\bar{m}) = [t_j^{\mathcal{M}_i}(m_i^1, \dots, m_i^n)]_{i \in I},$$

et par définition de l'ultraproduit,

$$\begin{aligned} (f(t_1, \dots, t_n))^{\mathcal{M}}(\bar{m}) &= f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{m}), \dots, t_n^{\mathcal{M}}(\bar{m})) \\ &= [f^{\mathcal{M}_i}(t_1^{\mathcal{M}_i}(m_i^1, \dots, m_i^n), \dots, t_n^{\mathcal{M}_i}(m_i^1, \dots, m_i^n))]_{i \in I} \\ &= [f(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{M}_i}(m_i^1, \dots, m_i^n)]_{i \in I}. \end{aligned}$$

On vérifie maintenant le critère de Łos par induction sur la construction des formules. Par définition de l'ultraproduit et par ce qui précède le critère est évident pour les formules atomiques.

Supposons le critère vérifié pour deux formules $\phi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$. Alors $\mathcal{M} \models (\phi \wedge \psi)(\bar{m})$ ssi $X := \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \phi(m_i^1, \dots, m_i^n)\} \in U$ et $Y := \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \psi(m_i^1, \dots, m_i^n)\} \in U$. Comme U est un filtre, $X \in U$ et $Y \in U$ est équivalent à $X \cap Y \in U$. Or $X \cap Y = \{i \in I : \mathcal{M}_i \models (\phi \wedge \psi)(m_i^1, \dots, m_i^n)\} \in U$, donc le critère est alors vérifié pour $(\phi \wedge \psi)$.

On a aussi $\mathcal{M} \models \neg\phi(\bar{m})$ ssi $X \notin U$. Comme U est un ultrafiltre $X \notin U$ ssi $I \setminus X \in U$. Or $I \setminus X = \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \neg\phi(m_i^1, \dots, m_i^n)\}$, donc le critère est également vérifié pour $\neg\phi$.

Supposons maintenant le critère vérifié pour une formule $\phi(y, \bar{x})$. Soit $X := \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \exists y \phi(y, m_i^1, \dots, m_i^n)\}$. Si $\mathcal{M} \models \exists y \phi(y, \bar{m})$ alors il existe $[\bar{m}_i^0]_{i \in I} \in \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models \phi([\bar{m}_i^0]_{i \in I}, [\bar{m}_i^1]_{i \in I}, \dots, [\bar{m}_i^n]_{i \in I})$. Par hypothèse, $Y := \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \phi(m_i^0, m_i^1, \dots, m_i^n)\} \in U$. Donc X car $X \supset Y \in U$. Réciproquement, si $X \in U$, choisissons pour tout $i \in I$, $m_i^0 \in \mathcal{M}_i$ tel que si $\mathcal{M}_i \models \exists y \phi(y, m_i^1, \dots, m_i^n)$ alors $\mathcal{M}_i \models \phi(m_i^0, m_i^1, \dots, m_i^n)$. Alors $\{i \in I : \mathcal{M}_i \models \phi(m_i^0, m_i^1, \dots, m_i^n)\} = X$ et donc, par hypothèse, $\mathcal{M} \models \phi([\bar{m}_i^0]_{i \in I}, [\bar{m}_i^1]_{i \in I}, \dots, [\bar{m}_i^n]_{i \in I})$. Le critère est donc alors vérifié pour la formule $\exists y \phi$. \square

Démonstration du théorème de compacité. Considérons Σ un ensemble d'énoncé finiment consistant et pour toute partie finie i de Σ , soit \mathcal{M}_i un modèle de i . Nous allons montrer en utilisant le critère de Łos qu'un ultraproduit des \mathcal{M}_i est modèle de Σ .

Soit I l'ensemble des parties finies de Σ , et pour tout $i \in I$, soit $I_i := \{j \in I : j \supset i\}$. Alors $F := \{X \subset I : X \supset I_i \text{ pour un } i \in I\}$ est un filtre sur I . En effet : $I_{\{\emptyset\}} = I \in F$; $\emptyset \notin F$; si $X \supset I_i$ et $Y \supset I_j$ alors $X \cap Y \supset I_{i \cup j}$; si $X \supset I_i$ et $X \subset Y$ alors $Y \supset I_i$.

Soit U un ultrafiltre contenant F et \mathcal{M} l'ultraproduit $\prod_{i \in I} \mathcal{M}_i / U$. Alors \mathcal{M} est un modèle de Σ : en effet pour $\theta \in \Sigma$, $\mathcal{M}_i \models \theta$ pour tout $i \in I_{\{\theta\}}$, donc par le critère de Łos $\mathcal{M} \models \theta$. \square

2.3 Théorème de l'extension élémentaire commune

Lemme 2.15. *Si \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 sont deux L -structures élémentairement équivalentes, elles ont une extension élémentaire “commune” : il existe une L -structure \mathcal{N} telle que \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 se plongent élémentairement dans \mathcal{N} .*

Démonstration. On peut supposer que $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Considérons l'ensemble d'énoncés $\Sigma := \text{Th}(\mathcal{M}_1, M_1) \cup \text{Th}(\mathcal{M}_2, M_2)$ dans le langage $L \cup \{m_1 : m_1 \in M_1\} \cup \{m_2 : m_2 \in M_2\}$. Remarquons que les modèles de Σ correspondent aux extensions élémentaires communes à \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 . Nous allons donc montrer que Σ est consistant. Par compacité, il est suffisant de montrer que tout fragment fini de Σ est consistant. Un fragment fini de Σ est équivalent à la conjonction d'un énoncé $\theta_1(\bar{m}_1)$ de $\text{Th}(\mathcal{M}_1, M_1)$ et d'un énoncé $\theta_2(\bar{m}_2)$ de $\text{Th}(\mathcal{M}_2, M_2)$. Alors $\mathcal{M}_1 \models \exists \bar{x} \theta_2(\bar{x})$ car \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 sont élémentairement équivalentes et $\mathcal{M}_2 \models \theta_2(\bar{m}_2)$. Soit $\bar{m}'_2 \in M_1$, tel que $\mathcal{M}_1 \models \theta_2(\bar{m}'_2)$. Alors en interprétant \bar{m}_2 par \bar{m}'_2 dans M_1 , on fait de $\langle \mathcal{M}_1, L, \bar{m}_1, \bar{m}'_2 \rangle$ un modèle de $\theta_1(\bar{m}_1) \wedge \theta_2(\bar{m}_2)$. \square

Théorème 2.16. *Si $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ est une famille de L -structures élémentairement équivalentes, ces structures ont une extension élémentaire “commune”.*

Démonstration. Considérons ici l'ensemble d'énoncés $\Sigma := \cup_{i \in I} \text{Th}(\mathcal{M}_i, M_i)$. En itérant le lemme précédent, pour toute partie finie I_0 de I , $\cup_{i \in I_0} \text{Th}(\mathcal{M}_i, M_i)$ est consistant. On déduit par compacité que Σ est consistant. \square

2.4 Théorème de Löwenheim-Skolem - Théories κ -catégoriques

Lemme 2.17 (Löwenheim-Skolem ascendant). *Si \mathcal{M} est une L -structure infinie alors pour tout cardinal $\kappa \geq \max\{|L|, |M|\}$, il existe une extension élémentaire $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ de cardinal κ .*

Démonstration. Montrons d'abord qu'il existe une extension élémentaire \mathcal{N}_0 de \mathcal{M} de cardinal supérieur ou égal à κ . Pour cela considérons $(c_i)_{i \in \kappa}$ des nouveaux symboles de constantes et l'ensemble d'énoncés

$$\Sigma := \text{Th}(\mathcal{M}, M) \cup \{c_i \neq c_j : i \neq j\}.$$

Chaque fragment fini de Σ ne mentionne qu'un nombre fini de constantes, qui peuvent être interprétés par des éléments distincts de \mathcal{M} car \mathcal{M} est infini. Donc Σ est finiment consistant et donc consistant par compacité. Un modèle \mathcal{N}_0 de Σ est alors une extension élémentaire de \mathcal{M} de cardinal supérieur ou égal à κ . Par Löwenheim-Skolem descendant, il existe une sous-structure élémentaire \mathcal{N} de \mathcal{N}_0 contenant M et de cardinal κ , qui est alors une extension élémentaire de \mathcal{M} . \square

Exercice 2.18. La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique p fixé ($p \geq 0$) est complète. (Utiliser 1.9).

Convention. Le cardinal d'une théorie T dans un langage L , notée $|T|$ est par convention le cardinal de l'ensemble des formules du langage L , c'est-à-dire $|T| := \max\{\omega, |L|\}$. En particulier on dit que T est dénombrable si $|L| \leq \omega$.

Théorème 2.19 (Théorème de Löwenheim-Skolem). *Si T est une théorie qui a un modèle infini alors pour tout cardinal $\kappa \geq |T|$, T a un modèle de cardinal κ .*

Démonstration. Par Löwenheim-Skolem ascendant et descendant, il existe une structure N de cardinal κ élémentairement équivalente à M . \square

Définition. Une théorie T est κ -catégorique si T a un unique modèle à isomorphisme près de cardinal κ .

Proposition 2.20. *Une théorie T qui n'a que des modèles infinis et qui est κ -catégorique pour un cardinal $\kappa \geq |T|$ est complète.*

Démonstration. Soit M le modèle de T de cardinal κ . Toujours par Löwenheim-Skolem ascendant et descendant, tout modèle de T est élémentairement équivalent à une structure de cardinal κ , donc à M . \square

Exemple 2.21. – La théorie des ensembles infinis est **totale**ment catégorique (c.à.d. κ -catégorique pour tout cardinal infini).

- La théorie des ordres totaux denses sans extrémité est ω -catégorique (voir exo 1.25). Par contre cette théorie n'est pas κ -catégorique pour tout cardinal $\kappa > \omega$. Considérons par exemple un ordre I total dense sans extrémité de cardinal κ tel que pour chaque point de cet ordre, il y a κ points plus grand. Prolongeons cet ordre par l'ensemble des rationnels. Alors les ordres I et $I \cap \mathbb{Q}$ ne sont évidemment pas isomorphes.
- Soit $p \geq 0$. La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique p est catégorique en tout cardinal infini non-dénombrable. En effet si K_1 et K_2 sont deux corps algébriquement clos de caractéristique p et de cardinal $\kappa > \omega$, ils sont tous deux de degré de transcendance κ et donc isomorphes. Par contre cette théorie n'est pas ω -catégorique : la clôture algébrique du corps premier et le corps algébriquement clos de degré de transcendance 1 ne sont pas isomorphes.
- La théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion non triviaux est également catégorique en tout cardinal infini non-dénombrable. En effet tout groupe abélien divisible sans torsion peut être regardé comme un \mathbb{Q} -espace vectoriel et un groupe abélien divisible sans torsion de cardinal $\kappa > \omega$ aura pour dimension κ comme \mathbb{Q} -espace vectoriel. Par contre cette théorie n'est pas ω -catégorique.

Exercice 2.22. Déterminer les cardinaux κ pour lesquels la théorie de la relation d'équivalence à une infinité de classes toutes infinies est κ -catégorique. Même question pour la théorie de la relation d'équivalence à deux classes infinies.

Exercice 2.23. Soit $L = \{P_i : i \in \omega\}$ où les P_i sont des relations unaires. Soit T la théorie dans le langage L qui dit que les P_i sont deux à deux disjoints et que chaque P_i est infini.

1. Vérifier que T n'est catégorique en aucun cardinal κ .
2. Montrer que T est complète.

Pour terminer ce chapitre nous allons énoncer le théorème de Morley qui est le point de départ de la théorie de la stabilité (“seconde naissance de la théorie des modèles”). La démonstration de ce théorème ne sera pas faite dans ce cours, mais on étudiera les notions de rang de Morley et d'ensembles fortement minimaux qui sont utilisés dans celle-ci :

Fait 2.24 (Théorème de Morley 1965). *Une théorie dénombrable qui est catégorique en un cardinal infini non-dénombrable est catégorique en tout cardinal infini non-dénombrable.*

Chapitre 3

Types, saturation, élimination des quantificateurs

3.1 Espaces de types

- Définition 3.1.**
1. Deux n -uplets $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ et $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n)$ dans des L -structures \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 ont même **type** s'ils satisfont les mêmes formules $\phi(x_1, \dots, x_n)$ de L (c.à.d. $\mathcal{M}_1 \models \phi(\bar{a})$ ssi $\mathcal{M}_2 \models \phi(\bar{b})$).
 2. Si \bar{a} est un uplet d'une L -structure \mathcal{M} , l'ensemble des formules $\phi(\bar{x})$ satisfaites par \bar{a} s'appelle le **type** de \bar{a} (dans \mathcal{M}) et est noté $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ ou simplement $\text{tp}(\bar{a})$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. Remarquons que le type d'un n -uplet correspond à une théorie complète dans le langage $L \cup \{x_1, \dots, x_n\}$.
 3. On appelle **n -type** (dans le langage L) une théorie complète dans le langage $L \cup \{x_1, \dots, x_n\}$.
 4. On note S_n l'ensemble des n -types et pour toute théorie T dans le langage L , on note $S_n(T)$ l'ensemble des n -types contenant T , c'est-à-dire l'ensemble des n -types extraits de modèles de T . On note $S(T)$ l'union des $S_n(T)$.

Remarque.

- Si $\bar{a} \in \mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ alors le type de \bar{a} dans \mathcal{M} est le même que le type de \bar{a} dans \mathcal{N} .
- Pour tout T , $S_n(T)$ est un espace topologique compact en tant que fermé de S_n .

Exercice 3.2. Soient \mathcal{M} une L -structure et $p \in S(\text{Th}(\mathcal{M}))$. Alors p est réalisé dans une extension élémentaire de \mathcal{M} et toute partie finie de p est réalisé dans \mathcal{M} . (Les n -types de $\text{Th}(\mathcal{M})$ correspondent donc aux ensembles maximaux de formules $\phi(x_1, \dots, x_n)$ de L dont toute partie finie est réalisée dans \mathcal{M} .)

Définition 3.3. Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux L -structures et \bar{a} et \bar{b} deux uplets respectivement dans \mathcal{M} et \mathcal{N} . On dit que \bar{a} et \bar{b} se correspondent par va-et-vient s'il existe un va-et-vient entre \mathcal{M} et \mathcal{N} contenant un isomorphisme partiel envoyant \bar{a} sur \bar{b} .

Exercice 3.4. Si $\bar{a} \in \mathcal{M}$ et $\bar{b} \in \mathcal{N}$ se correspondent par va-et-vient alors \bar{a} et \bar{b} ont même type.

Remarque 3.5. Deux uples $\bar{a} \in \mathcal{M}$ et $\bar{b} \in \mathcal{N}$ qui ont même type induisent un unique isomorphisme, de la sous-structure engendré par \bar{a} sur la sous-structure engendrée par \bar{b} , qui envoie \bar{a} sur \bar{b} . Cet isomorphisme est donc un isomorphisme partiel de \mathcal{M} dans \mathcal{N} qui de plus est élémentaire. On verra plus loin que si les structures \mathcal{M} et \mathcal{N} satisfont une condition supplémentaire alors deux uples qui ont même type se correspondent par va-et-vient (de \mathcal{M} vers \mathcal{N}).

