Note del corso sui gruppi di rango di Morley finito

Luca Spada*
University of Siena
Department of Mathematics
Pian dei Matellini 44
53100 Siena (Italy)

17 gennaio 2006

Sommario

Queste sono delle note tratte dal corso sui gruppi di rango di Morley finito tenute dal prof. Jaligot presso l'università Claude Bernard (Lyon1) durante il primo semestre dell A.A. 2005/2006. Le note non sono state corrette da nessuno oltre a me, quindi ci saranno molti errori, spero solo niente di grave. Ogni suggerimento è ben gradito.

1 Introduzione alla logica del primo ordine

La logica del primo ordine ha come particolarità il fatto di non ammettere stringhe infinite di quantificatori e di ammettere quantificazioni solo su elementi delle strutture.

Esempio 1. *Considerando* $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1\rangle$ *come struttura il seguente sottoinsieme del dominio risulta definibile a l primo ordine:* $\mathbb{R}^+ = \{x \mid x \geq 0\} = \{x \mid \exists y(x = y^2)\}$.
Più in generale tutti gli insiemi semialgebrici: $\{x \mid P(x) \geq 0\}$ *dove* $P(x)$ *è un polinomio, sono definibili al primo ordine.*
O ancora, considerando la struttura $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1\rangle$*, gli insiemi della forma* $\{\bar{x} \mid P(\bar{x}) = 0\}$ *vengono chiamati i chiusi di Zarinski. Le combinazioni booleane di chiusi di Zarinski (ancora definibili al primo ordine) vengono chiamati insiemi costruibili*

1.1 Sintassi

Definizione 1.1. Un linguaggio è insieme di dati comprendente:

- Una segnatura, che a sua volta è l'unione disgiunta di simboli:
  - di funzione
  - di relazione
  - di costante
- Simboli logici:

*email:spada@unisi.it tel. +39 0577 233715 fax. +39 0577 233733

- connettivi: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- quantificatori: $\forall, \exists$

- un infinità di variabili: $x_1, ..., x_n, ...$
- parentesi:),(

Fissato un linguaggio L passiamo a definire:

Definizione 1.2. La collezione degli L-termini, definita ricorsivamente:

- Tutte le costanti e le variabili sono dei termini
- Se f è una funzione di arietà n e $t_1, ..., t_n$ sono dei termini allora $f(t_1, ..., t_n)$ è un termine
- Nient'altro è un termine

Definizione 1.3. Una L-formula atomica è un espressione della forma $R(t_1, ..., t_n)$ dove R è un simolo di relazione di arietà n e $t_1, ..., t_n$ sono L-termini.

Definizione 1.4. La collezione delle L-formule è definita ricorsivamente:

- Una L-formula atomica è una L-formula
- Se φ, ψ sono formule allora $\varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi, \neg\psi$ sono L-formule
- Se φ è una L-formula e x è una variabile allora $\forall x\varphi$ e $\exists x\varphi$ sono L-formule
- Null'altro è una L-formula

Le occorrenze di x in φ sono legate dalla quantificazione, le variabili libere sono le variabili non legate.
Un enunciato è una formula senza variabili libere.

Esempio 2. *Nel linguaggio* $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1\rangle$, $\forall a_0, ...\forall a_n(a \neq 0 \rightarrow \exists x(a_n x^n + ... + a_0))$ *è un enunciato.*

Definizione 1.5. Una L-struttura e l'insieme di dati $\mathcal{M}$, formato da

- un insieme M detto il dominio
- per ogni costante $c \in L$, un elemento $c^{\mathcal{M}} \in M$
- per ogni funzione $f \in L$ di arietà n, una funzione $f^{\mathcal{M}} : M^n \rightarrow M$
- per ogni relazione $P \in L$ di arietà n, una relazione $P^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$

Notazione 1.6. *Scrivendo* $\varphi(\bar{x})$ *dove* $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$ *intenderemo che tutte le variabili in* $\bar{x}$ *sono libere in* φ*. Sostituendo tutte le* x_i *con elementi di* M *otteremo una formula con paramentri in* M*.*

Definizione 1.7. Siano $\bar{x}$ le variabli libere in φ; $\bar{x}, \bar{m}$ di lungehezza n si definisce ricorsivamente il concetto di soddisfacibilità:

- Se $\varphi(\bar{x})$ è atomica, allora $\varphi(\bar{x}) = R(t_1(\bar{x}), ..., t_n(\bar{x}))$. Allora $\varphi(\bar{m})$ è soddisfatta sse, $(t_1^{\mathcal{M}}, ..., t_n^{\mathcal{M}}) \in R^{\mathcal{M}}$.

- Se $\varphi(\bar{x}) = \psi_1(\bar{x}) \vee \psi_2(\bar{x})$ allora $\varphi(\bar{m})$ è soddisfatta sse, $\psi_1(\bar{m})$ è soddisfatta o $\psi_2(\bar{m})$ è soddisfatta.
- Se $\varphi(\bar{x}) = \psi_1(\bar{x}) \wedge \psi_2(\bar{x})$ allora $\varphi(\bar{m})$ è soddisfatta sse, $\psi_1(\bar{m})$ è soddisfatta e $\psi_2(\bar{m})$ è soddisfatta.
- Se $\varphi(\bar{x}) = \neg\psi(\bar{x})$ allora $\varphi(\bar{m})$ è soddisfatta sse, $\psi(\bar{m})$ non è soddisfatta.
- Se $\varphi(\bar{x}) = \exists y \psi(y, \bar{x})$ allora $\varphi(\bar{m})$ è soddisfatta sse, esiste un $t \in M$ tale che $\psi(t, \bar{m})$ è soddisfatta.
- Se $\varphi(\bar{x}) = \forall y \psi(y, \bar{x})$ allora $\varphi(\bar{m})$ è soddisfatta sse, per ogni $t \in M$ vale che $\psi(t, \bar{m})$ è soddisfatta.

Se φ è soddisfatta in $\mathcal{M}$ scriveremo $\mathcal{M} \models \varphi$

Definizione 1.8. una teoria è un insieme di enunciati.

Definizione 1.9. Un modello di una teoria T è una struttura $\mathcal{M}$ sullo stesso linguaggio, tale che $\mathcal{M} \models \varphi$ per ogni $\varphi \in T$.

Teorema 1.10 (Gödel, Malco'v)**.** *Una teoria è consistente se ogni parte finita di essa lo è*

Definizione 1.11. Se $\mathcal{M}$ è una L-struttura la teoria di $\mathcal{M}$, indicata con $Th(\mathcal{M})$ è l'insieme di enunciati validi in $\mathcal{M}$

Proposizione 1.12. *Sia T una teoria, allora le seguenti sono equivalenti:*

1. *T è consistente e massimale*
2. *$T = Th(\mathcal{M})$ per qualche struttura $\mathcal{M}$*

Definizione 1.13. Una teoria è completa se è consistente e contenuta in unica teoria massimale.

Esempio 3.
- *La teoria dei gruppi: consistente ma non completa*
- *La teoria degli anelli, dei campi,...*
- *La teoria degli ordini densi senza estremi: consistente e completa*

2 Numero di modelli di una teoria completa

3 Assiomi del Rango di Morley

Definizione 3.1. Universo: Un universo U è una collezione di insiemi che soddisfa le condizioni indicate in seguito. Ci riferiremo agli elementi di U come gli insiemi definibili. Una funzione sarà chiamata definibile se lo è il suo grafo.