Exemple 3.6. Considérons la théorie de la relation d'équivalence E à une infinité de classes toutes infinies.

- Il y a un unique 1-type.
- Il y a trois 2-types : le type déterminé par $x = y$, celui déterminé par $(x \neq y) \wedge E(x, y)$ et enfin celui déterminé par $\neg E(x, y)$.

On peut remarquer que tout n -type est réalisé dans tout modèle de la théorie.

Exemple 3.7. Soit $L = \{P_i : i \in \omega\}$ où les P_i sont des relations unaires. Considérons à nouveau la théorie dans le langage L qui dit que les P_i sont deux à deux disjoints et que chaque P_i est infini. Il y a ici une infinité de 1-types : pour chaque i , le type déterminé par $P_i(x)$ et le type déterminé par l'ensemble de formules $\{\neg P_i(x) : i \in \omega\}$. Ce dernier type n'est pas réalisé dans certains modèles de la théorie.

De manière plus générale on considère les types au-dessus d'un ensemble de paramètres. A partir de maintenant pour tout ensemble A , on notera $L(A)$ le langage $L \cup \{a : a \in A\}$.

Définition 3.8. Soit \mathcal{M} une L -structure et $A \subset \mathcal{M}$ un ensemble de paramètres.

1. Soit \bar{a} un uple de \mathcal{M} . Le type de \bar{a} sur A (dans \mathcal{M}) est l'ensemble $\text{tp}(\bar{a}/A) := \{\phi(\bar{x}) \in L(A) : \mathcal{M} \models \phi(\bar{a})\}$.
2. On appelle n -type sur A un élément de $S_n(\text{Th}(\mathcal{M}, A))$. S'il n'y a pas d'ambiguïté on note $S_n(A)$ l'ensemble des n -types sur A et $S(A)$ l'union des $S_n(A)$.
3. Soient \bar{a} et \bar{b} deux uples de \mathcal{M} . On dit que \bar{a} et \bar{b} se correspondent par va-et-vient au-dessus de A s'il existe un va-et-vient de \mathcal{M} vers elle-même contenant un isomorphisme partiel qui fixe point par point A et envoie \bar{a} sur \bar{b} . Remarquons que dans ce cas \bar{a} et \bar{b} ont même type sur A (voir exo 3.4).

Exemple 3.9. Dans la théorie des ordres denses sans extrémité, un 1-type sur A correspond à la coupure qu'il détermine sur A . En particulier les 1-types sur \mathbb{Q} correspondent aux éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Exemple 3.10. Dans la théorie d'un corps algébriquement clos K un 1-type p sur un sous-corps k est déterminé

- soit par le polynôme minimal sur k d'une réalisation de p (types des éléments algébriques sur k),

- soit par l'ensemble $\{P(x) \neq 0 : P \in k[X]\}$ (type des éléments transcendants sur k).

Proposition 3.11. *Soient \bar{a} et \bar{b} deux uples d'une L -structure \mathcal{M} et $A \subset \mathcal{M}$ un ensemble de paramètres. Alors \bar{a} et \bar{b} ont même type sur A si et seulement il existe une extension élémentaire $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ et un automorphisme σ de \mathcal{N} qui fixe point par point A et envoie \bar{a} sur \bar{b} . (Avoir même type signifie donc être dans le même orbite au-dessus de A).*

Démonstration. (\Leftarrow) est évident.

(\Rightarrow) : construisons une chaîne d'extensions élémentaires

$$\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_1 \prec \dots \prec \mathcal{M}_n \prec \dots$$

et une chaîne

$$\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_n \subset \dots$$

d'isomorphismes partiels élémentaires $\sigma_i : \mathcal{M}_i \rightarrow \mathcal{M}_i$ telle que $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$, σ_0 est l'unique isomorphisme de la sous-structure engendré par $A \cup \{\bar{a}\}$ sur la sous-structure engendré par $A \cup \{\bar{b}\}$ qui fixe A point par point et envoie \bar{a} sur \bar{b} et telle que pour tout $i < \omega$, le domaine de σ_{2i+1} contient \mathcal{M}_{2i} et l'image de σ_{2i+2} contient \mathcal{M}_{2i+1} . Pour cela on utilise le lemme suivant :

Lemme 3.12. *Si \mathcal{M} est une L -structure et $\sigma : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ est un isomorphisme partiel élémentaire alors il existe une extension élémentaire $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ et un isomorphisme partiel élémentaire $\tau : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ de domaine \mathcal{M} qui prolonge σ .*

Démonstration. Associons à chaque $m \in \mathcal{M}$ une nouvelle constante m' et montrons que

$$\Sigma := \text{Th}(\mathcal{M}, M) \cup \{\phi(\bar{m}', \sigma(\bar{n})) : \mathcal{M} \models \phi(\bar{m}, \bar{n}) \text{ et } \bar{n} \in \text{dom}(\sigma)\}$$

est consistant. Pour cela considérons en une partie finie

$$\Sigma_0 := \theta(\bar{m}) \cup \{\phi(\bar{m}'_i, \sigma(\bar{n}_i)) : i \in I\}.$$

Alors $\mathcal{M} \models \exists(\bar{x}_i)_{i \in I} \wedge_{i \in I} \phi(\bar{x}_i, \sigma(\bar{n}_i))$ car $\mathcal{M} \models \exists(\bar{x}_i)_{i \in I} \wedge_{i \in I} \phi(\bar{x}_i, \bar{n}_i)$ et σ est élémentaire. On peut donc interpréter les m' dans \mathcal{M} tel que $(\mathcal{M}, M, M') \models \Sigma_0$. Par compacité il existe donc un modèle \mathcal{N} de Σ , qui est de plus une extension élémentaire de \mathcal{M} . Considérons $\tau : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ la fonction qui à $m \in M$ associe $m' \in N$. Alors τ prolonge σ et est un isomorphisme partiel : pour tout $\bar{m} \in \mathcal{M}$,

$$\mathcal{N} \models \phi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathcal{M} \models \phi(\bar{m}) \text{ ssi } \mathcal{N} \models \phi(\tau(\bar{m})).$$

□

Revenons à la construction de nos chaînes : aux étapes paires on prolonge σ_{2i} et aux étapes impaires σ_{2i+1}^{-1} . Les chaînes construites, on vérifie que $\cup_{i \in \omega} \sigma_i$ est un automorphisme de $\cup_{i \in \omega} \mathcal{M}_i$ qui fixe A point par point et envoie \bar{a} sur \bar{b} . □

Proposition 3.13. *Soit \mathcal{M} une L -structure, $A \subset M$ un ensemble de paramètres et D une partie de M^n définissable dans \mathcal{M} . Alors D est définissable à paramètres dans A si et seulement si dans toute extension élémentaire \mathcal{N} de \mathcal{M} , D est invariant par tout automorphisme de \mathcal{N} fixant A point par point.*

Démonstration. (\Rightarrow) immédiat.

(\Leftarrow) Soit $\phi(\bar{x}, \bar{m})$ une formule à paramètres \bar{m} dans M définissant D et soit $p = \text{tp}(\bar{m}/A)$. Vérifions tout d'abord que

$$p(\bar{c}_1) \cup p(\bar{c}_2) \vdash \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}, \bar{c}_1) \leftrightarrow \phi(\bar{x}, \bar{c}_2))$$

dans le langage $L(A) \cup \{\bar{c}_1, \bar{c}_2\}$ où \bar{c}_1 et \bar{c}_2 sont deux uples de nouvelles constantes. Soit \mathcal{N} une $L(A)$ -structure contenant \bar{n}_1 et \bar{n}_2 réalisant p . En particulier $\text{Th}(\mathcal{N}) = \text{Th}(\mathcal{M}, A)$. On peut donc supposer que la restriction \mathcal{N}' de \mathcal{N} au langage L est une extension élémentaire de \mathcal{M} . Alors dans \mathcal{N}' , $\text{tp}(\bar{n}_1/A) = \text{tp}(\bar{n}_2/A) = \text{tp}(\bar{m}/A)$. En utilisant 3.11, on en déduit que dans \mathcal{N}' , $\{\bar{a} \in N : \mathcal{N}' \models \phi(\bar{a}, \bar{n}_1)\} = D = \{\bar{a} \in N : \mathcal{N}' \models \phi(\bar{a}, \bar{n}_2)\}$ car D est invariant par tout automorphisme fixant A point par point.

Par compacité il existe $\theta(\bar{y}) \in p$ ($\theta \in L(A)$) tel que

$$\vdash \theta(\bar{c}_1) \wedge \theta(\bar{c}_2) \rightarrow \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}, \bar{c}_1) \leftrightarrow \phi(\bar{x}, \bar{c}_2)).$$

On en déduit que D est défini par $\exists \bar{y}(\theta(\bar{y}) \wedge \phi(\bar{x}, \bar{y}))$. □

3.2 Saturation

Définition 3.14. Une structure \mathcal{M} est κ -saturée si pour toute partie $A \subset M$ telle que $|A| < \kappa$, \mathcal{M} réalise tout type de $S_1(A)$.

Exercice 3.15. Si \mathcal{M} est κ -saturée et $|A| < \kappa$ alors \mathcal{M} réalise tout type de $S(A)$.

Exercice 3.16. Soient \mathcal{M} une structure ω -saturée, \mathcal{N} une extension élémentaire de \mathcal{M} et $(n_i)_{i \in \omega}$ une famille d'éléments de N alors il existe une famille $(m_i)_{i \in \omega}$ d'éléments de M tel que pour tout $k \in \omega$, (m_0, \dots, m_k) et (n_0, \dots, n_k) ont même type.

Exemple 3.17. 1. Tout ordre total dense sans extrémité est ω -saturé.

2. Un corps algébriquement clos est ω -saturé si et seulement si il est de degré de transcendance infini.

Proposition 3.18. *Toute structure a une extension élémentaire ω -saturée.*

Démonstration. Soit \mathcal{M} une structure. On construit une chaîne

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{M} \prec \mathcal{M}_1 \prec \dots \prec \mathcal{M}_i \prec \dots$$

telle que pour tout i , \mathcal{M}_{i+1} réalise tous les types dans $S_1(\mathcal{M}_i)$. Pour cela considérons une énumération $(p_j)_{j \in J}$ des types dans $S_1(\mathcal{M}_i)$ et l'ensemble d'énoncés

$$\Sigma := \cup_{j \in J} p_j(c_j)$$

où $(c_j)_{j \in J}$ est une famille de nouvelles constantes. Par compacité Σ est consistant car toute partie finie de chaque p_j est réalisée dans $\langle \mathcal{M}_i, M_i \rangle$.

Alors l'union $\mathcal{N} := \cup \mathcal{M}_i$ est une extension élémentaire de \mathcal{M} , ω -saturée. En effet si A est une partie finie de \mathcal{N} , il existe i tel que $A \subset \mathcal{M}_i$. Soit p un type dans $S_1(A)$. Il a une réalisation a dans un extension élémentaire de \mathcal{M}_i . Alors le type de a sur \mathcal{M}_i est réalisé dans \mathcal{M}_{i+1} , donc p est réalisé dans \mathcal{N} . \square

Lemme 3.19. *Soient \mathcal{M}, \mathcal{N} deux structures ω -saturées et $\bar{a} \in \mathcal{M}, \bar{b} \in \mathcal{N}$ deux uples. Alors \bar{a} et \bar{b} ont même type si et seulement si ils se correspondent par un va-et-vient de \mathcal{M} vers \mathcal{N} .*

Démonstration. (\Leftarrow) déjà vu.

(\Rightarrow) Pour tous uples $\bar{c} \in M, \bar{d} \in N$ tels que $\text{tp}(\bar{c}) = \text{tp}(\bar{d})$ il existe un unique isomorphisme partiel $\sigma_{\bar{c}, \bar{d}}$ (qui est élémentaire) de la sous-structure engendrée par \bar{c} vers la sous-structure engendrée par \bar{d} qui envoie \bar{c} sur \bar{d} . Alors l'ensemble de ces isomorphismes partiels forme un va-et-vient. En effet si $\bar{c} \in M, \bar{d} \in N$ tels que $\text{tp}(\bar{c}) = \text{tp}(\bar{d})$ et si $c \in M$ alors $p = \{\phi(x, \bar{d}) : \mathcal{M} \models \phi(c, \bar{c})\}$ est un type sur \bar{d} réalisé par un d dans \mathcal{N} car \mathcal{N} est ω -saturée. Alors $\sigma_{\bar{c}, \bar{d}}$ prolonge $\sigma_{\bar{c}, \bar{d}}$. \square

Exercice 3.20. Une théorie est complète si et seulement si tous ses modèles ω -saturés se correspondent par va-et-vient.

Exercice 3.21. Soit T la théorie de la relation d'équivalence à une infinité de classes.

1. Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux modèles de T élémentairement équivalents. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, \mathcal{M} et \mathcal{N} ont ou bien tous deux le même nombre fini de classes à n éléments, ou bien tous deux une infinité de classes à n éléments.
2. Soit \mathcal{M} un modèle ω -saturé de T . Montrer que si \mathcal{M} a des classes finies arbitrairement grandes alors \mathcal{M} a une infinité de classes infinies.
3. Déterminer l'ensemble des théories complètes contenant T . (Remarquer qu'il y en a 2^ω .)
4. Déterminer celles qui sont ω -catégoriques.
5. Déterminer celles qui sont κ -catégoriques pour un (tout) cardinal $\kappa > \omega$.

Exercice 3.22. On dit qu'une théorie complète T est **menue** si $S(T)$ est dénombrable. Remarquer que si \mathcal{M} est structure dénombrable ω -saturée alors $\text{Th}(\mathcal{M})$ est menue. Montrer que toute théorie complète, dénombrable et menue a un modèle ω -saturé dénombrable. (Pour cela, on remarquera que le nombre de types sur une partie finie est dénombrable et que le nombre de parties finies d'un ensemble dénombrable est dénombrable.)

Exercice 3.23. Un modèle \mathcal{M} qui est ω -saturé et dénombrable est **fortement homogène** : si \bar{a} et \bar{b} sont deux uples de \mathcal{M} qui ont même type alors il existe un automorphisme de \mathcal{M} qui envoie \bar{a} sur \bar{b} .

3.3 Elimination des quanteurs

Très souvent pour montrer qu'une théorie est complète on utilise la méthode de va-et-vient entre deux modèles ω -saturés. Pour cela on fait une hypothèse sur ce que doivent être les types : on considère un ensemble Φ de formules de L et on montre que deux uples qui satisfont les mêmes formules de Φ se correspondent par va-et-vient. On montre alors en fait plus :

Théorème 3.24. *Soit T une théorie et Φ un ensemble non vide de formules $\phi(\bar{x})$ de L où $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ tels que deux n -uples extraits de modèles de T ont même types dès qu'ils satisfont les mêmes formules de Φ . Alors pour toute formule $\psi(\bar{x})$ de L il existe une combinaison booléenne $\phi(\bar{x})$ d'éléments de Φ telle que $T \vdash \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$. (La réciproque est évidente.)*

Démonstration. L'hypothèse signifie que pour tout type $p \in S_n(T)$, on a dans $S_n(T)$

$$\bigcap_{\phi \in \Phi} \langle \epsilon_p \phi \rangle = \{p\}$$

où $\epsilon_p \phi = \phi$ pour $\phi \in p$ et $\epsilon_p \phi = \neg \phi$ pour $\phi \notin p$. (Ici $\langle \epsilon_p \phi \rangle$ désigne l'ouvert de $S_n(T)$.)