- *Chiusura per operazioni booleane*: se A e B sono insiemi definibili allora lo sono anche $A \cap B, A \cup B, A - B$

- *Chiusura per prodotti*: Se A e B sono definibili allora lo è anche il loro prodotto cartesiano $A \times B$, la diagonale $\Delta = \{(a,a) \mid a \in A\}$ e le proiezioni canoniche:
$$\pi_A : A \times B \to A \quad \pi_B : A \times B \to B$$
Assumiamo, inoltre che se $C \subseteq A \times B$ è definibile anche le proiezioni $\pi_A(C)$ e $\pi_B(C)$ lo siano

- *Insiemi finiti*: Se A è definibile e $a \in A$ allora $\{a\}$ è anche definibile.

- *Fattorizzazione*: Se $E(x,y)$ è una relazione di equivalenza definibile su un insieme A allora il quoziente A/E è codificato nell'universo come segue: esiste un insieme $\bar{A} \in \mathcal{U}$ ed una funzione suriettiva e definibile $f : A \to \bar{A}$, tale che per ogni $x, y \in A$ si abbia $f(x) = f(y)$ sse $E(x,y)$ vale.

Segue facilmente dalla definizione che l'unione e l'intersezione finita di famiglie di insiemi sono definibili; che l'insieme vuoto è definibile, e che gli insiemi finiti e cofiniti sono definibili. Si dice che una una struttura è definibile se il suo dominio e le sue operazioni sono definibili.

Definizione 3.2. Rango: sia U un universo. una funzione $rg : \mathcal{U} - \{\emptyset\} \to N$ è chimata rango di Morley o più semplicemente, rango, se per ogni $A, B \in \mathcal{U}$ si ha:

1. *Monotonicità*: $rg(A) \geq n + 1$ se, e solamente se, esiste una infinità di sottoinsiemi di A non vuoti, a coppie disgiunti e definibili il cui rango è almeno n

2. *Definibilità*: Se f è una funzione definibile da A in B, allora per ogni intero n, l'insieme $\{b \in B \mid rg(f^{-1}(b)) = n\}$ è definibile.

3. *Additività*: se f è una funzione definibile da A in B e per ogni $b \in B$ si ha $rg(f^{-1}(b)) = n$ allora $rg(A) = rg(B) + n$

Diremo che un universo ha rango se esiste una funzione di rango con le proprietà sopra elencate. Diremo inoltre che una struttura $\mathcal{M}$ ha rango se $\mathcal{U}(M)$ è un universo con rango.

4 Rango e grado

Lemma 4.1. *Se A è un insieme interpretabile allora $rg(A) = 0$ sse A è finito.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Supponiamo che $rg(A) = 0$ e A sia infinito allora ci sarebbero un'infinità di sottoinsiemi definibili (i singoletti) di rango maggiore o uguale a zero e questo implicherebbe (per la assioma 1 della Definizione 3.2) che $rg(A) \geq 1$.
($\Leftarrow$) Supponiamo che A si finito allora se $rg(A) \geq 1$ allora per 1 nella Definizione 3.2 esisterebbero un'infinità di sottoinsiemi disgiunti in A. Contraddizione $\square$

Lemma 4.2. *rg è crescente, cioè: se $A \subseteq B$ sono definibili allora $rg(A) \leq rg(B)$.*

Dimostrazione. Se A è finito allora per il Lemma 4.1 $rg(A) = 0$ è quindi abbiamo quanto voluto. Supponiamo allora che A sia infinito e dunque ha rango uguale ad un certo $n+1$. Per l'assioma 1 della Esempio 3.2 questo significa che esistono infiniti sottoinsiemi di A definibili, a due a due disgiunti, di rango n. Ma essi sono sottoinsiemi di B e quindi ancora per lo stesso assioma $rg(B) \geq 1$, quanto voluto. □

Definizione 4.3. Siano $A \subseteq B$ definibili, diremo che A è generico in B se $rg(A) = rg(B)$

Lemma 4.4. *Siano A, B definibili, allora $rg(A \cup B) = max\{rg(A), rg(B)\}$.*

Dimostrazione. Sia $C = A \cup B$. Per il Lemma 4.2 abbiamo che $rg(A), rg(B) \leq rg(C)$ e dunque $max\{rg(A), rg(B)\} \leq rg(C)$.
Per l'altra disuguaglianza procediamo per induzione sul rango di C. Il passo per $n = 0$ è banale poiché implica che C è finito e allora abbiamo $rg(A) = rg(B) = rg(C)$. Supponiamo allora che C sia di rango uguale ad $n + 1$ per qualche n, esisteranno infiniti C_i tutti di rango uguale ad n e contenuti in C. Poniamo $A_i = A \cap C_i$ e $B_i = B \cap C_i$. Abbiamo allora che per ogni i, $C_i = A_i \cup B_i$ e per ipotesi induttiva $rg(C_i) = max\{rg(A_i), rg(B_i)\}$. Dunque abbiamo che o $rg(A_i) = n$ o $rg(B_i) = n$ ma questo significa che o $rg(A) \geq n+1$ o $rg(B) \geq n+1$. Ricordando infine che $A, B \subseteq C$ si ha che o $rg(A) = n + 1$ o $rg(B) = n + 1$ il che prova quanto voluto. □

Definizione 4.5. Grado: Sia A definibile non vuoto.

- Diremo che A ha grado 1 se per ogni sottoinisieme B, B o il suo complementare non è generico. Più precisamente: $\forall B \subseteq A \Rightarrow (rg(B) < rg(A) \vee rg(\bar{B}) < rg(A))$

- Diremo che A ha grado n se esiste una partizione di A in sottoinsiemi A_i tutti definibili, generici e di grado 1.

Lemma 4.6. *Se A ha grado allora è unico.*

Dimostrazione. Se A è finito allora il suo grado è dato dalla sua cardinalità. Supponiamo che $rg(A) = n$ e che A abbia due gradi d, e. Per definizione questo vuol dire che $A = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_d$ e $A = B_1 \sqcup ... \sqcup B_e$ con A_i, B_i generici e di grado 1. I B_i inducono una partizione su ogni A_i, cioè per ogni i abbimamo $A_i = (A_i \cap B_1) \sqcup ... \sqcup (A_i \cap B_e)$. Ma gli A_i sono di grado 1 quindi può esistere un solo k tale che $rg(A_i \cap B_k) = n$ e questo prova che $e \leq d$. Per la disuguaglianza inversa il ragionamento è simmetrico. □

Corollario 4.7. *Se A, B sono dello stesso rango ed hanno grado, allora* $\deg(A \sqcup B) = deg(A) + deg(B)$