Soit $\psi(\bar{x})$ une formule de L . Par compacité, pour tout $p \in \langle \psi \rangle$, il existe une partie finie $\Phi_{\psi,p}$ de Φ telle que $\bigcap_{\phi \in \Phi_{\psi,p}} \langle \epsilon_p \phi \rangle \subset \langle \psi \rangle$. Donc pour tout $p \in \langle \psi \rangle$,

$$\{p\} \subset \langle \phi_{\psi,p} \rangle \subset \langle \psi \rangle$$

où $\phi_{\psi,p} = \bigwedge_{\phi \in \Phi_{\psi,p}} \epsilon_p \phi$. Donc $\langle \psi \rangle = \bigcup_{p \in \langle \psi \rangle} \langle \phi_{\psi,p} \rangle$. Par compacité, on en extrait un sous-recouvrement fini. Il existe donc $p_1, \dots, p_k \in \langle \psi \rangle$ tel que

$$T \vdash \forall \bar{x}(\psi(\bar{x}) \leftrightarrow (\bigvee_{i \in \{1, \dots, k\}} \phi_{\psi, p_i}(\bar{x}))).$$

□

Définition 3.25. Une théorie T **élimine les quanteurs** si les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :

- Pour tout $n > 0$ et toute formule $\psi(\bar{x})$ où $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ il existe une formule $\phi(\bar{x})$ sans quanteur telle que $T \vdash \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.
- Pour tout $n > 0$, les types de $S_n(T)$ sont déterminés par les formules atomiques.

Exemple 3.26. Soit K un corps. On exprime la théorie T des K -espaces vectoriels infinis dans le langage $L_K := \{0, +, -, \lambda_k : k \in K\}$ où pour tout $k \in K$, λ_k est une fonction unaire qui est interprété dans un K -espace vectoriel par la multiplication par k . Alors T est complète et élimine les quanteurs : soient V_1 et V_2 deux espaces vectoriels de dimension infini et considérons \mathcal{F} la famille des isomorphismes partiels ayant pour domaine un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors \mathcal{F} est non vide et on vérifie facilement que \mathcal{F} est un va-et-vient entre V_1 et V_2 . Donc T est complète. De plus T élimine les quanteurs car si $\bar{a} \in V_1$ et $\bar{b} \in V_2$ satisfont les mêmes équations linéaires alors les sous-espaces vectoriels engendrés par \bar{a} et respectivement par \bar{b} sont isomorphes.

Remarque. La théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion non triviaux “correspond” à la théorie des Q -e.v. infinis : on définit dans un groupe divisible sans torsion $\lambda_{p/q}$ par $px = qy$ qui est une formule sans quanteur. On en déduit que cette théorie élimine elle aussi les quanteurs.

Exercice 3.27. La théorie des ordres totaux denses sans extrémité élimine les quanteurs.

Exercice 3.28. Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux modèles d’une théorie T qui élimine les quanteurs. Si $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ alors $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$. Une théorie qui vérifie cette propriété est dite **modèle-complète**.

Proposition 3.29. *La théorie des corps algébriquement clos élimine les quanteurs.*

Démonstration. Soient K_1 et K_2 deux corps algébriquement clos et $\bar{a} \in K_1$ et $\bar{b} \in K_2$ deux uples satisfaisant les mêmes formules atomiques. Dans ce cas K_1 et K_2 ont même caractéristique car pour tout p , $\underbrace{1 + \dots + 1}_p = 0$ est une formule atomique. De plus \bar{a} et \bar{b} satisfont les mêmes équations polynomiales sur le corps premier, donc ils engendrent deux sous-corps k_1 et k_2 isomorphes. On peut supposer que K_1 et K_2 sont de degré de transcendance infini (ou ω -saturé). On a vu (voir exemple 1.9) qu’il existe alors un va-et-vient de K_1 sur K_2 contenant l’isomorphisme de k_1 sur k_2 qui envoie \bar{a} sur \bar{b} . Donc \bar{a} et \bar{b} ont même type. \square

Lemme 3.30. *Soit S un système fini d’équations et d’inéquations (en plusieurs inconnues), à coefficients dans un corps k . Si S a une solution dans une extension K de k , il a une solution dans toute extension algébriquement close de k .*

Démonstration. On peut voir S comme une formule sans quanteur $\phi(x_1, \dots, x_n, b_1, \dots, b_m)$ dans le langage des anneaux où les x_i correspondent aux inconnues et les b_i sont les coefficients dans le corps k . Alors il existe $\bar{a} \in K$ tel que $K \models \phi(\bar{a}, \bar{b})$. Considérons une extension K_1 de K algébriquement close. Comme ϕ est sans quanteur, $K_1 \models \phi(\bar{a}, \bar{b})$. Soit une autre extension K_2 de k algébriquement close. Alors les clôtures algébriques \bar{k}_1 de k dans K_1 et \bar{k}_2 de k dans K_2 sont isomorphes au-dessus de k . Comme la théorie des corps algébriquement clos élimine les quanteurs, $\bar{k}_1 \prec K_1$ et $\bar{k}_2 \prec K_2$ et donc comme $K_1 \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{b})$ on a $\bar{k}_1 \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{b})$, $\bar{k}_2 \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{b})$ et $K_2 \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{b})$. \square

Théorème 3.31 (Théorème des zéros de Hilbert). *Soit K un corps algébriquement clos, I un idéal de $K[X_1, \dots, X_n]$ et $P \in K[X_1, \dots, X_n]$. Supposons que pour tout $\bar{a} \in K^n$, si $Q(\bar{a}) = 0$ pour tout $Q \in I$ alors $P(\bar{a}) = 0$. Alors il existe m tel que $P^m \in I$.*

Démonstration. Supposons que pour tout m , $P^m \notin I$ et soit J l’idéal maximal contenant I mais aucun des P^m . On vérifie facilement que J est premier. Soit L le corps de fractions de $K[X_1, \dots, X_n]/J$. Alors L contient K . Soit Q_1, \dots, Q_r des générateurs de J . Alors la système $S := \{Q_1 = 0, \dots, Q_r = 0, P \neq 0\}$ a une solution dans L et donc d’après le lemme précédent une solution dans K , mais cette solution contredit l’hypothèse. \square

3.4 Clôture algébrique

Définition 3.32. Soient \mathcal{M} une structure et A un ensemble de paramètres dans \mathcal{M} .

1. Une formule $\phi(\bar{x})$ (à paramètres dans M) est **algébrique** dans \mathcal{M} si elle n'est satisfaite que par un nombre fini d'uples dans \mathcal{M} .
2. Un uple \bar{a} de \mathcal{M} est **algébrique** sur A s'il satisfait une formule algébrique à paramètres dans A .
3. Un type sur A est **algébrique** s'il contient une formule algébrique.

Remarque. Soient $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ et $A \subset M$.

- Si \bar{a} est un uple de \mathcal{N} algébrique sur A alors $\bar{a} \in \mathcal{M}$: en effet il existe une formule $\phi(\bar{x})$ de $L(A)$ algébrique telle que $\mathcal{N} \models \phi(\bar{a})$. Alors il existe n tel que $\mathcal{N} \models \exists^{=n} \bar{x} \phi(\bar{x})$. D'où $\mathcal{M} \models \exists^{=n} \bar{x} \phi(\bar{x})$ et alors les n uples de \mathcal{M} satisfaisant ϕ dans \mathcal{M} satisfont ϕ dans \mathcal{N} . Par conséquent \bar{a} est l'un de ces uples.
- Soit $\bar{a} = (a_1, \dots, a_k)$ un uple de \mathcal{M} . Alors \bar{a} est algébrique sur A si et seulement si chaque a_i est algébrique sur A :
 - (\Leftarrow) la conjonction des formules algébriques correspondant à chaque a_i avec des variables distinctes est algébrique.
 - (\Rightarrow) si $\phi(x_1, \dots, x_k)$ est algébrique alors $\psi(x_1) := \exists x_2 \dots x_k \phi(x_1, \dots, x_k)$ est aussi algébrique.
- On appelle clôture algébrique de A l'ensemble $\text{acl}(A)$ des points (de M) algébriques sur A .

Exercice 3.33. Soit p un type sur $A \subset \mathcal{M}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. p est algébrique.
2. dans chaque $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$, p n'a qu'un nombre fini de réalisations.
3. chaque réalisation de p est algébrique sur A .

Exemple 3.34. Par élimination des quanteurs dans les exemples suivants, on détermine facilement la clôture algébrique.

1. Dans un ordre total dense sans extrémité $\text{acl}(A) = A$ pour tout A .
2. Dans un espace vectoriel la clôture algébrique de A est égale au sous-espace vectoriel engendré par A .
3. Dans un corps algébriquement clos la clôture algébrique correspond à la notion classique dans le sens d'un corps.

Exercice 3.35. Soient \mathcal{M} , $A \subset M$ et $B \subset M$.

1. $\text{acl}(\text{acl}(A)) = \text{acl}(A) \supset A$
2. Si $A \subset B$ alors $\text{acl}(A) \subset \text{acl}(B)$.
3. Si $a \in \text{acl}(A)$ alors il existe une partie finie $A_0 \subset A$ telle que $a \in \text{acl}(A_0)$.

Exercice 3.36. Un n -type p sur A algébrique est **isolé** : il existe une formule $\phi \in L(A)$ telle que $\langle \phi \rangle = \{p\}$ ($\langle \phi \rangle$ étant considéré comme ouvert de $S_n(A)$).

Chapitre 4

Théories totalement transcendantes

4.1 Stabilité et propriété de l'ordre

Remarquons qu'une théorie T a au plus $2^{\max\{|A|, |T|\}}$ types au-dessus d'un ensemble de paramètres A (dans un modèle de T). Certaines théories n'ont pas plus de types au-dessus de A que $\max\{|A|, |T|\}$:

Définition 4.1. Une théorie T est dite κ -**stable** pour un cardinal κ infini si pour tout modèle \mathcal{M} de T et tout ensemble de paramètres $A \subset M$, $|A| \leq \kappa$ implique $|S_1(A)| \leq \kappa$. Une théorie T est dite **stable** si elle est κ -stable pour un κ , **instable** sinon. Une structure est dite κ -**stable (stable)** si sa théorie l'est.

Exercice 4.2. Une théorie T est κ -stable si et seulement si pour tout ensemble de paramètres A , $|A| \leq \kappa$ implique $|S(A)| \leq \kappa$.

Remarque. Dans la définition ci-dessus on ne suppose pas que la théorie soit complète et par exemple la théorie T de la relation d'équivalence à une infinité de classes est ω -stable car tous ses modèles le sont mais elle a 2^ω modèles non élémentairement équivalents et donc $|S(T)| = 2^\omega$ (voir exo 3.21). Concrètement, la notion de stabilité est utilisée pour des théories complètes. Et dans ce cas, si T est une théorie dénombrable complète et ω -stable, alors $|S(T)| \leq \omega$, c'est-à-dire T est menue.

Exemple 4.3.

- La théorie des corps algébriquement clos est κ -stable pour tout cardinal infini.
- La théorie des K -espaces vectoriels est κ -stable pour tout cardinal infini $\kappa \geq |K|$.

Exercice 4.4. Soit $\mathcal{M} = \langle M, E_i : i \in \omega \rangle$ tel que chaque E_i est une relation d'équivalence sur M , E_0 est la relation d'équivalence triviale réduite à une seule classe et pour chaque $i \in \omega$, $E_{i+1} \subset E_i$ et toute classe définie par E_i est exactement l'union de deux classes définies par E_{i+1} . Montrer que \mathcal{M} est stable mais n'est pas ω -stable.

Énonçons des résultats de théorie des modèles pour illustrer la stabilité :

- Fait 4.5.** – *Un groupe abélien est stable. Il est ω -stable si et seulement si il est somme directe d'un groupe divisible avec un groupe d'exposant borné.*
- *Une théorie dénombrable κ -catégorique en un cardinal infini non dénombrable est ω -stable. (Ce résultat correspond à une étape de la preuve du théorème de Morley.)*
 - *Un corps infini ω -stable est algébriquement clos.*

Par contre les ordres totaux infinis sont instables :

Définition 4.6. Soit T une théorie. Une formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ a la **propriété de l'ordre** dans T s'il existe deux suites $(\bar{a}_i)_{i \in \omega}$ et $(\bar{b}_i)_{i \in \omega}$ dans un modèle \mathcal{M} de T telles que

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}_i, \bar{b}_j) \text{ si et seulement si } i < j.$$

La théorie T a la **propriété de l'ordre** s'il existe une formule qui a la propriété de l'ordre dans T .

Exercice 4.7. Une théorie T a la propriété de l'ordre si et seulement s'il existe une formule $\psi(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ où \bar{z}_1 et \bar{z}_2 sont des uples de même longueur n et un modèle \mathcal{M} telle que ψ ordonne totalement un ensemble infini de M^n .

Proposition 4.8. *Une théorie qui a la propriété de l'ordre est instable.*

Démonstration. Soit T une théorie qui a la propriété de l'ordre. Vérifions que T n'est pas ω -stable. Soit $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ une formule qui a la propriété de l'ordre. Soient $(\bar{c}_i)_{i \in \mathbb{R}}$ et $(\bar{d}_j)_{j \in \mathbb{Q}}$ des nouvelles constantes. Alors par compacité,

$$T \cup \{\phi(\bar{c}_i, \bar{d}_j) : i < j\} \cup \{\neg\phi(\bar{c}_i, \bar{d}_j) : i \geq j\}$$

est consistant. Il existe donc un modèle \mathcal{M} de T contenant deux familles $(\bar{a}_i)_{i \in \mathbb{R}}$ et $(\bar{b}_j)_{j \in \mathbb{Q}}$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}_i, \bar{b}_j)$ si et seulement si $i < j$. Posons $B := \{\bar{b}_j : j \in \mathbb{Q}\}$ alors pour tout $i \neq i'$, $\text{tp}(\bar{a}_i/B) \neq \text{tp}(\bar{a}_{i'}/B)$ donc $|S(B)| \geq 2^\omega$.

Pour vérifier que T n'est pas κ -stable pour un cardinal infini κ quelconque, on considère un ordre total I contenant une partie dense J tel que $|J| \leq \kappa < |I|$ (il faut montrer l'existence d'un tel ordre) et on remplace \mathbb{R} et \mathbb{Q} respectivement par I et J . \square

Remarque 4.9. La réciproque est vraie : la propriété de l'ordre caractérise les théories instables.

4.2 Rang de Morley

Différentes notions de rangs ou dimensions sont définies en stabilité. Pour les théories ω -stables on peut définir le rang de Morley qui généralise la dimension de Zariski sur les ensembles constructibles dans un corps algébriquement clos.

Définition 4.10. Soit \mathcal{M} une L -structure et D une partie de M^n définissable dans \mathcal{M} . On définit $\text{RM}(D) \geq \alpha$ pour un ordinal α par l'induction suivante :

- $\text{RM}(D) \geq 0$ si $D \neq \emptyset$,
- $\text{RM}(D) \geq \alpha + 1$ pour un ordinal α s'il existe une extension élémentaire $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ et une famille infinie $(D_i)_{i \in \omega}$ de parties disjointes de \mathcal{N}^n définissables dans \mathcal{N} telle que pour tout $i \in \omega$, $D_i \subset D$ (dans \mathcal{N}) et $\text{RM}(D_i) \geq \alpha$.
- $\text{RM}(D) \geq \alpha$ pour α un ordinal limite si $\text{RM}(D) \geq \beta$ pour tout ordinal $\beta < \alpha$.

On dit que $D \neq \emptyset$ est rangé (par le rang de Morley) si pour un ordinal α , $\text{RM}(D) \geq \alpha$ est vrai mais $\text{RM}(D) \geq \alpha + 1$ est faux. Dans ce cas on pose $\text{RM}(D) = \alpha$ et dans le cas contraire $\text{RM}(D) = \infty$. Par convention on pose $\text{RM}(\emptyset) = -1$.

Remarque.

- Le rang de Morley est stable par isomorphisme.
- Le rang de Morley est stable par extension élémentaire : que l'on regarde D dans \mathcal{M} ou dans n'importe quelle extension élémentaire de \mathcal{M} le rang de Morley reste inchangé. (On utilise ici le théorème de l'extension élémentaire commune.)

Exercice 4.11. Soient D_1 et D_2 deux parties non vides de M^n définissables dans \mathcal{M} .

- Si $D_1 \subset D_2$ alors $\text{RM}(D_1) \leq \text{RM}(D_2)$.
- $\text{RM}(D_1 \cup D_2) = \max\{\text{RM}(D_1), \text{RM}(D_2)\}$
- $\text{RM}(D_1) = 0$ si et seulement si D_1 est finie et non vide.

Exemple 4.12. Soit $\mathcal{M} = \langle M, E \rangle$ où E est une relation d'équivalence sur M composée uniquement de classes finies et pour chaque entier $n > 0$ d'une et une seule classe à n éléments. Chacune de ses classes finies sont de rang 0, mais M est de rang 2. En effet il existe une extension élémentaire où il y a une infinité de classes infinies (une telle extension est une extension ω -saturée), donc $\text{RM}(M) \geq 2$. Il reste à montrer que $\text{RM}(M) \leq 2$ (exercice).

Exercice 4.13. 1. Pour chaque entier $n > 0$, donner un exemple de structure \mathcal{M} de rang de Morley n ($\text{RM}(M) = n$).

2. Donner un exemple de structure de rang de Morley ω .

Définition 4.14. Soient \mathcal{M} une L -structure et $\phi(\bar{x}, \bar{m})$ une formule à paramètres $\bar{m} \in M$. On définit alors la rang de Morley de $\phi(\bar{x}, \bar{m})$ dans \mathcal{M} , noté $\text{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{m}))$, comme le rang de Morley de l'ensemble défini par $\phi(\bar{x}, \bar{m})$ dans \mathcal{M} .

Exercice 4.15. Traduire la définition du rang de Morley en termes de formules.

Proposition 4.16. Soient \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 deux L -structures, \bar{m}_1 et \bar{m}_2 deux k -uplets respectivement dans M_1 et M_2 ayant même type, et $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ une formule de L où $\bar{y} = (y_1, \dots, y_k)$. Alors $\text{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{m}_1)) = \text{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{m}_2))$.

Démonstration. Par le théorème de l'extension élémentaire commune et du fait que le rang est stable par isomorphisme et extension élémentaire, on peut supposer que $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}$. Alors il existe un automorphisme d'une extension élémentaire de \mathcal{M} qui envoie \bar{m}_1 sur \bar{m}_2 . On en déduit que $\text{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{m}_1)) = \text{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{m}_2))$. \square

Corollaire 4.17. *Supposons le langage L fixé. Il existe un ordinal α tel que pour tout ensemble définissable D dans une L -structure, si $\text{RM}(D) \geq \alpha$ alors $\text{RM}(D) = \infty$.*

Démonstration. Il n'y a pas plus de rangs de Morley possibles que de types d'uples sur le vide (au plus $2^{\max\{\omega, |L|\}}$). Les rangs possibles forment donc un ensemble. \square

Proposition 4.18. *Si T est une théorie ω -stable alors tout ensemble définissable dans un modèle de T est rangé par le rang de Morley.*

Démonstration. Supposons que D est un ensemble définissable de rang infini. Alors par ce qui précède il existe (dans une extension élémentaire) une partition de D en deux ensembles définissables D_0 et D_1 de rangs infinis. Par induction, on montre qu'il existe une famille d'ensembles définissables de rangs tous infinis (D_s) indexée par les suites finies de $\{0, 1\}$ telle que pour tout s , $D_s = D_{s \smallfrown 0} \dot{\cup} D_{s \smallfrown 1}$. Soit A un ensemble de paramètres dénombrables telle chaque D_s peut être définie par une formule à paramètres dans A . Alors il y a au moins 2^ω types sur A . \square

Exercice 4.19. Soit M une L -structure ω -saturée et D une partie de M^n définissable dans \mathcal{M} . Montrer que si $\text{RM}(D) \geq \alpha + 1$ pour un ordinal α alors il existe une famille infinie $(D_i)_{i \in \omega}$ de **parties de D définissables dans \mathcal{M} et deux à deux disjointes** telle que pour tout $i \in \omega$, $\text{RM}(D_i) \geq \alpha$. (Indication : utiliser exo 3.16).

Proposition 4.20. *Soit D une partie M^n définissables dans \mathcal{M} tel que $\text{RM}(D) = \alpha$ alors il existe $d < \omega$ tel que dans toute extension élémentaire de \mathcal{M} il y a au plus d parties de D deux à deux disjointes et de rang égal à α .*

Démonstration. Supposons qu'il n'existe pas de tel d . Plaçons nous dans une extension élémentaire \mathcal{N} ω -saturée. Alors pour tout $d > 0$ il existe dans \mathcal{N} une partition D_1^d, \dots, D_d^d de D où les D_i^d sont des ensembles définissables dans \mathcal{N} de rang α . Pour tout $j \in \{1, \dots, d+1\}$, il existe $i \in \{1, \dots, d\}$ tel que $\text{RM}(D_i^d \cap D_j^{d+1}) = \alpha$ car $\text{RM}(D_j^{d+1}) = \max\{\text{RM}(D_1^d \cap D_j^{d+1}), \dots, \text{RM}(D_d^d \cap D_j^{d+1})\}$. Par récurrence sur d , on peut donc supposer que pour tout $j \in \{1, \dots, d+1\}$, D_j^{d+1} est inclus dans un D_i^d . Cette suite de partitions se voit alors comme un arbre infini à branchement fini (les points étant l'ensemble des D_i^d et les arêtes les (D_i^d, D_j^{d+1}) pour D_i^d contenant strictement D_j^{d+1}). Par le lemme de König (tout arbre infini à branchements finis a une branche infinie), on en déduit qu'il existe une suite décroissante infinie $(D_i)_{i \in \omega}$ de parties de D telle que $\text{RM}(D_i \setminus D_{i+1}) = \alpha$ pour chaque $i \in \omega$. Alors $\text{RM}(D) \geq \alpha + 1$. \square

Définition 4.21. Soit D un ensemble définissable dans une structure \mathcal{M} . Le degré de Morley, dénoté $\text{dM}(D)$, est l'élément $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ maximal tel que l'on peut diviser D en d parties de même rang dans une extension élémentaire de \mathcal{M} . Si $\phi(\bar{x}, \bar{m})$ est une formule de $L(M)$ alors on définit le degré de Morley de ϕ dans \mathcal{M} noté $\text{dM}(\phi(\bar{x}, \bar{m}_1))$ comme la degré de Morley de l'ensemble défini par $\phi(\bar{x}, \bar{m})$ dans \mathcal{M} .

Définition 4.22. Soit A un ensemble de paramètres dans une structure \mathcal{M} .

1. Si $p \in S(A)$, on pose $\text{RM}(p) = \min\{\text{RM}(\phi) : \phi \in p\}$ et $\text{dM}(p) = \min\{\text{dM}(\phi) : \phi \in p \text{ et } \text{RM}(\phi) = p\}$.
2. Pour \bar{a} un uple de \mathcal{M} , on pose $\text{RM}(\bar{a}/A) = \text{RM}(\text{tp}(\bar{a}/A))$ et $\text{dM}(\bar{a}, A) = \text{dM}(\text{tp}(\bar{a}/A))$.

Remarque. Soient $A \subset B \subset \mathcal{M}$ et $p \in S(A)$. Si q est une extension de p dans $S(B)$ ($q \in S(B)$ et $q \supset p$) alors $\text{RM}(q) \leq \text{RM}(p)$.

Exercice 4.23. Soit A un ensemble de paramètres dans une structure \mathcal{M} et $\phi(\bar{x}) \in L(A)$ tel que $\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x})$. Alors

$$\text{RM}(\phi) = \max\{\text{RM}(p) : p \in S(A), \phi \in p\},$$

$$\text{dM}(\phi) = \sum \{\text{dM}(p) : p \in S(A), \phi \in p, \text{RM}(p) = \text{RM}(\phi)\}.$$

Lemme 4.24. Soient $p \in S_n(A)$ tel que $\text{RM}(p) < \infty$ et $\phi_p \in p$ de même rang et degré que p . Alors p est isolé des types de rang supérieur ou égal à $\text{RM}(p)$ dans $S_n(A)$ par ϕ_p .

Démonstration. Soit $q \in S_n(A)$ tel que $\text{RM}(q) \geq \text{RM}(p)$. Supposons que $q \neq p$. Il existe θ une formule dans p qui n'est pas dans q . Alors $\text{RM}(p) \leq \text{RM}(\phi_p \wedge \theta) \leq \text{RM}(\phi_p) = \text{RM}(p)$ et donc $\text{dM}(p) \leq \text{dM}(\phi_p \wedge \theta) \leq \text{dM}(\phi_p) = \text{dM}(p)$. On en déduit que $\text{RM}(\phi_p \wedge \neg\theta) < \text{RM}(\phi_p) \leq \text{RM}(q)$. Donc $q \notin \langle \phi_p \rangle$. \square

Exercice 4.25. Soient \mathcal{M} une structure, $A \subset M$ et $p \in S_n(A)$. Alors $\text{RM}(p) \geq \alpha + 1$ si et seulement si p a une extension $q \in S_n(B)$ ($A \subset B \subset \mathcal{N} \succ \mathcal{M}$) qui est point d'accumulation de types dans $S_n(B)$ de rang supérieur ou égal à α .

Lemme 4.26. Soient \mathcal{M} une structure, $A \subset M$, \bar{a} et \bar{b} deux uples de \mathcal{M} .

1. $\text{RM}(\bar{a}/A) \leq \text{RM}(\bar{a}\bar{b}/A)$.
2. Si $\bar{b} \in \text{acl}(A \cup \{\bar{a}\})$ alors $\text{RM}(\bar{a}/A) = \text{RM}(\bar{a}\bar{b}/A)$.

Démonstration. 1. Exercice.

2. Montrons par induction sur α que pour tout \bar{a}, \bar{b}, A , si $\bar{b} \in \text{acl}(A \cup \{\bar{a}\})$ alors $\text{RM}(\bar{a}\bar{b}/A) \geq \alpha$ implique $\text{RM}(\bar{a}/A) \geq \alpha$. C'est évident pour $\alpha = 0$. Supposons le résultat vrai pour α et considérons $\bar{b} \in \text{acl}(A \cup \{\bar{a}\})$ tel que $\text{RM}(\bar{a}\bar{b}/A) \geq \alpha + 1$. Il existe une extension $q \in S(B)$ du type de $\bar{a}\bar{b}$ sur A qui est point d'accumulation de types de rang supérieur ou égal à α . Soit $\bar{a}'\bar{b}'$ une réalisation de q . Alors $\bar{b}' \in \text{acl}(A \cup \{\bar{a}'\}) \subset \text{acl}(B \cup \{\bar{a}'\})$.

Nous allons montrer que le type de \bar{a}' sur B est également point d'accumulation de types de rang supérieur ou égal à α .

Considérons pour cela une formule $\phi(\bar{x}, \bar{y}) \in L(B)$ telle que $\phi(\bar{a}', \bar{y})$ isole le type de \bar{b}' sur $B \cup \{\bar{a}'\}$. La formule $\phi(\bar{a}', \bar{y})$ est algébrique. Il y a donc au plus n uples \bar{y} satisfaisant $\phi(\bar{a}', \bar{y})$ pour un entier n . Soit

$$\theta(\bar{x}, \bar{y}) = \phi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \exists^{\leq n} \bar{z} \phi(\bar{x}, \bar{z}).$$

Soit $\psi(\bar{x}) \in \text{tp}(\bar{a}'/B)$. Alors il existe $\bar{a}_1\bar{b}_1$ tel que $\models \psi(\bar{a}_1) \wedge \theta(\bar{a}_1, \bar{b}_1)$, $\text{tp}(\bar{a}_1\bar{b}_1/B) \neq \text{tp}(\bar{a}'\bar{b}'/B)$ et $\text{RM}(\bar{a}_1\bar{b}_1/B) \geq \alpha$. Par hypothèse d'induction $\text{RM}(\bar{a}_1/B) \geq \alpha$ car $\bar{b}_1 \in \text{acl}(B\bar{a}_1)$. De plus $\text{tp}(\bar{a}_1/B) \neq \text{tp}(\bar{a}'/B)$ car $\text{tp}(\bar{a}_1\bar{b}_1/B) \neq \text{tp}(\bar{a}'\bar{b}'/B)$ et $\phi(\bar{a}', \bar{y})$ isole le type de \bar{b}' sur $B \cup \{\bar{a}'\}$. \square

Définition 4.27. Une théorie est dite **totale-ment transcendant**e si tous ses 1-types sont rangés par le rang de Morley. Une structure est dite **totale-ment transcendant**e si sa théorie l'est.

Théorème 4.28. *Soit T une théorie.*

1. *Si T est totale-ment transcendant*e alors T est κ -stable pour tout cardinal $\kappa \geq |T|$.
2. *Si T est dénombrable* alors T est totale-ment transcendante si et seulement si T est ω -stable. En particulier une théorie ω -stable dénombrable est κ -stable pour tout cardinal κ infini.
3. *Si T est totale-ment transcendant* alors tout ensemble définissable est rangé par le rang de Morley.

Démonstration. Le 2 se déduit du 1 en utilisant 4.18.

Montrons 1. Supposons T totale-ment transcendante. Soit A un ensemble de paramètres dans $\mathcal{M} \models T$. Alors pour tout type p dans $S_1(A)$ il existe une formule $\phi_p \in p$ de même rang et même degré. Par 4.24 si $p \neq q$, $\phi_p \neq \phi_q$, donc $|S_1(A)| \leq \max\{|A|, |T|\}$.