Dimostrazione. Discende semplicemente dalla definizione di grado □

Lemma 4.8. *Tutti gli insiemi definibili non vuoti hanno un grado.*

Dimostrazione. Supponiamo che $rg(A) = n$ e che non abbia grado. In particolare A non è di grado 1, quindi lo si può partizionare in due insiemi generici. Almeno uno di questi due sottoinsiemi non ha grado, altrimenti per il corollario precedente anche A avrebbe grado. Ma ora possiamo ripetere il procedimento su questo insieme privo di grado e di rango n ottenendo il medesimo risultato. Notiamo che ad ogni passo lasciamo un insieme di rango n disgiunto da tutti gli altri (quello non preso in considerazione). Riproducendo questa costruzione infinite volte creeremmo un'infinità di insiemi di rango n definibili a due a due disgiunti e ciò porta ad una contraddizione poichè implica che il grado di A si maggiore o uguale ad $n+1$ $\square$

Lemma 4.9. *Siano A, B definibili, con $rg(A) > rg(B)$ allora $deg(A \cup B) = deg(A)$*

Dimostrazione. Sia $rg(A) = r$ e $deg(A) = d$. Se, per assurdo $deg(A \cup B) > deg(A)$ allora esisterebbero almeno $d+1$ diversi C_i di rango r tali che $A \cup B \subset C_1 \sqcup ... \sqcup C_{d+1}$. Ma allora esiste k tale che $rg(A \cap C_k) < rg(A)$, e quindi $rg(B \cap C_k) = r$. Contraddizione. $\square$

Lemma 4.10. *Siano $A \subseteq B$ definibili, con A generico in B allora $deg(A) \leq deg(B)$.*

Dimostrazione. Dividiamo la prova in due casi:
$\bar{A}$ è generico. Questo per il Corollario 4.7 implica che $deg(A \sqcup \bar{A}) = deg(B) = max\{deg(A), deg(\bar{A})\}$
$\bar{A}$ non è generico. Dunque $rg(\bar{A}) < rg(B) = rg(A)$. e per il Lemma 4.9 si ha $deg(B) = deg(A \cup \bar{A}) = deg(A)$ $\square$

Lemma 4.11. *Se $f : A \to B$ è una biezione definibile allora $rg(A) = rg(B)$ e $deg(A) = deg(B)$*

Dimostrazione. Per induzione sul rango di A. Il paso 0 implica A finito ed è banale. Sia $rg(A) = n+1$ allora esistono infiniti $A_i \subseteq A$, disgiunti e di rango n, e quindi in B esistono infiniti $B_i = f(A_i)$ disgiunti e per ipotesi induttiva di rango n. Quindi $rg(B) \leq n+1$. Ma in effetti $rg(B) = n+1$ altrimenti invertendo A e B avremmo che $rg(A) > n+1$. Sia ora il rango di A e B uguale ad r, se $deg(A) = n$ allora $A = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n$ dove gli A_i hanno tutti rango r e sono disgiunti e quindi $B = f(A_1) \sqcup ... \sqcup f(A_n)$ dove tutti gli $f(A_i$ sono disgiunti e di rango r per quanto sopra. Ne segue che $deg(B) = n$. $\square$

Lemma 4.12. $rg(A \times B) = rg(A) + rg(B)$

Dimostrazione. Per ogni $a \in A$ l'insieme $\pi^{-1}(a) = \{(a, b) \mid b \in B\}$ e in biezione definibile con B, in particolare il suo rango è quello di B. Ora per l'assioma 3 della Definizione 3.2 prendendo $A \times B$ come insieme di partenza per la biezione, A come insieme di arrivo e $rg(B)$ come il rango delle fibre si ha $rg(A \times B) = rg(A) + rg(B)$ $\square$

Lemma 4.13. *Sia $C \subseteq A \times B$ con A, B, C definibili. Supponiamo che $\forall b \in B \;\; A(b) = \{a \in A \mid (a, b) \in C\}$ abbiano tutti lo stesso rango r. Allora $rg(C) = rg(B) + r$*

Dimostrazione. $A(b) = \pi_A(\pi^{-1}(b) \cap C)$, dunque è definibile. $\forall b \in B \;\; \pi_B^{-1}(b) = A(b) \times \{b\}$. Quindi $\pi^{-1}(b)$ è in biezione definibile con $A(b)$ dunque $rg(\pi^{-1}(b)) = r$ e per l'assioma 3 $rg(C) = rg(B) + r$ $\square$

Teorema 4.14. *Siano A, B, C definibili, $C \subseteq A \times B$, allora sono equivalenti:*

1. *C è generico in $A \times B$*
2. *$\{a \in A \mid rg(\pi^{-1}(a)) = rg(B)\}$ è generico in A*
3. *$\{b \in B \mid rg(\pi^{-1}(b)) = rg(A)\}$ è generico in B*

Dimostrazione. •

$2 \Rightarrow 1$ Sia $X_A = \{a \in A \mid rg(\pi^{-1}(a) \cap C) = rg(B)\}$ e supponiamo che sia generico. Allora l'additività del rango più la monotonicità implicano che $rg(C) = rg(A) + rg(B)$.

$1 \Rightarrow 2$ Supponiamo che C sia generico in $A \times B$. Proiettiamo C su A e osserviamone il rango. Per la definibilità del rango (Assioma 2 della definizione) l'insieme delle proiezioni che hanno fibre di rango dato sono definibili. $A = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_{rg(B)}$ dove $A_i = \{a \in A \mid rg(\pi_A^{-1}(a) \cap C) = i\}$. Poniamo $C_i = \pi^{-1}(A_i) \cap C$ allora $rg(C_i) = rg(A_i) + i \leq rg(A) + rg(B)$. Ma $C = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_{rg(B)}$ e poiché C è generico per ipotesi per il lemma Lemma 4.4, almeno uno degli C_i deve essere generico in $A \times B$. Poiché $rg(C_i) = rg(A_i) + i$ la sola possibilità è che $rg(A_i) = rg(A)$ e $i = rg(B)$. □

Lemma 4.15. *Se A, B sono definibili, allora $deg(A \times B) = deg(A) \cdot deg(B)$*

Dimostrazione. Sia $deg(A) = m$ e $deg(B) = n$ allora $A = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_m$ e $B = B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_n$ dove tutti gli A_i, B_i sono generici. Ma allora $A \times B = A_i \times B_i \sqcup .... \sqcup A_i \times B_i$ dove tutti gli $A_i \times B_i$ sono generici in $A \times B$. □

Lemma 4.16. *Sia A definibile ed infinito. Allora non esiste un ordine totale definibile in A*

Dimostrazione. Senza perdere di generalità si supponga $deg(A) = 1$ e si supponga il contrario. Esiste dunque una formula del primo ordine che esprime in A un ordine lineare. Grazie ad essa partizioniamo A^2 in tre insiemi definibili: $D = \{(a, b) \mid a = b\}, U = \{(a, b) \mid a < b\}, V = \{(a, b) \mid a > b\}$. Si noti che $rg(A^2) = 2rg(A) > rg(A)$ poiché A è infinito e $rg(D) = rg(A)$. Ma $rg(A^2) = max\{rg(U), rg(V), rg(D)\} = max\{rg(U), rg(V)\}$ e $rg(U) = rg(V)$ Ma ciò è in contraddizione con $deg(A) = 1$. □

5 Convessità

Lemma 5.1. *Sia G un gruppo di Rango di Morley finito (rMf), $H \leq G$ definibile. Allora valgono le seguenti:*

- *$[G : H]$ è infinito sse $rg(H) < rg(G)$*
- *Se $[G : H]$ è finito, allora $deg(G) = [G : H]deg(H)$*
- *$H = G$ sse $deg(H) = deg(G)$ e $rg(H) = rg(G)$*

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che ogni coset è in biezione definibile con H e quindi anno tutti lo stesso rango. Per il primo punto supponiamo che sia $[G : H]$ infinito. Per l'assioma 1 della Definizione 3.2 questo implica che $rg(G) \geq rg(H) + 1$.

Per l'altra direzione sia $rg(H) < rg(G)$ e supponiamo per assurdo che $[G : H] = n$. Allora $G = H \sqcup g_1 H \sqcup ... \sqcup g_n H$ e utilizzando il Lemma 4.4 abbiamo che $rg(G) = max\{rg(H), ..., rg(g_n H)\}$. Assurdo.
Per il secondo punto utiliziamo il Corollario 4.7 che ci da: $rg(G) = ndeg(H)$ con $n = [G : H]$.
Infine per il terzo punto basta mostrare l'implicazione da destra verso sinistra. Quindi supponiamo $rg(H) = rg(G)$, per il primo punto questo implica che $[G : H]$ sia finito, ma per secondo punto questo deve essere perforza uguale ad 1. □

Definizione 5.2. Dato un gruppo G ed un suo sottogruppo H si dice normalizzatore di H in G il sottogruppo

$$N_G(H) = \{g \in G \mid H^g = G\}$$

Nota. Sia G rMf, $H \leq G$ definibile. Allora si ha che $g \in N_G(H)$ sse $H^g \leq H$ sse $H \leq H^g$

Dimostrazione. Mostriamo solo una delle implicazione, per l'altra il ragionamento è identico. Supponiamo $H^g \leq H$, notiamo che $f : h \mapsto h^g$ è una funzione definibile quindi $rg(H) = rg(H^g)$ e $deg(H) = deg(H^g)$ ma per il lemma appena dimostrato questo implica $H = H^g$ □

Definizione 5.3. [Condizione della Catena Discendente] si dice che un gruppo G soddisfa la Condizione della Catena Discendente (CCD), se per ogni famiglia di sottogruppi definibili $(H_i)_{i \in I}$ tali che I sia un insieme numerabile di indici totalmente ordinato e che $\forall i, j((i \leq j) \rightarrow H_j \leq H_i)$. Esiste i_0 tale che dopo i_0 la catena è stazionaria.

Lemma 5.4. *Se un gruppo ha rMf allora ha la CCD.*

Dimostrazione. Per il Lemma 4.2 la funzione rg è monotona, dunque $(rg(H_i))_{i \in I}$ è decrescente esisterà quindi un i_1 dopo il quale tutti gli H_i con $i \geq i_1$ avranno rango uguale. A questo punto possiamo utilizzare il Lemma 4.10 per trovare un $i_0 \geq i_1$ per il quale tutti gli H_i con $i \geq i_0$ hanno lo stesso grado e quindi per il Lemma 5.1 tutti gli H_i con $i \geq i_0$ saranno uguali tra loro. □

Corollario 5.5. *Se $(H_i)_{i \in I}$ è una famiglia numerabile di sottogruppi di G (I no necessariamente ordinato). Allora esiste $J \subseteq I$ finito, tale che $\bigcap_{i \in I} H_i = \bigcap_{j \in J} H_j$. in particolare $\bigcap_{i \in I}(H_i)$ è definibile.*

Dimostrazione. supponiamo che non sia vero, allora è possibile costruire una catena infinitamente discendente di sottogruppi $K_n = H_0 \cap ... \cap H_n$ □

Definizione 5.6. Dato un gruppo G ed un suo sottoinsieme X si dice centralizzatore di X in G il sottogruppo

$$C_G(X) = \{h \in G \mid h^{-1} x h = x \; \forall x \in X\}$$

Corollario 5.7. *Sia $X \subseteq G$, con X non necessariamente definibile, allora $C_G(X)$ è definibile.*

Dimostrazione. Il centralizzante di un elemento è sempre finito. In particolare $C_G(X) = \bigcap_{x \in X} C_G(x)$. E siccome questa intersezione può essere presa finita, $C_G(X)$ è definibile. □

Definizione 5.8. Sia G rMf. Definiamo l'insieme G^0 come l'intersezione di tutti i sottogruppi definibili e di indice finito in G. Chiameremo G^0 la componente connessa di G.

Lemma 5.9. *G^0 è definibile.*

Dimostrazione. Dato che è l'intersezione di gruppi definibili. □

Lemma 5.10. *(Valido in generale) Se $H, L \leq G$ e $H.L$ sono di indice finito, allora $H \cap L$ è di indice finito*

Dimostrazione. Si ha che $G = H \sqcup h_1 H \sqcup ... \sqcup h_n H$ e $G = L \sqcup l_1 L \sqcup ... \sqcup l_n L$. Supponiamo per semplicità $\{h_1, ..., h_n\} \subseteq L$. Allora $L = (H \cap L) \sqcup h_1(H \cap L) \sqcup ... \sqcup h_n(H \cap L)$ e quindi

$$G = [(H \cap L) \sqcup h_1(H \cap L) \sqcup ... \sqcup h_n(H \cap L)] \sqcup \quad (1)$$
$$l_1[(H \cap L) \sqcup h_1(H \cap L) \sqcup ... \sqcup h_n(H \cap L)] \sqcup \quad (2)$$
$$... \sqcup l_n[(H \cap L) \sqcup h_1(H \cap L) \sqcup ... \sqcup h_n(H \cap L)] \quad (3)$$

□

Corollario 5.11.
1. *$[G : G^0]$ è finito.*
2. *$G^0 \trianglelefteq G$.*
3. *G^0 è generico in G*
4. *$deg(G) = [G : G^0] deg(G^0)$.*

Dimostrazione. Il punto 1 vale per il Lemma 5.10. Per il punto 2 si noti che $G^0 \cap gG^0 g^{-1} = G^0$, e dal fatto che essi sono in biezione definibile deriva $gG^0 g^{-1} = G^0$. Il punto 3 vale per il Lemma 5.1 più il punto 1. Infine il punto 4 discende direttamente dal Lemma 5.1 □

Definizione 5.12. Un gruppo si dice connesso se è uguale alla sua componente connessa.

Nota. G^0 è il più piccolo sottogruppo generico definibile.
Ne deriva che se G è finito $G^0 = \{1\}$

Dimostrazione. G^0 è l'intersezione di tutti i sottogruppi generici in G quindi è il più piccolo. Nel caso in cui G è finito $rg(G) = 0$ e quindi G^0 è il più piccolo sottogruppo di rango 0, cioè $\{1\}$ □

Nota. Se $deg(G) = 1$ allora G è connesso.