Montrons 3. Si T est dénombrable alors T est ω -stable (1) et on conclut par 4.18. Sans cette hypothèse, on considère un ensemble définissable D non rangé dans un modèle ω -saturé \mathcal{M} de T ($D \subset M^n$). Comme dans la preuve de 4.18, on obtient alors un arbre d'ensembles définissables qu'on peut de plus supposer définis par des formules à paramètres dans \mathcal{M} . Cet arbre étant dénombrable, il existe une partie dénombrable L_0 de L permettant de le définir. Soit \mathcal{M}_0 la restriction de la structure \mathcal{M} au langage L_0 . Alors \mathcal{M}_0 n'est pas ω -stable et la théorie de \mathcal{M}_0 , qui est dénombrable, n'est pas totale-ment transcendante. Donc $\text{RM}(M) = \infty$ dans \mathcal{M}_0 . Il existe donc un arbre de parties de M définissables dans \mathcal{M}_0 car \mathcal{M}_0 est ω -saturée. (Exercice : vérifier que \mathcal{M} ω -saturée implique que \mathcal{M}_0 l'est également.) Cet arbre est donc définissable dans \mathcal{M} et $\text{RM}(M) = \infty$ dans \mathcal{M} . \square

4.3 Déviation, indépendance

Définition 4.29. Soient $A \subset B$ deux ensembles de paramètres dans une structure totale-ment transcendante. Soient $p \in S_n(A)$ et $q \in S_n(B)$ une extension de p . Si $\text{RM}(q) < \text{RM}(p)$ on dit que q est une **extension déviant**e de p et que q **dévie sur** A . Si $\text{RM}(p) = \text{RM}(q)$ on dit que q est une **extension non déviant**e de p et que q **ne dévie pas sur** A .

Exercice 4.30. Soient \mathcal{M} une structure totale-ment transcendante et $A \subset B \subset \mathcal{M}$ et $p \in S_n(A)$.

- Il existe une extension non déviante de p dans $S_n(B)$.
- Il y a au plus $\text{dM}(p)$ extensions non déviantes de p dans $S_n(B)$.
- Si \mathcal{M} est ω -saturée il y a exactement $\text{dM}(p)$ extensions non déviantes de p dans $S_n(M)$ qui sont chacune de degré 1.

Définition 4.31. Soit \mathcal{M} une structure et $A \subset M$.

- Soit $p \in S(A)$ un type de degré de Morley 1. Une **suite de Morley** dans p est une suite $(\bar{a}_i)_{i < \alpha}$ dans une extension élémentaire de \mathcal{M} (α étant un ordinal) telle que pour tout $i < \alpha$, \bar{a}_i réalise l'unique extension non déviante de p à $A \cup \{\bar{a}_j : j < i\}$.
- Un ensemble $E \subset M^k$ est **indiscernable au-dessus** de A si pour chaque $n < \omega$ et tout $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ distincts dans E , $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ distincts dans E ,

$$\text{tp}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n/A) = \text{tp}(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n/A).$$

Remarque. Soit p un type de degré de Morley 1. Alors pour tout ordinal α , il existe une suite de Morley dans p indexée par α .

Lemme 4.32. Soient \mathcal{M} une structure stable et $A \subset M$. Si $(\bar{a}_i)_{i < \alpha}$ est une suite de Morley d'un type $p \in S(A)$ (de degré 1) alors $\{\bar{a}_i : i \in \alpha\}$ est indiscernable au-dessus de A .

Démonstration. On peut supposer la suite de Morley infinie (sinon il suffit de la compléter).

Par récurrence sur n , on vérifie que pour tout $i_0 < i_1 < \dots < i_n < \alpha$, $\text{tp}(\bar{a}_{i_0}, \dots, \bar{a}_{i_n}/A) = \text{tp}(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n/A)$. (C'est une **suite indiscernable** sur A). Il reste à montrer que pour tout $0 < n < \omega$ et tout $i < n$,

$$\text{tp}(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{i-1}, \bar{a}_{i+1}, \bar{a}_i, \bar{a}_{i+2}, \dots, \bar{a}_n/A) = \text{tp}(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{i-1}, \bar{a}_i, \bar{a}_{i+1}, \bar{a}_{i+2}, \dots, \bar{a}_n/A).$$

Sinon il existerait une formule $\phi \in L(A)$ telle que

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{i-1}, \bar{a}_i, \bar{a}_{i+1}, \bar{a}_{i+2}, \dots, \bar{a}_n), \text{ mais}$$

$$\mathcal{M} \models \neg\phi(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{i-1}, \bar{a}_{i+1}, \bar{a}_i, \bar{a}_{i+2}, \dots, \bar{a}_n).$$

Soient $(\bar{b}_j : j \in \omega)$ et $\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_{i-1}, \bar{c}_{i+2}, \dots, \bar{c}_n$ des nouvelles constantes. Par compacité,

$$\text{Th}(M) \cup \{\phi(\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_{i-1}, \bar{b}_j, \bar{b}_k, \bar{c}_{i+2}, \dots, \bar{c}_n) : j < k\} \cup \{\neg\phi(\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_{i-1}, \bar{b}_j, \bar{b}_k, \bar{c}_{i+2}, \dots, \bar{c}_n) : j > k\}$$

serait consistant. La théorie $\text{Th}(M)$ aurait alors la propriété de l'ordre. \square

Lemme 4.33. Soient T une théorie stable et $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ une formule. Alors il existe $n_\phi \in \omega$ tel que pour tout $\mathcal{M} \models T$, tout ensemble indiscernable $E \subset M^k$ au-dessus du vide et tout $\bar{b} \in M$, soit $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}, \bar{b})$ pour tout $\bar{a} \in E$ sauf au plus n_ϕ , soit $\mathcal{M} \models \neg\phi(\bar{a}, \bar{b})$ pour tout $\bar{a} \in E$ sauf au plus n_ϕ .

Démonstration. Supposons qu'il n'existe pas de tel entier n . Soient $(\bar{c}_i)_{i \in \omega}$ et $(\bar{d}_j)_{j \in \omega}$ des nouvelles constantes. On va montrer par compacité que

$$T \cup \{\phi(\bar{c}_i, \bar{d}_j) : i \leq j\} \cup \{\neg\phi(\bar{c}_i, \bar{d}_j) : i > j\}$$

est consistant. (C'est-à-dire que ϕ a la propriété de l'ordre dans T .) Soient $n < \omega$, $\mathcal{M} \models T$, $E \subset M^k$ un ensemble indiscernable et $\bar{b} \in \mathcal{M}$ tel que $|\{\bar{a} \in E : \mathcal{M} \models \phi(\bar{a}, \bar{b})\}| \geq n$ et $|\{\bar{a} \in E : \mathcal{M} \models \neg\phi(\bar{a}, \bar{b})\}| \geq n$. Notons $\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{2n-1}$ $2n$ éléments distincts de E tel que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}_i, \bar{b})$ si et seulement si $i \leq n-1$. Alors par indiscernabilité de E , il existe $\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_{n-1}$ dans une extension élémentaire \mathcal{N} de \mathcal{M} tel que pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\mathcal{N} \models \phi(\bar{a}_i, \bar{b}_j)$ si et seulement si $i \leq j$. \square

Définition 4.34. Soient \mathcal{M} une structure totalement transcendante, $\bar{a} \in \mathcal{M}$, $A \subset M$ et $B \subset M$. On dit que \bar{a} est indépendant de B au-dessus de A (dénoté $\bar{a} \perp_A B$) si $\text{tp}(\bar{a}/B \cup A)$ ne dévie pas sur A .

Théorème 4.35. Soient \mathcal{M} une structure totalement transcendante, $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{M}$ et A, B, C des ensembles de paramètres dans M . L'indépendance vérifie les propriétés suivantes :

1. **Monotonie :** si $\bar{a} \perp_A B$ et $C \subset B$ alors $\bar{a} \perp_A C$.
2. **Transitivité :** $\bar{a} \perp_A B \cup C$ si et seulement si $\bar{a} \perp_A B$ et $\bar{a} \perp_{A \cup B} C$.
3. **Symétrie :** Si $\bar{a} \perp_A \bar{b}$ alors $\bar{b} \perp_A \bar{a}$.
4. **Caractère fini :** $\bar{a} \perp_A B$ si et seulement si $\bar{a} \perp_A \bar{b}_0$ pour tout $\bar{b}_0 \subset B$.
5. **Caractère local :** Il existe $B_0 \subset B$ fini tel que $\bar{a} \perp_{B_0} B$.

Démonstration. 1 : $\text{RM}(\bar{a}/A) = \text{RM}(\bar{a}/B \cup A) \leq \text{RM}(\bar{a}/C \cup A) \leq \text{RM}(\bar{a}/A)$.

2 : $\text{RM}(\bar{a}/B \cup C \cup A) \leq \text{RM}(\bar{a}/B \cup A) \leq \text{RM}(\bar{a}/A)$. Donc $\text{RM}(\bar{a}/B \cup C \cup A) = \text{RM}(\bar{a}/A)$ si et seulement si $\text{RM}(\bar{a}/B \cup A) = \text{RM}(\bar{a}/A)$ et $\text{RM}(\bar{a}/B \cup C \cup A) = \text{RM}(\bar{a}/B \cup A)$.

3 : supposons $\bar{a} \perp_A \bar{b}$. On peut supposer \mathcal{M} ω -saturée. Soient $p_0, \dots, p_{d-1} \in S(M)$ les d extensions non déviantes du $\text{tp}(\bar{a}/A)$ ($d = \text{dM}(\text{tp}(\bar{a}/A))$). Pour chaque $j < d$, soit $(\bar{a}_i^j)_{i \in \omega}$ une suite de Morley dans p_j .

Soit \bar{b}' une réalisation de $\text{tp}(\bar{b}/A)$ tel que $\bar{b}' \perp_A M \cup \{\bar{a}_i^j : i < \omega, j < d\}$. Soit \bar{a}' tel que $\text{tp}(\bar{a}'\bar{b}'/A) = \text{tp}(\bar{a}\bar{b}/A)$. On peut de plus supposer que $\bar{a}' \perp_{A \cup \{\bar{b}'\}} M \cup \{\bar{a}_i^j : i < \omega, j < d\}$.

Comme $\bar{a}' \perp_A \bar{b}'$ on a $\bar{a}' \perp_A M \cup \{\bar{b}', \bar{a}_i^j : i < \omega, j < d\}$. En particulier $\bar{a}' \perp_A M$, donc \bar{a}' réalise p_k pour un $k < d$.

Soit $(\bar{a}'_i)_{i < \omega}$ une suite de Morley dans $\text{tp}(\bar{a}'/M \cup \{\bar{b}', \bar{a}_i^k : i < \omega\})$ tel que $\bar{a}'_0 = \bar{a}'$. Alors $(\bar{a}_i^k)_{i \in \omega} \frown (\bar{a}'_i)_{i \in \omega}$ est une suite de Morley dans p_k .

Notons \mathcal{N} une extension élémentaire de \mathcal{M} contenant $(\bar{a}_i^k)_{i \in \omega}$, \bar{b}' et $(\bar{a}'_i)_{i \in \omega}$. Soit $\phi(\bar{x}, \bar{y}) \in L(A)$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}, \bar{b})$. Alors $\mathcal{N} \models \phi(\bar{a}', \bar{b}')$ et pour tout $i < \omega$ $\mathcal{N} \models$

$\phi(\bar{a}'_i, \bar{b}')$. Par 4.33 $\mathcal{N} \models \phi(\bar{a}^k_i, \bar{b}')$ pour tout $i < \omega$ excepté un nombre fini. Il existe donc $i_0 < \omega$ tel que $\mathcal{N} \models \phi(\bar{a}^k_{i_0}, \bar{b}')$. Alors

$$\text{RM}(\phi(\bar{a}, \bar{y})) = \text{RM}(\phi(\bar{a}^k_{i_0}, \bar{y})) \geq \text{RM}(\bar{b}'/A\bar{a}^k_{i_0}) = \text{RM}(\bar{b}'/A) = \text{RM}(\bar{b}/A).$$

D'où $\text{RM}(\bar{b}/A\bar{a}) \geq \text{RM}(\bar{b}/A)$ et donc $\bar{b} \perp_A \bar{a}$.

4 : $\bar{a} \perp_A B$ ssi pour tout $\bar{b}_0 \in B$ et tout $\phi(\bar{x}, \bar{y}) \in L(A)$ si $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}, \bar{b}_0)$ alors $\text{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{b}_0)) \geq \text{RM}(\bar{a}/A)$ ssi pour tout $\bar{b}_0 \in B$, $\bar{a} \perp_A \bar{b}_0$.

5 : il existe $\bar{b}_0 \in B$ et $\phi(\bar{x}, \bar{y}) \in L$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}, \bar{b}_0)$ et $\text{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{b}_0)) = \text{RM}(\bar{a}, B)$. \square

Définition 4.36. Soient \mathcal{M} une structure totalement transcendante et $A, B, C \subset M$. On dit que A est indépendant de B au-dessus de C , noté $A \perp_C B$, si pour tout uple $\bar{a} \in A$, $\bar{a} \perp_C B$.

Exercice 4.37. Vérifier que la généralisation de l'indépendance ci-dessus est cohérente avec la première définition et qu'elle est toujours monotone, transitive et symétrique.

Exercice 4.38. Soient \mathcal{M} une structure totalement transcendante et $A, B \subset M$. Alors $A \perp_B \text{acl}(B)$.

Théorème 4.39. Soient \mathcal{M} une structure totalement transcendante, $A \subset M$ et $p(\bar{x}) \in S(A)$. Alors pour toute formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ il existe une formule $d_p\phi(\bar{y}) \in L(A)$ telle que pour tout $\bar{b} \in M$, $\mathcal{M} \models d_p\phi(\bar{b})$ si et seulement si $\phi(\bar{x}, \bar{b})$ est dans une extension non déviante de p . En particulier p est un type **définissable** : pour tout $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ et tout $\bar{a} \in A$, $\phi(\bar{x}, \bar{a}) \in p$ si et seulement si $\mathcal{M} \models d_p\phi(\bar{a})$.

Démonstration. On peut supposer \mathcal{M} ω -saturée. Soient $p_0, \dots, p_{d-1} \in S(M)$ les d extensions non déviantes de p . Pour chaque $j < d$, soit $(\bar{a}^j_i)_{i \in \omega}$ une suite de Morley dans p_j et n_ϕ l'entier donné par le lemme 4.33. Considérons $\psi(\bar{y})$ la formule

$$\bigvee_{j < d} \bigvee_{0 \leq i_0 < \dots < i_{n_\phi} < 2n_\phi} \bigwedge_{k \leq n_\phi} \phi(\bar{a}^j_{i_k}, \bar{y}).$$

Nous allons montrer que dans toute extension élémentaire \mathcal{N} de \mathcal{M} contenant les \bar{a}^j_i , un uple $\bar{b} \in N$ satisfait ψ si et seulement si $\phi(\bar{x}, \bar{b})$ est dans une extension non déviante de p . On en déduit par la proposition 3.13 l'existence de la formule $d_p\phi(\bar{y}) \in L(A)$ car l'ensemble défini par ψ est alors invariant par A -automorphisme.

Supposons que \bar{b} satisfait ψ . Il existe alors $j < d$ tel que $\mathcal{N} \models \phi(\bar{a}^j_i, \bar{b})$ au moins $n_\phi + 1$ fois. Soit $(\bar{a}'_i)_{i \in \omega}$ une suite de Morley dans l'extension non déviante de p_j à N . Alors $(\bar{a}^j_i)_{i \in \omega} \frown (\bar{a}'_i)_{i \in \omega}$ est une suite de Morley dans p_j et donc \bar{a}'_i satisfait $\phi(\bar{x}, \bar{b})$ pour tout \bar{a}'_i sauf au plus n_ϕ . Par conséquent $\phi(\bar{x}, \bar{b})$ est dans l'extension non déviante $\text{tp}(\bar{a}'_0/N)$ de p .

Réciproquement si $\phi(\bar{x}, \bar{b})$ dans une extension non déviante q de p . On peut supposer que q est un type sur N . Alors q est une extension non déviante d'un p_j pour un $j < \omega$. Soit $(\bar{a}'_i)_{i \in \omega}$ une suite de Morley dans q . Alors $(\bar{a}^j_i)_{i \in \omega} \frown (\bar{a}'_i)_{i \in \omega}$ est une suite de Morley dans p_j et donc \bar{a}'_i satisfait $\phi(\bar{x}, \bar{b})$ pour tout \bar{a}'_i sauf au plus n_ϕ . Donc \bar{b} satisfait ψ . \square

Corollaire 4.40. *Soit \mathcal{M} une structure totalement transcendante. Alors tout type p dans $S(M)$ est de degré de Morley 1 : pour chaque $M \subset B \subset N$ (où $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$), p a une unique extension non déviante à B , qui est alors définissable sur M .*

Démonstration. Soit q une extension non déviante de p à B . Alors pour tout $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ et tout $\bar{b} \in B$, $\phi(\bar{x}, \bar{b}) \in q$ si et seulement si $\mathcal{N} \models d_p \phi(\bar{b})$: en effet si $\phi(\bar{x}, \bar{b}) \in q$ alors $\phi(\bar{x}, \bar{b})$ est dans une extension non déviante de p donc $\mathcal{N} \models d_p \phi(\bar{b})$ et réciproquement si $\phi(\bar{x}, \bar{b}) \notin q$ alors $\mathcal{N} \models d_p \neg \phi(\bar{b})$ et comme $\mathcal{M} \models \forall \bar{y} (d_p \neg \phi(\bar{y}) \leftrightarrow \neg d_p \phi(\bar{y}))$, $\mathcal{N} \models \neg d_p \phi(\bar{b})$. \square

Chapitre 5

Structures fortement minimales

Définition 5.1. Soit D un ensemble infini définissable dans une structure \mathcal{M} .

- D est dit **minimal** si toute partie de D définissable dans \mathcal{M} est finie ou cofinie dans D . (C'est-à-dire pour tout $X \subset D$, X définissable dans \mathcal{M} , X est fini ou $D \setminus X$ est fini.)
- D est dit **fortement minimal** s'il est minimal dans toute extension élémentaire de \mathcal{M} .
- Une structure \mathcal{M} est **minimale** (respectivement **fortement minimale**) si le domaine M en tant qu'ensemble définissable dans \mathcal{M} l'est.

Exemple 5.2. 1. Tout ensemble infini sans structure est fortement minimal.

2. Tout K -espace vectoriel infini dans le langage $L_K = \{0, +, -, \lambda_k : k \in K\}$ est fortement minimal.
3. Tout corps algébriquement clos dans le langage des anneaux est fortement minimal.

Exemple 5.3. L'exemple 4.12 est minimal mais n'est pas fortement minimal.

Exercice 5.4. Soit D un ensemble définissable dans \mathcal{M} . Alors D est fortement minimal si et seulement si $\text{RM}(D) = 1$ et $\text{dM}(D) = 1$. Si \mathcal{M} est ω -saturée et D est minimal alors D est fortement minimal.

Les structures fortement minimales sont donc les “plus petites” structures infinies totalement transcendentes. Nous allons voir en particulier dans ce chapitre que dans une structure fortement minimale le rang de Morley sur les uples correspond à la dimension pour la prégéométrie associée à cette structure.

5.1 Prégéométries

Définition 5.5. – Un ensemble X muni d'un opérateur (de clôture) $\text{cl} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ est une **prégéométrie** si les conditions suivantes sont satisfaites.

1. Si $A \subset X$ alors $A \subset \text{cl}(A)$ et $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A)$.

2. Si $A \subset B \subset X$ alors $\text{cl}(A) \subset \text{cl}(B)$.
 3. Si $A \subset X$ et $a \in \text{cl}(A)$ alors il existe une partie finie $A_0 \subset A$ telle que $a \in \text{cl}(A_0)$.
 4. (Axiome de l'échange.) Si $A \subset X$, $a \in X$ et $b \in X$ alors $a \in \text{cl}(A \cup \{b\}) \setminus \text{cl}(A)$ implique $b \in \text{cl}(A \cup \{a\})$.
- Une prégéométrie (X, cl) est **homogène** si pour tout $A \subset X$, tout $a, b \in X \setminus \text{cl}(A)$, il existe un automorphisme de (X, cl) fixant A point par point et envoyant a sur b .
 - Une **géométrie** est une prégéométrie (X, cl) tel que $\text{cl}(\emptyset) = \emptyset$ et $\text{cl}(\{x\}) = \{x\}$ pour tout point $x \in X$.

Exemple 5.6. 1. **Géométries triviales** : tout ensemble X muni de la clôture qui à $A \subset X$ associe A est une géométrie.

2. Tout espace vectoriel E muni de la clôture qui à $A \subset E$ associe le sous-espace vectoriel engendré par A est une prégéométrie.
3. **Géométries affines** : tout espace affine F muni de la clôture qui à $A \subset F$ associe le sous-espace affine engendré par A est une géométrie.
4. Tout corps muni de la clôture algébrique (au sens classique) est une prégéométrie. (Toutes ces prégéométries sont homogènes.)

Proposition 5.7. *Soit \mathcal{M} une structure fortement minimale. Alors \mathcal{M} munie de la clôture algébrique est une prégéométrie.*

Démonstration. Les conditions 1,2 et 3 correspondent à l'exercice 3.35. Remarquons que dans \mathcal{M} , $a \not\perp_A B$ si et seulement si $a \in \text{acl}(A \cup B) \setminus \text{acl}(A)$. L'axiome de l'échange se déduit donc de la symétrie de l'indépendance. \square

Remarque. 1. On peut montrer directement l'axiome de l'échange à partir de la définition d'un ensemble fortement minimal. (Exercice.)

2. De manière plus général si D est un ensemble fortement minimal dans une structure \mathcal{M} alors D muni de la clôture qui à $A \subset D$ associe $\text{acl}(A) \cap D$ est une prégéométrie.

Définition. Soit (X, cl) une prégéométrie.

1. Une partie $A \subset X$ est **libre** si pour tout $a \in A$, $a \notin \text{cl}(A \setminus \{a\})$
2. Une partie $A \subset X$ est une **base** de X si A est libre et $X = \text{cl}(A)$.

Proposition 5.8. *Soit (X, cl) une prégéométrie. Alors toute partie libre de X peut se compléter en une base et toutes les bases de X ont même cardinal. On appelle **dimension** de X , notée $\dim(X)$, le cardinal de ses bases.*

Démonstration. Même preuve que pour un espace vectoriel. \square

Définition - Proposition 5.9. Soient (X, cl) une prégéométrie et Y et Z deux parties de X .

1. Une partie $A \subset X$ est **libre** au-dessus de Z si pour tout $a \in A$, $a \notin \text{cl}(A \setminus \{a\} \cup Z)$
2. Une partie $A \subset X$ est une **base** de Y au-dessus de Z si A est libre au-dessus de Z et $Y \subset \text{cl}(A \cup Z)$.

De même que précédemment Y a une base au-dessus de Z et toutes ses bases au-dessus de Z ont même cardinal que l'on note $\dim(Y/Z)$. De plus si $Z \subset Y$ et Y est de dimension finie alors $\dim(Y) = \dim(Y/Z) + \dim(Z)$.

Définition. Soit (X, cl) une prégéométrie. La **géométrie quotient** de (X, cl) par Y (ou la **localisée** de X à Y) est la géométrie (X', cl') où $X' = \{\text{cl}(Y \cup \{a\}) : a \in X \setminus \text{cl}(Y)\}$ et pour $A \subset X'$, $\text{cl}'(A) = \{\text{cl}(Y \cup \{a\}) : a \in \text{cl}(\cup_{B \in A} B) \setminus \text{cl}(Y)\}$.

On vérifie facilement que $\dim(X') = \dim(X/Y)$.

Exemple 5.10. Géométries projectives : la géométrie quotient de chaque espace vectoriel par $\{0\}$ (ou \emptyset). (Géométrie sur l'ensemble des droites vectoriels).

Remarque. On appellera géométrie d'une structure fortement minimale \mathcal{M} , la localisée de (M, acl) à $\text{acl}(\emptyset)$ (ou \emptyset).

Soient \mathcal{M} une structure fortement minimale et $A \subset M$. Comme $\text{RM}(M) = 1$ et $\text{dM}(M) = 1$ il y un unique type p non algébrique dans $S_1(\emptyset)$ qui a une unique extension non déviante à A notée $p|_A$. Si (a_1, \dots, a_n) est un uple libre au-dessus de A dans une extension élémentaire de \mathcal{M} alors c'est une suite de Morley du type $p|_A$. En particulier tout n -uple libre au-dessus de A réalise le même n -type au-dessus de A , noté $p|_A^n$, et toute partie libre B au-dessus de A dans une extension élémentaire est indiscernable au-dessus de A . La proposition suivante montre que le type $p|_A^n$ est de rang n .

Proposition 5.11. Soient \mathcal{M} une structure fortement minimale, $A \subset M$ et $a_1, \dots, a_n \in M$. Alors

$$\text{RM}(a_1, \dots, a_n/A) = \dim(\{a_1, \dots, a_n\}/A).$$

Démonstration. Remarquons que si a_{k+1}, \dots, a_n sont algébriques sur $A \cup \{a_1, \dots, a_k\}$ alors par 4.26,

$$\text{RM}(a_1, \dots, a_n/A) = \text{RM}(a_1, \dots, a_k/A).$$

Il suffit donc de montrer que pour tout (a_1, \dots, a_n) libre au-dessus de A ,

$$\text{RM}(a_1, \dots, a_n/A) = n,$$

c'est-à-dire que $p|_A^n$ est de rang n .

Nous montrons le résultat par récurrence sur n . C'est évident pour $n = 1$. Supposons le résultat vrai pour tout $0 < i \leq n$. Soit $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ libre au-dessus de A . Alors (a_1, \dots, a_n) est libre au-dessus de $A \cup \{a_{n+1}\}$. Donc $\text{RM}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}/A \cup \{a_{n+1}\}) = \text{RM}(a_1, \dots, a_n/A \cup \{a_{n+1}\}) = n$. De plus $a_1 \dots a_n a_{n+1} \not\downarrow_A a_{n+1}$ car $a_{n+1} \not\downarrow_A a_1 \dots a_n a_{n+1}$,

donc $\text{RM}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}/A) \geq n+1$. Par hypothèse d'induction pour tout $B \supset A$ (dans toute extension élémentaire de M), $p|_B^{n+1}$ est alors le seul type dans $S_{n+1}(B)$ de rang supérieur ou égal à $n+1$. Donc $\text{RM}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}/A) = n+1$. \square

Corollaire 5.12. *Soit K un corps algébriquement clos. Alors pour tout $\bar{a} \in K$ et k sous-corps de K , le rang de Morley de \bar{a} sur k est égal au degré de transcendance de $k(\bar{a})$ sur k . (La dimension d'une variété $V \subset K^n$ est égale au rang de Morley de V .)*

Exercice 5.13. Une structure fortement minimale \mathcal{M} est ω -saturée si et seulement si M est de dimension infinie.

5.2 Théories fortement minimales et catégoricité

Définition 5.14. Une théorie complète est **fortement minimale** si et seulement si tous ses modèles sont fortement minimaux.

Exercice 5.15. Soit T une théorie complète. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

1. T est fortement minimale.
2. Tout modèle de T est minimal.
3. T a un modèle ω -saturé minimal.
4. Pour tout modèle \mathcal{M} de T et tout ensemble de paramètres A , il y a un unique type non algébrique au-dessus de A .

Proposition 5.16. *Soient \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 deux modèles d'une même théorie complète fortement minimale. Alors \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimensions.*

Démonstration. \Rightarrow : si σ est un isomorphisme de \mathcal{M}_1 sur \mathcal{M}_2 alors A est une partie libre de M_1 si et seulement si $\sigma(A)$ est une partie libre de M_2 .

\Leftarrow : par le théorème de l'extension élémentaire commune on peut supposer que \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 sont deux sous-structures élémentaires d'une même structure \mathcal{N} . Soient A une base de M_1 et B une base M_2 . Soit f une bijection de A sur B . Alors f se prolonge en un unique isomorphisme partiel élémentaire σ de la sous-structure engendrée par A sur la sous-structure engendrée par B car tout (a_1, \dots, a_n) dans A a même type que $(f(a_1), \dots, f(a_n))$. Il existe alors un isomorphisme partiel élémentaire τ de domaine M_1 qui prolonge σ . Mais alors

$$\tau(M_1) = \tau(\text{acl}(A)) = \text{acl}(\tau(A)) = \text{acl}(B) = M_2.$$

\square

Corollaire 5.17. *Une théorie complète fortement minimale est κ -catégorique pour tout $\kappa > |T|$.*

Démonstration. Si \mathcal{M} est un modèle de T de cardinal $\kappa > |T|$ alors $\dim(M) = \kappa$. \square

Proposition 5.18. *Soit \mathcal{M} une structure fortement minimale et $A \subset M$ algébriquement clos ($A = \text{acl}(A)$). Si A est infini alors A est une sous-structure élémentaire de \mathcal{M} .*

Démonstration. On vérifie le test de Tarski. Soit D une partie non vide de M définissable dans \mathcal{M} avec des paramètres dans A . Ou bien D est fini et alors $D \subset \text{acl}(A) = A$, ou bien D est cofini et comme A est infini, $D \cap A \neq \emptyset$. \square

Corollaire 5.19. *Une théorie complète fortement minimale dénombrable est totalement catégorique si et seulement si pour toute partie finie A dans un modèle de T , la clôture algébrique de A est finie.*

Démonstration. \Leftarrow : si \mathcal{M} est modèle de T alors $\dim(M) = |M|$.