Dimostrazione. Supponiamo che G non sia connesso, allora esiste $H \leq G$ con $rg(H) = rg(G)$ ma per il Lemma 5.1 avremmo $deg(G) = [G : H] deg(H)$ □

Definizione 5.13. Sia G rMf e supponiamo che agisca in manier definibile su un insieme X. Sia $Y \subseteq X$ definibile. Allora lo stabilizzatore di Y è:

$$Stab(Y) = \{g \in G \mid rg(gY \Delta Y) \leq rg(Y)\}$$

Nota. Se $deg(Y) = 1$ allora $Stab(Y) = \{g \in G \mid rg(gY\Delta Y) = rg(Y)\}$. Infatti $rg(Y \cup gY) = rg(gY)$ poiché sono in biezione. Quindi $rg(gY\Delta Y) < rg(Y)$, il che implica che $rg(gY \cap Y) = rg(Y)$. In più se $deg(Y) = 1$ allora $rg(gY \cap Y) = rg(Y\Delta Y) < rg(Y)$.

Lemma 5.14. *$Stab(Y)$ è un sottogruppo definibile di G. Se Y è generico in G allora $Stab(Y)$ è di indice finito finito su G*

Dimostrazione. Siano $g, h \in Stab(Y)$, questo vuol dire che $rg(gY\Delta Y) < rg(Y)$ e $rg(hY\Delta Y) < rg(Y)$. Ma per le prorpietà elementari degli insiemi $B\Delta C = (A\Delta B)\Delta(A\Delta C)$. e quindi $rg(gY\Delta hY) < rg(Y)$ ma $rg(gY\Delta hY) = rg(h^{-1}gY\Delta Y)$.
Per vedere che è definibile, si consideri che

$$Stab(Y) = \bigsqcup_{i=0}^{rg(Y)-1} \{g \in G \mid rg(gY\Delta y) = i\}$$

E ognuno di questi insiemi può essere visto come il sottoinsieme di π_G degli elementi con fibra di rango uguale ad i.
Per la seconda parte si consideri una partizione di Y in sottoinsiemi generici di grado 1: $Y = Y_1 \sqcup \ldots \sqcup Y_{deg(Y)}$. Se ogni $Stab(Y_i)$ ha indice finito in G allora per il Lemma Lemma 5.10 $\bigcap_{i=1}^{deg(Y)} Stab(Y_i)$ ha anche indice finito, rimpiazzando, quindi Y con Y_1 possiamo supporre $deg(Y) = 1$
Sia $m = rg(Y) = rg(X)$ e $d = deg(X)$. Dunque $X = X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_d$. Sia $G_i = \{g \in G \mid rg(gX_1 \cap X_i = n)\} = \{g \in G \mid rg(gX_i\Delta X_i < n)\}$. Quindi $G = G_1 \sqcup \ldots \sqcup G_d$ e $Stab(X_i) = Stab(Y) = G_1$.
Per far vedere che G_i sono coset prendiamo $g, h \in G_i$ allora $rg(gX_1 \cap X_i) = n$ sse $rg(gX_1\Delta X_i) < n$ e $rg(hX_1 \cap X_i) = n$ sse $rg(hX_1\Delta X_i) < n$. Il che implica che $rg(gX_1\Delta hX_1) < n$ e quindi $rg(h^{-1}gX_1\Delta X_1) < n$, e cioè $h^{-1}g \in Stab(X_1)$ da cui $G_i = hStab(X_1)$, quanto voluto. □

Teorema 5.15 (Cherlin 79)**.** *$deg(G) = 1$ sse G è connesso*

Dimostrazione. Per la prima implicazione si veda la nota sopra, per l'altra si supponga G connesso, fissiamo $n = rg(G)$ e $d = deg(G)$ e supponiamo per assurdo che $d > 1$. Per semplicità supponiamo $d = 2$, questo vuol dire che esistono A, B disgiunti, generici in G di grado 1.
G agisce su se stesso per moltiplicazione a sinistra, dunque per il lemma precedente, $Stab(A), Stab(B)$ sono due sottogruppi definibili di indice finito. Ma G è connesso, dunque $G = Stab(A) = Stab(B)$.
Siano allora $U = \{(a, b) \in A \times B \mid ab \in A\}$ e $V = \{(a, b) \in A \times B \mid ab \in B\}$. Chiaramente $U \cap V = \emptyset$, in più $\sqcup_{a\in A}\{a\} \times \{a^{-1}B \cap B\} \subseteq V$. Ma $a^{-1} \in G = Stab(B)$ implica che $rg(a^{-1}B \cap B) = n$ ed allora per la additività del rango avremmo $rg(V) \geq 2n$ come anche $rg(U) \geq 2n$ per motivi simili e dunque $deg(A \times B) > 1$ □

Corollario 5.16. *Sia G rMf, connesso allora se A, B sono generici in G si ha che $G = AB$*

Dimostrazione. Sia $g \in G$. Dato che $deg(G) = 1$ si ha che $gB^{-1} \cap A$ è generico ed essendo infinito esiste $a \in gB^{-1} \cap A$, da cui $a = gb^{-1}$ e quindi $g = ab$ □

Nota. Se G non è connesso il corollario non vale infatti prendendo $A = B = G^0$ si ha che $G^0G^0 < G$

Lemma 5.17. *Se G rMf connesso, agisce su un insieme X finito, allora G fissa X punto per punto*

Dimostrazione. Prendiamo un $x \in X$ e sia F_x l'insieme degli elementi di G che fissano x. $orb(x) \subseteq X$ ed è dunque finita. Ma $orb(x)$ è in biezione con G/F_x, ed F_x è un sottogruppo di indice finito di G, ma G è connesso, dunque $G = F_x$ □

Corollario 5.18. *Se G è connesso, $X \leq G$ finito, normale. Allora $X \subseteq Z(G)$*

Dimostrazione. G agisce su X come coniugio. Quindi G fissa X punto per punto, cioè $\forall g \in G \forall x \in X(x^g = x)$ il che implica proprio $X \subseteq Z(G)$ (c'è proprio bisogno che X sia normale?) □

Esercizio 5.19. *G rMf divisibile (cioè $\forall n \geq 1 \forall g \in G \exists h \in G(g = h^n)$), allora G è connesso.*

Suggerimento: Per dimostrare che se G è rMf divisibile allora è connesso si consideri che, chiamando $\bar{G} = G/H$, se in G vale che $\forall n \in N \exists y(x = y^n)$ allora vale anche in $\bar{G}$. In seguito basta mostrare che G/G^0 è divisibile e finito, e quindi banale.