\Rightarrow : soit \mathcal{M} un modèle de T et A une partie finie de M tel que $\text{acl}(A)$ est infini. On peut supposer qu'il existe $b \in M \setminus \text{acl}(A)$. Alors $\text{acl}(A)$ et $\text{acl}(A \cup \{b\})$ sont des sous-structures élémentaires de \mathcal{M} car ce sont des parties infinies algébriquement closes. Ce sont alors deux modèles dénombrables de dimensions distinctes. \square

Exercice 5.20. Une théorie fortement minimale dénombrable qui n'est pas ω -catégorique a exactement ω modèles dénombrables à isomorphisme près.

Voici un résultat généralisant l'exercice ci-dessus :

Fait 5.21 (Théorème de Baldwin-Lachlan). *Une théorie dénombrable κ -catégorique pour $\kappa > \omega$ (\aleph_1 -catégorique) qui n'est pas ω -catégorique a exactement ω modèles dénombrables à isomorphisme près.*

Exercice 5.22. Soit \mathcal{M} une structure fortement minimale.

1. Montrer que (M, acl) est homogène.
2. Montrer que pour tout $A \subset M$ et pour tous uples \bar{a} et \bar{b} ayant même type sur A , \bar{a} et \bar{b} sont dans le même orbite par l'action des automorphismes de M qui fixent point par point A . (En particulier \mathcal{M} est ω -**fortement homogène** : deux uples \bar{a} et \bar{b} ayant même type (sur vide) sont dans le même orbite par l'action des automorphismes de M .)

5.3 Prégéométries localement modulaires

Définition 5.23. Soit (X, cl) une prégéométrie.

1. (X, cl) est **triviale** si pour tout A , $\text{cl}(A) = \cup_{a \in A} \text{acl}(\{a\})$; c'est-à-dire une partie B est libre si pour tout $a, b \in B$, $\{a, b\}$ est libre.
2. (X, cl) est **modulaire** si pour toutes parties closes de dimensions finies A et B ,

$$\dim(A \cup B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B).$$

3. (X, cl) est **localement modulaire** si pour toutes parties closes de dimensions finies A et B telles que $\dim(A \cap B) > 0$,

$$\dim(A \cup B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B).$$

Exercice 5.24. Soit (X, cl) une pré-géométrie homogène telle que $X \neq \text{cl}(\emptyset)$. Alors (X, cl) est localement modulaire si et seulement si pour un $a \in X \setminus \text{cl}(\emptyset)$, la géométrie quotient de X par $\{a\}$ (c'est-à-dire la localisée à $\{a\}$) est modulaire, si et seulement si pour tout $a \in X \setminus \text{cl}(\emptyset)$, la géométrie quotient de X par $\{a\}$ est modulaire.

Exemple 5.25. 1. Les géométries triviales du 5.6 sont évidemment triviales dans le sens ci-dessus. Réciproquement, toute localisée d'une pré-géométrie triviale est une géométrie triviale du type 5.6.

2. La structure $\langle \mathbb{Z}, S \rangle$ où S est la fonction successeur est fortement minimale et toute structure élémentairement équivalente à $\langle \mathbb{Z}, S \rangle$ a une pré-géométrie triviale.
3. Les géométries affines sont localement modulaires mais non modulaires. (Considérer deux droites parallèles.)
4. Les géométries projectives sont modulaires.
5. Les pré-géométries associées aux corps algébriquement clos ne sont pas localement modulaires : soient K un corps algébriquement clos ω -saturé et k un sous-corps algébriquement clos de degré de transcendance 1 (k est égal à la clôture algébrique d'un élément transcendant). Soit $(a, b, c) \in K^3$ libre au-dessus de k . Posons $A = \text{acl}(k(a, b))$ et $B = \text{acl}(k(c, ac+b))$. Alors $\text{acl}(A \cup B) = \text{acl}(k(a, b, c))$ et $A \cap B = k$. Donc $\dim(A \cup B) = 4$, $\dim(A) = \dim(B) = 3$ et $\dim(A \cap B) = 1$.

Pendant de nombreuses années, les exemples ci-dessus étaient les seuls types connus de pré-géométries issues de structures fortement minimales. On a alors pensé qu'ils n'en existaient pas d'autres. Cette intuition ne s'est avérée juste que pour les géométries localement modulaires : toutes géométries localement modulaires provenant d'une structure fortement minimale est triviale, affine ou projective. Pour l'autre cas, Zil'ber avait conjecturé que toute structure fortement minimale non localement modulaire interprète un corps algébriquement clos. Hrushovski a réfuté cette conjecture à la fin des années 80 en construisant un exemple non localement modulaire qui n'interprète pas de groupe infini.

Donnons ici la définition de l'interprétation :

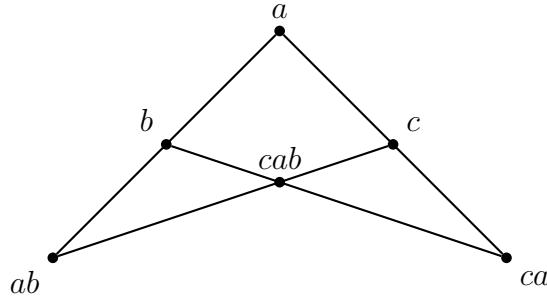
Définition 5.26. Soient \mathcal{M} une structure, G un groupe et Γ le graphe de la multiplication de ce groupe. On dit que G est interprétable dans \mathcal{M} s'il existe $n > 0$, D une partie de M^n définissable, E une relation d'équivalence sur D définissable et S une partie définissable de D^3 tels que l'on ait une bijection de G sur D/E qui envoie Γ sur S/E^3 .

La définition est analogue pour un corps et en fait pour toute autre structure.

5.4 Configuration de groupes

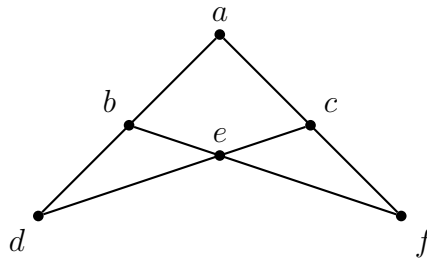
Cette dernière partie a pour but de donner une idée de la construction d'un groupe infini dans une structure fortement minimale localement modulaire non triviale.

Remarquons que dans un groupe G fortement minimal on a la configuration suivante à partir de trois éléments $a, b, c \in G$ formant un ensemble libre :



Dans cette configuration aucun des points n'est dans la clôture d'un autre, et un point est dans la clôture de deux autres si et seulement si un segment de cette configuration contient ces trois points.

Définition. Une configuration de groupe dans une prégéométrie (X, cl) est la donnée de 6 points a, b, c, d, e, f et d'une partie $A \subset X$ telle que pour tous points distincts $x, y \in \{a, b, c, d, e, f\}$, $x \notin \text{cl}(A \cup \{y\})$ et telle que pour tous points distincts $x, y, z \in \{a, b, c, d, e, f\}$, $x \in \text{cl}(A \cup \{y, z\})$ si et seulement si x, y et z sont alignés dans la configuration suivante :



Notons que les points sont de dimension 1 sur A , que les lignes sont de dimension 2 sur A et que l'ensemble des points est de dimension 3 sur A .

Lemme 5.27. Soit (X, cl) une prégéométrie homogène, localement modulaire non triviale et de dimension infinie. Il existe alors une configuration de groupe dans X .

Démonstration. Comme X n'est pas triviale, il existe une partie $A \subset X$ finie et deux éléments $a, b \in X$ tels que $\text{cl}(A \cup \{a, b\}) \neq \text{cl}(A \cup \{a\}) \cup \text{cl}(A \cup \{b\})$. On peut supposer que $\dim(A) > 0$. Soit $d \in \text{cl}(A \cup \{a, b\}) \setminus (\text{cl}(A \cup \{a\}) \cup \text{cl}(A \cup \{b\}))$. Comme X est de dimension infinie il existe $c \in X \setminus \text{cl}(A \cup \{a, b\})$. Par homogénéité, il existe $f \in \text{cl}(A \cup \{a, c\}) \setminus (\text{cl}(A \cup \{a\}) \cup \text{cl}(A \cup \{c\}))$. Alors $\{c, d\}$ est libre au-dessus de A (sinon $c \in \text{cl}(A \cup \{d\}) \subset \text{cl}(A \cup \{a, b\})$) et de même $\{b, f\}$ est libre au-dessus de A . De plus $d, f \in \text{cl}(A \cup \{a, b, c\})$. Par modularité, $\dim(\text{cl}(A \cup \{c, d\}) \cap \text{cl}(A \cup \{b, f\})/A) =$

$\dim(\text{cl}(A \cup \{c, d\})/A) + \dim(\text{cl}(A \cup \{b, f\})/A) - \dim(\text{cl}(A \cup \{c, d, b, f\})/A) = 2 + 2 - 3$.
Donc il existe $e \in \text{cl}(A \cup \{c, d\}) \cap \text{cl}(A \cup \{b, f\}) \setminus \text{cl}(A)$. On vérifie alors facilement que a, b, c, d, e, f forment un diagramme de groupe au-dessus de A . \square

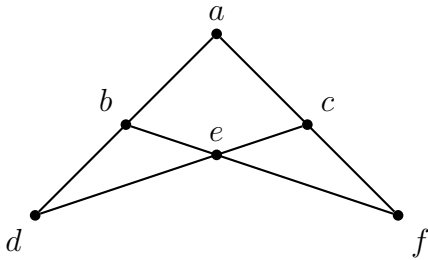
Proposition 5.28. *Soit \mathcal{M} une structure fortement minimale ω -saturée dont la pré-géométrie (M, acl) contient une configuration de groupe alors il existe un groupe infini interprétable dans \mathcal{M} .*

Définition 5.29. Pour A une partie d'une structure \mathcal{N} et $a \in N$, on dit que a est définissable sur A si $\{a\}$ est un ensemble définissable à paramètre dans A . On note $\text{dcl}(A)$ l'ensemble des points définissables sur A . Il est évident que $\text{dcl}(A) \subset \text{acl}(A)$.

Remarque. A partir d'une configuration de groupe a, b, c, d, e, f au-dessus de A dans \mathcal{M} une structure fortement minimale ω -saturée, on peut supposer $\text{dcl}(\emptyset) = \text{acl}(\emptyset)$ infini et A vide : il suffit de considérer $B \supset A$ telle que $B \downarrow_A abcdef$, $\text{acl}(B)$ infini et $\dim(M/B)$ infini et d'ajouter tous les éléments de $\text{acl}(B)$ aux constantes du langage.

La preuve de la proposition 5.28 se décompose en deux parties. La première partie consiste à montrer que l'on peut supposer dans la configuration de groupe que $f \in \text{dcl}(\{a, c\})$ et $c \in \text{dcl}(\{a, f\})$. En fait cette hypothèse s'obtient dans une structure interprétable dans \mathcal{M} : on doit remplacer les éléments a, b, c, d, e, f par des éléments **imaginaires** : un élément imaginaire est la classe d'un uple par une relation d'équivalence définissable dans \mathcal{M} . Nous ne montrerons pas cette première partie. Dans la seconde partie on construit une groupe à partir des éléments a, c, f . Nous donnerons une idée de la preuve de cette deuxième partie en supposant pour simplifier que la configuration de groupe avec l'hypothèse supplémentaire se trouve réellement dans M . On considère donc pour la suite les hypothèses suivantes :

Hypothèses. Soient \mathcal{M} une structure fortement minimale ω -saturée telle que $\text{dcl}(\emptyset) = \text{acl}(\emptyset)$ est infini et 6 points a, b, c, d, e, f qui forment une configuration de groupe sur le vide vérifiant de plus que $f \in \text{dcl}(\{a, c\})$ et $c \in \text{dcl}(\{a, f\})$:



Pour $x, y, z \in \{a, b, c, d, e, f\}$ distincts, on a
 $\dim(\{x\}) = 1$,
 $\dim(\{x, y\}) = 2$,
 $\dim(\{x, y, z\}) = 3$ si x, y, z non alignés,
 $\text{acl}(\{x, y, z\}) = \text{acl}(\{x, y\})$ si x, y, z alignés,
 $f \in \text{dcl}(\{a, c\})$ et $c \in \text{dcl}(\{a, f\})$.

Remarquons que l'hypothèse $\text{acl}(\emptyset)$ est infini implique que toute partie algébriquement close de \mathcal{M} est sous-structure élémentaire de \mathcal{M} et de plus l'hypothèse $\text{dcl}(\emptyset) = \text{acl}(\emptyset)$ implique que $\text{dcl}(\emptyset) \prec \mathcal{M}$.

L'hypothèse $f \in \text{dcl}(\{a, c\})$ et $c \in \text{dcl}(\{a, e\})$ implique l'existence d'une formule $\phi(x, y, z)$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(a, c, f)$ et tel que $\mathcal{M} \models \forall z(\phi(a, c, z) \rightarrow z = f) \wedge \forall y(\phi(a, y, f) \rightarrow z = c)$.

Notons p l'unique type non algébrique sur le vide et p^2 le type des couples de réalisations indépendantes de p .

Lemme 5.30. *Soit $\theta(x_1, x_2, y, y') := \exists z \phi(x_1, y, z) \wedge \phi(x_2, y', z)$. Pour tout (a_1, a_2) réalisation de p^2 dans \mathcal{M} , $\theta(a_1, a_2, y, y')$ définit une fonction f_{a_1, a_2} de $M \setminus \text{acl}(a_1, a_2)$ dans lui-même.*

Démonstration. Soit $i \in M \setminus \text{acl}(a_1, a_2)$, c'est-à-dire i réalisation de p tel que $i \perp_{a_1} a_1 a_2$. Alors $a_1 i$ a même type que ac . Donc il existe un unique j tel que $\mathcal{M} \models \phi(a_1, i, j)$. De plus j réalise p , $j \perp_{a_1} a_1$ et $j \in \text{dcl}(a_1, i)$. Mais $i \perp_{a_1} a_2$, donc $j \perp_{a_1} a_2$, d'où $j \perp_{a_1} a_1 a_2$. De même il existe un unique i' tel que $\mathcal{M} \models \phi(a_2, i', j)$ et à nouveau i' réalise p et $i' \perp_{a_1} a_1 a_2$. Donc i' est l'unique élément de \mathcal{M} tel que $\mathcal{M} \models \theta(a_1, a_2, i, i')$. \square

Nous allons maintenant définir les “germes” des fonctions précédentes :

Lemme 5.31. *Pour deux réalisations (a_1, a_2) et (a_3, a_4) de p^2 , on définit $f_{a_1, a_2} \sim f_{a_3, a_4}$ si pour toute réalisation i de p tel que $i \perp_{a_1} a_1 a_2 a_3 a_4$, $f_{a_1, a_2}(i) = f_{a_3, a_4}(i)$.*

*Alors \sim est une relation d'équivalence. On note $[a_1, a_2]$ la classe d'équivalence de f_{a_1, a_2} (le **germe** de f_{a_1, a_2}). De plus il existe une relation d'équivalence définissable sans paramètre $E(x_1, x_2, x_3, x_4)$ telle que pour toutes réalisations (a_1, a_2) et (a_3, a_4) de p^2 , $[a_1, a_2] = [a_3, a_4]$ si et seulement si $E(a_1, a_2, a_3, a_4)$.*

Démonstration. Remarquons que $f_{a_1, a_2} \sim f_{a_3, a_4}$ si et seulement si il existe i une réalisation de p tel que $i \perp_{a_1} a_1 a_2 a_3 a_4$ et $f_{a_1, a_2}(i) = f_{a_3, a_4}(i)$ si et seulement si la formule $f_{a_1, a_2}(y) = f_{a_3, a_4}(y)$ est dans l'unique extension non déviante de p à $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. On en déduit d'une part que \sim est une relation d'équivalence et d'autre part que cette relation est définissable sans paramètre par définissabilité du type p . \square

Les germes sont des éléments de M^2/E et donc des éléments imaginaires de la structure \mathcal{M} . Pour la suite on se place dans la structure à deux sortes $\mathcal{M}^E = \langle M, M^2/E, L, f_E \rangle$ où f_E est la fonction de M^2 sur M^2/E qui envoie (x_1, x_2) sur $(x_1, x_2)/E$. Une **structure à plusieurs sortes** est une structure où l'on considère plusieurs domaines distincts, les **sortes**, telle que chaque variable est associée à une sorte, de même chaque constante du langage et telle que dans les relations et les fonctions sont précisées les sortes des variables sur lesquelles elles s'appliquent. Tout ce qui a été vu précédemment dans ce cours se généralise facilement aux structures à plusieurs sortes.