6 Campi di rango di Morley finito

Lemma 6.1. *Se $H \leq G$ connesso allora $H \leq G^0$*

Dimostrazione. Se H non fosse un sottogruppo di G^0 allora $H/H \cap G^0$ sarebbe un gruppo finito non banale. □

Lemma 6.2. *Sia $\mathcal{K} = \langle K, +, \cdot, 0, 1, ...\rangle$ un campo, allora $\mathcal{K}^+ = \langle K^+, +, 0\rangle$ è connesso*

Dimostrazione. Preso $a \in K - \{0\}$ esso genera una automorfismo additivo definibile, $x \mapsto ax$. Si noti che $(K^+)^0$ e $a(K^+)^0$ sono due sottogruppi generici di (K^+), quindi $a(K^+)^0 \leq (K^+)^0$, ma $(K^+)^0$ è connesso e di grado 1, quindi $a(K^+)^0 = (K^+)^0$, quindi $(K^+)^0$ è un ideale sinistro, ma $1 \in (K^+)^0$, dunque $\forall k \in K^+(k \in (K^+)^0)$ ed è quindi uguale a (K^+) □

Lemma 6.3. *Sia $\mathcal{K} = \langle K, +, \cdot, 0, 1, ...\rangle$ un campo, allora $\mathcal{K} - \{0\} = \langle K - \{0\}, \cdot, 1\rangle$ è connesso*

Dimostrazione. Per il lemma Lemma 6.1 più il 5.15 si ha che $deg(K^+) = 1$ il che implica che $deg(K - \{0\}) = 1$ il che implica che $\mathcal{K} - \{0\} = \langle K - \{0\}, \cdot, 1\rangle$ è connesso. □

Lemma 6.4. *Per ogni $a \in K$ e per ogni $n \geq 1$ l'equazione $(x^n = a)$ ha una soluzione in K*

Dimostrazione. Si consideri la funzione $\Psi_n : K^\times \to K^\times$ che manda $x \mapsto x^n$. Questa è un automorfismo moltiplicativo definibile ed il suo kernel è finito poichè l'equazione $x^n = 1$ ha un numero finito di soluzioni. Quindi $K^\times/Ker(\Psi_n) \simeq Im(\Psi_n)$ e quinidi $rg(Im(\Psi_n)) = rg(K^\times)$. Da cui si ha che $Im(\Psi_n)$ è generico e siccome K è connesso si ha $Im(\Psi_n) = K$ □

Lemma 6.5. *Supponiamo* $car(K) = p > 0$ *primo. Allora* $\forall a, b \in K$ $x^p + a^x + b = 0$ *ha una soluzione*

Dimostrazione. Il ragionamento è uguale a quello della dimostrazione precedente □

Teorema 6.6 (Macintyre)**.** *Ogni campo infinito di rango di Morley finito è un campo algebricamente chiuso*

Dimostrazione. Bastano i lemmi precedenti ed un po' di teoria di Galois □

7 Indecomponibili

si noti che se G è un gruppo, e $X \subseteq G$ è definibile, non è detto che lo sia anche il sottogruppo generato da X: $< X >= \{x_1 ... x_n \mid \forall n \in N \text{ e } x_1, ..., x_n \in X\}$, dato che n è arbitrariamente grande.

Definizione 7.1. Sia G un gruppo rMf, $Q \leq G$ e $X \subseteq G$ definibili e $1 \in X$. Diciamo che X è Q-indecomponibile se $\mid XQ/X \mid= 1$ o infinito
In generale diremo che $X \subseteq G$ è indecomponibile se è Q-indecomponibile per tutti i sottogruppi definibili Q.

Lemma 7.2. *Se* $X, Y \subseteq G$ *sono indecomponibili, allora il prodotto* XY *è indecomponibile.*

Dimostrazione. Evidentemente anche XY contiene l'unità. Prendiamo un $Q \leq G$ definibile e supponiamo $\mid XYQ/XY \mid> 1$, e mostriamo che allora è infinito. Dunque abbiamo che esiste $xy \in G/Q$, ma Q è un sottogruppo, quindi o $x \notin Q$ o $y \notin Q$, ma X ed Y sono indecomponibili, dunque XQ/Q o YQ/Q è infinito, il che implica che XYQ/Q sia anch'esso infinito. □

Lemma 7.3. $rg(A) > n+1$ *se, e soltanto se,* A *contiene un infinità di insiemi* A_i *tali che* $rg(A_i) \geq n$ *e* $rg(A_i \cap A_j) < n$ *per tutti i* $j \neq i$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Per l'assioma 1 (con la convenzione che $rg(\emptyset) = -1$)

$\Leftarrow$ Supponiamo di avere degli A_i come nell'enunciato, definiamo allora B_i come segue: $B_0 = A_0$, $B_{n+1} = A_{i+1} - (A_{i+1} \cap (A_0 \cup A_{i+n}) \cap ... \cap (A_0 \cup ... \cup A_{i+1}$. Per il Lemma 4.4 sia ha che $rg(B_i) = rg(A_i)$ per ogni i e i B_i sono a due a due disgiunti, ricadendo così nelle ipotesi dell'assioma 1.

□

Teorema 7.4. *Sia* G *di rMf,* $(X_i)_{i \in I}$ *una famiglia di sottoinsiemi indecomponibili. Allora il sottogruppo generato da tale famiglia è definibile e connesso. In più, chiamando* $H =< X_i \mid i \in I >$*, esistono* $i_1, ..., i_m$ *tali che* $m \leq rg(H)$ *e* $H = X_{i_1} ... X_{i_m}$.

Dimostrazione. Dato che $rg(G)$ è finito, esiste un $m \in N$ tale che $rg(X_{i_1} ... X_{i_m})$ sia massimale. Chiamiamo $B = X_{i_1} ... X_{i_m}$, B è definibile (si potrebbe prendere m minore uguale al rango di tutti i sottogruppi definibili contenenti B). Sia $B_1 \subseteq B$ generico in B di grado 1 e prendiamo $H = Stab(B_1)$ per l'azione di G su lui stesso per moltiplicazione a sinistra. Si ha che H è un sottogruppo definibile (si veda lemma Lemma 5.14). Mostreremo che H è esattamente il sottogruppo generato dagli X_i.

Lemma 7.5. $\forall i \in I \; X_i \subseteq H$

Dimostrazione. Supponiamo che esista un $X_i \nsubseteq H$ per qualche $i \in I$. Dato che X_i è indecomponibile esso incontrerà un infinità di classi di equivalenza di H. Cioè $\mid X_iH/H \mid$ è inifinito e ciò implica che esistano $(x_j)_{j\in J} \in X_i$ con J infinito tali che $x_jH \neq x_{j'}H$ con $j \neq j'$, ma ciò implica che $x_{j'}x_j \notin H = Stab(B_1)$, cioè $rg(x_{j'}^{-1}x_jB_1\Delta B_1 = rg(B_1)$. Poiché $deg(B_1) = 1$ questo implica che $rg(x_{j'}^{-1}x_jB_1 \cap B_1) < rg(B_1)$ ossia $rg(x_jB_1 \cap x_{j'}B_1) < rg(B_1)$. Per il Lemma 7.3 $rg(\bigcup_{j\in J} x_jB_1) \geq rg(B_1) + 1 = rg(B) + 1$, e quindi $rg(X_iB_1) \geq rg(B) + 1$, contro la massimalità di $rg(B)$. ☐

Lemma 7.6. $H =< X_i \mid i \in I >$

Dimostrazione. Sia $h \in H = Stab(B_1)$, ciò implica che $rg(hB_1\Delta B_1) < rg(B_1)$, cioè $rg(hB_1 \cap B_1) = rg(B_1) = rg(B) \geq 0$ quindi hB_1 e B_1 hanno intersezione non vuota e ciò vuol dire che è possibile scrivere $h = b_1b_1^{'-1}$. Ma $B_1 \subseteq B \subseteq< X_i \mid i \in I >$. ☐

Lemma 7.7. *H è connesso.*

Dimostrazione. Per la indecomponibilità degli X_i si ha che $X_i \subseteq H^0$ e quindi si ha: $H =< X_i \mid i \in I >\leq H^0 \leq H$, che prova quanto voluto. ☐

Lemma 7.8. *B è generico in H*

Dimostrazione. Si definisca $\Phi \; : \; B \times B \to H$ tale che $(b, b_1) \mapsto bb_1^{-1}$. Analizziamo una fibra di Φ definendo una funzione tra $B \cap h_1^{-1}$ e $\Phi^{-1}(h)$ tale che mandi $b_1 \mapsto (hb_1, b_1)$. Questa è una biezione definibile, a valori in $\Phi^{-1}(h)$. Per stabilire il rango di $\Phi^{-1}(h)$ basta quindi calcolare quello di $B \cap h_1^{-1}$, si noti che: $h \in Stab(B_1)$ implica $rg(hB_1\Delta B_1) < rg(B_1)$, cioè $rg(hB_1 \cap B_1) = rg(B_1) = rg(B)$ e quindi $rg(hB\Delta B) = rg(B)$. Ora, per l'additività del rango $rg(B \times B) = rg(H) + \#(\text{fibre}) = rg(H) + rg(B)$ da cui $rg(H) = rg(B)$ e quindi $H = B^2$. ☐

Ciò conclude la dimostrazione del Teorema ☐

Lemma 7.9. *Se $H \leq_{def} G$, allora si ha: H è indecomponibile se, e soltanto se, H è connesso.*

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ Se H è indecomponibile, in particolare è anche H^0 indecomponibile e quindi $[H : H^0] = 1$ cioè quanto voluto.

$\Leftarrow$ Supponiamo che H sia connesso, prendiamo $Q \leq G$ qualsiasi e mostriamo che H è Q indecomponibile. Per il Theorem 5.15, abbiamo che $deg(H) = 1$. Si noti che $HQ/Q \sim H/H \cap Q$. Dunque se $H \cap Q < H$ non può avere indice finito e quinidi $[H : H \cap Q]$ è infinito. ☐

Corollario 7.10. *Se G è di rMf e $(H_i)_{i\in I}$ è una famiglia di sottogruppi definibili connessi, allora il sottogruppo da essi generato è definibile e connesso*

Lemma 7.11. *Sino $S \leq_{def} G$ e $X \subseteq_{def} G$ S-invariante (cioè $\forall s \in S(X^s = X)$). Se X è Q-indecomponibile per ogni Q S-invariante allora X è indecomponibile*

Dimostrazione. Sia Q qualsiasi. Supponiamo che $X \subseteq g_1Q \sqcup \cdots \sqcup g_nQ$. X è S-invariante, dunque $\forall s \in S(X \subseteq g_1^sQ^s \sqcup \cdots \sqcup g_n^sQ^s)$. Per la CCD si ha allora $P = \bigcap_{s\in S} Q^s = \bigcap_{i=1}^n Q^{s_i} \leq Q$, e quindi $X \subseteq \bigcap_{i=1}^n (g_1^{s_1}Q^{s_1} \sqcup \cdots \sqcup g_n^{s_n}Q^{s_n})$, cioè $X \subseteq \bigcup_{j=1}^k a_jP$ con $a_j \in G$. Ma P è definibile ed S-invariante e $X \subseteq a_{j_0}P$ per ipotesi. □

Lemma 7.12. *Sia $H \leq G$, definibile e connesso. Se $x \in G$, allora $x^H(= \{x^h \mid h \in H\})$ è indecomponibile.*

Dimostrazione. Per il lemma precedente è sufficiente mostrare che x^H è Q-indecomponibile per tutti i sottogruppi Q definibile H-invarianti. Sia $Q \leq G$ uno di questi, allora $x^H \subseteq g_1Q \sqcup \cdots \sqcup g_nQ$, in più possiamo suppore m minimale e $g_1 = x$. Allora abbiamo che $\forall h \in H(x^H = x^{hH} \subseteq g_1^hQ \sqcup \cdots \sqcup g_n^hQ)$ e dunque H agisce per coniugazione su $\{g_1Q, ..., g_nQ\}$ ma ciò vuol dire, per il lemma Lemma 5.17, che li fissa punto per punto. Dunque $x^H = g_1^H \subseteq g_1Q$ □

Corollario 7.13. *Se G è di rMf, $H \leq G$ è definibile e connesso e $X \subseteq G$ (non necessariamente definibile). Allora il commutatore $[H,X](=< [h,x] \mid h \in H, x \in X >)$ è un gruppo definibile e connesso.*

Dimostrazione. $[H,X]$ è generato da $x_{-H}x$ e, per il lemma precedente x_{-H} è indecomponibile, quindi anche $x_{-H}x$ è indecomponibile. A questo punto basta applicare il teorema ?? alla famiglia $(x^Hx)_{x\in X}$ □

Definizione 7.14. Dato un gruppo G il suo derivato è definito come $G' =< [h,g] \mid h, g \in G >$.

Corollario 7.15. *Se G è di rMf e connesso allora G' è un gruppo definibile e connesso.*

Dimostrazione. Per il corollario precedente, prendendo $H = X = G$ □

8 Gruppi di rango piccolo: 1

Teorema 8.1. *Sia G un gruppo infinito di rMf minimale con queste proprietà (cioè senza sottogruppi definibili infiniti propri). Allora G è abeliano.*

Dimostrazione. Sia G come nell'enunciato e supponiamo per assurdo che $Z(G) < G$, procediamo per passi:

(1) G è connesso.
Questo viene direttamente dal fatto che G^0 è un sottogruppo definibile infinito.

(2) Gli elementi di $G - Z(G)$ sono tutti coniugati tra di loro.
Siano $x_1, x_2 \in G - Z(G)$, allora i loro centralizzatori sono sottogruppi definibili e propri di G, e quindi finiti. Ma x_1^G è in biezione con $G/C_G(x_1)$ e $rg(G/C_G(x_1)) = rg(G) - rg(C_G(x_1)) = rg(G)$ e similmente per la classe si coniugio di x_2. Dunque $x_1^G \cap x_2^G \neq \emptyset$, e dato che esse sono classi di equivalenza abbiamo $x_1^G = x_2^G$

(3) Esiste un p primo, tale che tutti gli elementi di $\bar{G} = G/Z(G)$ siano di ordine p

Sia $x_1 \in \bar{G}$, ricordiamo che $C_G(x_1)$ è finito, e dunque in particolare x_1 è di ordine finito per qualche p, da cui deriva $\bar{x}_1^p = 1$. Ma per il punto (2) tutti gli elementi di $\bar{G}$ sono coniugati e dunque hanno lo stesso ordine.

(4) $p \neq 2$

Supponendo che $p = 2$ avremmo che $\bar{G}$ è abeliano di ordine 2 (in generale infatti se $g_1, g_2 \in G$ dal fatto che $(g_1g_2)^2 = 1$ si ha che $(g_1g_2) = (g_1g_2)^{-1} = (g_2^{-1}g_1^{-1}) = (g_2g_1)$). Ma in $\bar{G}$ tutti gli elementi sono coniugati, quindi $\bar{G}$ è ciclico e dunque finito, ma per ipotesi lo è anche il centro e dunque avremmo G finito.