Il est facile de vérifier que si \mathcal{N} est une sous-structure (respectivement extension) élémentaire de \mathcal{M} alors \mathcal{N}^E est une sous-structure (respectivement extension) élémentaire de \mathcal{M}^E , que toute sous-structure (respectivement extension) élémentaire est de cette forme et que si σ est un automorphisme de \mathcal{N} alors σ se prolonge en un unique automorphisme de \mathcal{N}^E en envoyant les éléments $f_E(x_1, x_2)$ sur $f_E(\sigma(x_1), \sigma(x_2))$. On admettra que la saturation, la stabilité, la totale transcendance passe de \mathcal{M} à \mathcal{M}^E : la structure \mathcal{M}^E est donc ω -saturée et totalement transcendante.

Nous noterons dcl^E (respectivement acl^E) la clôture définissable (respectivement algébrique) au sens de \mathcal{M}^E .

Remarque. Soit $A \subset M$. Alors $\text{acl}^E(A)$ est une sous-structure élémentaire de \mathcal{M}^E et $\text{acl}^E(A) = \text{dcl}^E(\text{acl}(A))$.

Démonstration. Par les hypothèses sur \mathcal{M} , $\text{acl}(A) \prec \mathcal{M}$. Donc $(\text{acl}(A))^E \prec \mathcal{M}^E$ et $(\text{acl}(A))^E$ est algébriquement clos. D'où $\text{acl}^E(A) = (\text{acl}(A))^E = \text{dcl}^E(\text{acl}(A))$. \square

Remarquons que tous les germes des fonctions précédentes ont même type dans la théorie de \mathcal{M}^E . On notera q ce type. En particulier l'ensemble de ces germes est une intersection d'ensembles définissables.

Lemme 5.32. Soient $\alpha = [a_1, a_2]$ un germe et i une réalisation de p tel que $i \perp a_1 a_2$. Alors $\alpha(i) \in \text{dcl}^E(\alpha, i)$.

Démonstration. L'élément $\alpha(i)$ est l'unique y' tel que

$$\exists(x_1, x_2) \models p^2, x_1 x_2 \perp i, [x_1, x_2] = \alpha \text{ et } f_{x_1, x_2}(i) = y'.$$

Notons $p_{\{i\}}^2$ l'unique extension non déviante de p^2 sur $\{i\}$. Par un argument de compacité on a

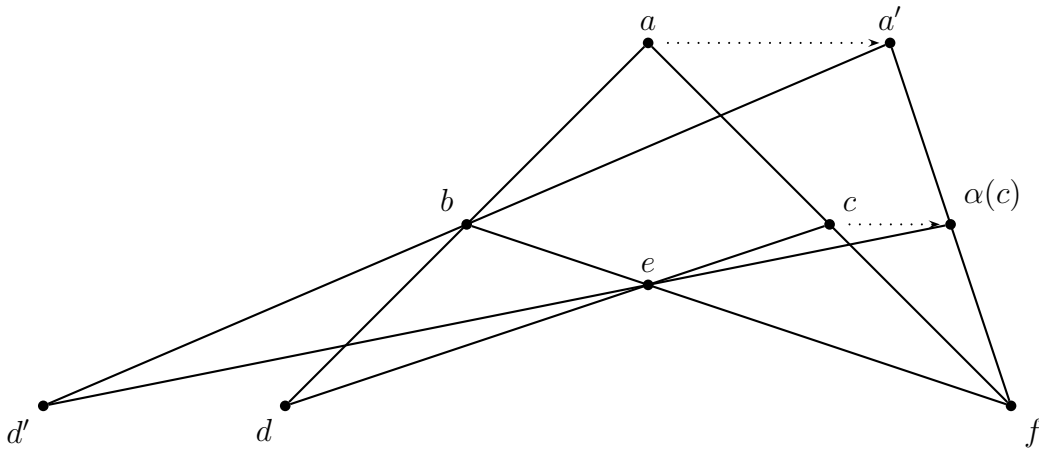
$$\{\exists x_1 \exists x_2 (\psi(x_1, x_2, i) \wedge f_E(x_1, x_2) = \alpha \wedge \theta(x_1, x_2, i, y')) : \psi \in p_{\{i\}}^2\} \vdash y' = \alpha(i).$$

A nouveau par compacité il existe une formule $\psi(x_1, x_2, i) \in p_{\{i\}}^2$ telle que la formule $\exists x_1 \exists x_2 (\psi(x_1, x_2, i) \wedge f_E(x_1, x_2) = \alpha \wedge \theta(x_1, x_2, i, y'))$ définit $\{\alpha(i)\}$. \square

Lemme 5.33. Le type q est de rang 1. Si $[a_1, a_2]$ est un germe alors $[a_1, a_2] \perp a_1$ et $[a_1, a_2] \perp a_2$.

Démonstration. Soit a' une réalisation de p tel que $a' \perp abc$. Notons $\alpha = [a, a']$. Remarquons tout de suite que $\text{RM}(\alpha) \leq 2$ car $\alpha \in \text{dcl}^E(a, a')$ et $\text{RM}(aa') = 2$.

On a $a \perp bf$ et $a' \perp bf$, donc a et a' ont même type au-dessus de $\text{acl}(\{b, f\})$. Il existe donc un automorphisme σ qui envoie a sur a' et qui fixe point par point $\text{acl}(\{b, f\})$. Notons $d' = \sigma(d)$. Par définition, $\alpha(c) = \sigma(c)$. Nous obtenons le diagramme suivant :



Comme $a' \perp ac$, $a' \perp cf$, $a'f \perp c$ et donc $\alpha(c) \perp c$. Par le lemme précédent $\alpha(c) \in \text{dcl}^E(\alpha, c)$ donc α n'est pas algébrique.

Nous allons montrer que $\alpha \in \text{acl}^E(d, d')$. Comme $a' \perp abc$, $a' \perp_{ab} c$ et comme $c \perp ab$, on a $c \perp aa'b$ et donc $c \perp aa'bdd'$. D'où $aa' \perp_{dd'} c$ et donc $\alpha \perp_{dd'} c$. Pour montrer que $\alpha \in \text{acl}^E(d, d')$ il suffit donc de montrer que $\alpha \in \text{acl}^E(d, d', c)$.

Pour cela il suffit de montrer que tout automorphisme (d'une extension élémentaire de \mathcal{M}^E) qui fixe point par point $\text{acl}^E(d, d', c)$, fixe α . Considérons τ un tel automorphisme. Notons que $\tau(\alpha) = [\tau(a), \tau(a')]$. Soit i une réalisation de p tel que $i \perp aa'\tau(a)\tau(a')dd'$. Il existe donc τ_0 un automorphisme qui fixe $\text{acl}^E(d, d', i)$ et qui envoie aa' sur $\tau(a)\tau(a')$ car aa' et $\tau(a)\tau(a')$ ont même type sur $\text{acl}^E(d, d')$ et donc même type sur $\text{acl}^E(d, d', i)$. Comme $\alpha(c) \in \text{acl}(dd'c)$ et i a même type que c au-dessus de $\{aa'dd'\}$ (car $c \perp aa'dd'$ et $i \perp aa'dd'$) donc $\alpha(i) \in \text{acl}(dd'i)$. D'où

$$\alpha(i) = \tau_0(\alpha(i)) = (\tau_0(\alpha))(\tau_0(i)) = (\tau(\alpha))(i).$$

C'est-à-dire $f_{a,a'}(i) = f_{\tau(a), \tau(a')}(i)$ donc $\alpha = \tau(\alpha)$.

Donc $\alpha \in \text{acl}^E(d, d')$. Comme $a' \perp ab$, $a' \perp ad$ et $aa' \perp d$. Donc $\alpha \perp d$. D'où

$$\text{RM}(\alpha) = \text{RM}(\alpha/d) = \text{RM}(d\alpha/d) < \text{RM}(d\alpha) \leq \text{RM}(dd') = 2.$$

Par conséquent $\text{RM}(\alpha) \leq 1$ et comme α n'est pas algébrique $\text{RM}(\alpha) = 1$.

Montrons que $\alpha \perp a$. Sinon $\alpha \in \text{acl}^E(a)$ et donc $\alpha(c) \in \text{acl}(a, c)$ mais alors $a' \in \text{acl}(ac)$ ce qui contredit $a' \perp ac$. On fait de même pour $\alpha \perp a'$. \square

Remarque. Pour $\alpha = [a_1, a_2]$ et $\beta = [a_3, a_4]$, $\alpha \circ \beta(i)$ est défini pour $i \perp a_1a_2a_3a_4$. En effet on a alors $i \perp_{a_3a_4} a_1a_2$ donc $\beta(i) \perp_{a_3a_4} a_1a_2$ et donc $\beta(i) \perp a_1a_2$ car $\beta(i) \perp a_1a_2$.

Dans le sens ci-dessus tout germe $\alpha = [a_1, a_2]$ a un inverse $\alpha^{-1} = [a_2, a_1]$ (remarquons que $\alpha^{-1} \in \text{dcl}^E(\alpha)$). Par contre la composée de deux germes n'en est pas a priori un. Le lemme suivant montre que c'est le cas pour deux germes indépendants.

Lemme 5.34. *Si α et β sont deux réalisations de q tel que $\alpha \perp \beta$ alors il existe a_1, a_2, a_3 trois réalisations indépendantes de p tel que $\alpha = [a_1, a_2]$, $\beta = [a_2, a_3]$. En particulier pour $i \perp a_1a_2a_3$, $\alpha \circ \beta(i) = \gamma(i)$ où $\gamma = [a_1, a_3]$. De plus $\gamma \perp \alpha$ et $\gamma \perp \beta$.*

Démonstration. Tout type sur le vide dans \mathcal{M}^E est de degré 1 car $\text{dcl}^E(\emptyset)$ est une sous-structure élémentaire de \mathcal{M}^E , donc tous les couples de réalisations indépendantes de q ont même type. Il suffit donc de montrer que si a_1, a_2, a_3 sont trois réalisations indépendantes de p alors $[a_1, a_2] \perp [a_2, a_3]$ et le reste ce déduit par permutation des indices. On a $a_1 \perp a_2a_3$ donc $a_1 \perp a_2[a_2, a_3]$, $a_1 \perp_{a_2} [a_2, a_3]$. D'où $[a_2, a_3] \perp a_1a_2$ car $[a_2, a_3] \perp a_2$. Par conséquent $[a_2, a_3] \perp [a_1, a_2]$. \square

Remarque. Dans le lemme précédent γ étant un germe, il est uniquement déterminé et $\gamma \in \text{dcl}^E(\alpha, \beta)$. Pour la suite on identifiera γ et $\alpha \circ \beta$.

Notons X l'ensemble des germes dans \mathcal{M}^E . Afin d'obtenir un ensemble clos par composition, on va maintenant considérer les germes de composées de deux éléments de X .

Lemme 5.35. *Pour quatre germes $\alpha = [a_1, a_2]$, $\beta = [a_3, a_4]$, $\gamma = [b_1, b_2]$ et $\delta = [b_3, b_4]$ on définit $(\alpha, \beta) \equiv (\gamma, \delta)$ si pour toute réalisation i de p tel que $i \perp a_1 a_2 a_3 a_4 b_1 b_2 b_3 b_4$, $\alpha \circ \beta(i) = \gamma \circ \delta(i)$.*

Alors \equiv est une relation d'équivalence. On note $\alpha \cdot \beta$ la classe d'équivalence de (α, β) . Il existe de plus une relation d'équivalence E' définissable sans paramètre dans le langage L telle que pour toutes réalisations (a_1, a_2) , (a_3, a_4) , (b_1, b_2) et (b_3, b_4) de p^2 , $[a_1, a_2] \cdot [a_3, a_4] = [b_1, b_2] \cdot [b_3, b_4]$ si et seulement si $E'(a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4)$.

Démonstration. La preuve est identique au lemme 5.31. □

Lemme 5.36. *Soit $G := X \cdot X$. Alors G est un groupe infini interprétable dans \mathcal{M} .*

Démonstration. Les éléments de G sont inversibles car c'était déjà le cas pour les éléments de X .

Pour montrer que G est stable par composition il suffit de montrer que la composition de trois éléments de X correspond à la composition de deux éléments de X . Soient α , β et γ dans X . Considérons $\delta \perp \alpha\beta\gamma$. Alors $\beta \circ \delta \in X$. De plus $\beta \circ \delta \in \text{dcl}^E(\beta, \delta)$ donc $\beta \circ \delta \perp_\beta \alpha$. Comme $\beta \circ \delta \perp \beta$, on a $\beta \circ \delta \perp \alpha$ et donc $\alpha \circ \beta \circ \delta \in X$. De l'autre côté, comme $\delta^{-1} \in \text{dcl}^E(\delta)$, $\delta^{-1} \perp \gamma$ donc $\delta^{-1} \circ \gamma \in X$. D'où

$$\alpha \circ \beta \circ \gamma = (\alpha \circ \beta \circ \delta) \circ (\delta^{-1} \circ \gamma).$$

Ainsi G est un groupe infini (X étant infini).

L'ensemble G peut être vu comme partie de M^4/E' . On peut vérifier facilement que G est une intersection infinie d'ensembles définissables de $\mathcal{M}^{E'}$ et qu'il existe une formule $\psi(u, v, w)$ tel que pour tout g_1, g_2 et g_3 dans G , $\mathcal{M}^{E'} \models \psi(g_1, g_2, g_3)$ si et seulement si $g_1 \circ g_2 = g_3$. Un tel groupe est dit infiniment définissable. On admettra ici un résultat fondamental de stabilité : un groupe infiniment définissable dans une structure stable est intersection de sous-groupes définissables d'un groupe définissable. On conclut en utilisant le devoir à la maison sur les conditions de chaînes : une telle intersection dans une structure totalement transcendante est finie. Donc G est définissable dans $\mathcal{M}^{E'}$ et donc interprétable dans \mathcal{M} . □