(5) Sia $\bar{x} \in G - \{1\}$ allora $\exists \bar{y} \in \bar{G}$ tale che $\bar{x}^{\bar{y}} = \bar{x}^{-1}$

Ricordiamo che $N_G(X) = \{x \in G \mid X^g = X\}$ e $C_G = \{x \in G \mid \forall x \in X(x^g = x)\}$ Si noti innanzitutto che $< x >$ è un gruppo d'ordine p e che $< x^{-1} >$ è lo stesso gruppo. Se $\bar{y} \in N_G(< \bar{x} >)$, e dato che $p \neq 2$ si ha che $\bar{y} \in C_G(< \bar{x} >)$, e dunque $\bar{y}$ ha un immagine non banale in $N_G(< \bar{x} >)/C_G(< \bar{x} >)$, quindi in particolare $N_G(< \bar{x} >)/C_G(< \bar{x} >)$ è non banale e di ordine p. Ma a questo punto, ricordando che $< x >$ è ciclico e d'ordine p si ha $\mid Aut(< x >) \mid = p - 1$, abbiamo che $N_G(< \bar{x} >)/C_G(< \bar{x} >) \to Aut(< x >)$ in maniera iniettiva, che è un assurdo.

(6) In generale, se G è connesso e $Z(G)$ è finito si ha che $Z(G/Z(G))$ è banale.

Sia $Z_2(G)$ il sottogruppo di G tale che $Z(G/Z(G) = Z_2(G)/Z(G)$. Mostreremo che $Z_2(G) = Z(G)$. Si consideri una $\Psi : G \to Z(G)$ tale che $g \mapsto [g, z]$. Chiamiamo $\bar{G} = G/Z(G)$ e notiamo che se $\bar{z} \in Z(\bar{G})$ allora per ogni $g \in G$ si ha $[\bar{g}, \bar{z}] = 1$ implica $[g, z] \in Z(G)$. Infatti, in generale:

$$\begin{aligned}
[g_1g_2, z] &= (g_1g_2)^{-1}z^{-1}(g_1g_2)z \\
&= (g_2^{-1}g_1^{-1})z^{-1}(g_1g_2)z \\
&= g_2^{-1}(g_1^{-1}z^{-1}g_1z)g_2(g_2^{-1}z^{-1}g_2z) \\
&= g_2^{-1}[g_1, z]g_2[g_2, z] \\
&= [g_1, z]^{g_2}[g_2, z]
\end{aligned}$$

Nel nostro caso $[g_1, z] \in Z(G)$ e dunque $[g_1g_2, z] = [g_1, z][g_2, z]$. In piu Ψ è un automorfismo definibile a valori in gruppo finito e per l'additività del rango si ha: $rg(Im(\Psi)) = rg(Ker(\Psi)) = rg(G)$, poiché $Im(\Psi) = G/Ker(\Psi)$. Poichè G è connesso, abbiamo inoltre che $Ker(\Psi) = G$ e dunque $\forall g \in G([g, z] = 1)$, il che implica che $z \in Z(G)$, cioè $Z_2(G) = Z_G$. Si noti che esiste una versione più forte di quanto dimostrato, e cioè: se G è connesso, non banale allora $\forall x \in C_G^0(x) \neq 1$

□

Corollario 8.2. *Se G è infinito di rMf allora contiene un gruppo abeliano definibile infinito.*

Dimostrazione. Prendiamo $A \leq G$ infinito, definibile, minimale con queste proprietà. Esso esiste per la CCD e per il teorema precedente è abeliano. □

Corollario 8.3. *Se G è connesso, di rango 1, allora G è abeliano.*

9 Gruppi di rango piccolo: 2

Definizione 9.1. Dato un gruppo G qualsiasi, il suo derivato è definito $G' = [G, G]$, inoltre definiamo:

$$\begin{array}{lll} G^0 = G & G^1 = G' & G^{i+1} = [G, G^i] \\ G^{(0)} = G & G^{(1)} = G' & G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}] \end{array}$$

si noti che $\forall i G^{(i)} \trianglelefteq G^i \trianglelefteq G$.
Diremo che G è nilpotente se esiste un i per il quale $G^i = 1$
Diremo che G è risolubile se esiste un i per il quale $G^{(i)} = 1$

Nota. Se G è nilpotente, allora $G^i/G^{i+1} \leq Z(G/G^{i+1})$
Se G è risolubile, allora G^i/G^{i+1} è abeliano

Definizione 9.2. Se G è di rMf diremo che un sottogruppo definibile è di Borel se è risolubile, connesso e massimale con queste proprietà.
Se G è infinito tale sottogruppo esiste sempre per il Corollario 8.2

Definizione 9.3. Sia G di rMf, e $X \subseteq G$ qualsiasi. Definiamo la chiusura definibile di X, l'insieme

$$d(X) = \bigcap_{X \subseteq_{def} H} H$$

Dunque $d(X)$ è il più piccolo insieme definibile contenente X

Nota. Se gli elementi di X commutano abbiamo che $X \subseteq Z(C_G(X))$ e $Z(C_G(X))$ è definibile quindi $d(X)$ è contenuto nel centro ed è abeliano.

Teorema 9.4 (Cherlin 79). *Sia G connesso, rg(G)=2. Allora G è risolubile.*

Dimostrazione. Supponiamo G non risolubile e procediamo per passi.

(1) G non ha sottogruppi definibili normali di rango.
Altrimenti avremmo che $A^0 \trianglelefteq G$ e quindi per il Corollario 8.3 A^0 sarebbe abeliano, ma allora, dato anche G/A^0 sarebbe abeliano il che implica che $G' \leq A^0$ e $(G')' = 1$[1]. Assurdo.

(2) $Z(G)$ e $G/Z(G)$ sono semplici.
$Z(G) \trianglelefteq G$ e per il punto (1) è finito. Sia $\bar{G} = G/Z(G)$. $\bar{G}$ ha rango 2 ed è connesso, e questo ci permetterà di sostituirlo a G nel seguito della prova. Facciamo vedere che è semplice, supponiamo $N \triangleleft G$ non banale. Facciamo vedere prima di tutto che possiamo limitarci a considerare N definibile, in quanto se non esistono sottogruppi normali definibili non ne esistono di nessun tipo. $[\bar{G}, \bar{N}]$ è definibile e connesso (per il corollario sul commutatore di indecomponibili) e $[\bar{G}, \bar{N}] \trianglelefteq \bar{G}$, infatti prendendo $[\bar{g}, \bar{n}]^{\bar{h}} = [\bar{g}^{\bar{h}}, \bar{n}^{\bar{h}}] \in [\bar{G}, \bar{N}]$. In più $[\bar{G}, \bar{N}] \leq \bar{N}$, infatti $[\bar{g}, \bar{n}] = \bar{g}^{-1}\bar{n}^{-1}\bar{g}\bar{n} = (\bar{n}^{-1})^{\bar{g}}\bar{n}$. Notiamo che $[\bar{G}, \bar{N}]$ non può avere rango 2 perchè è un sottogruppo proprio di $\bar{G}$, inoltre non può avere rango 1 per il punto (1). Dunque $rg([\bar{G}, \bar{N}]) = 0$, il che vuol dire che $[\bar{G}, \bar{N}]$ è connesso e finito, cioè banale e quindi

[1](Ciò deriva dal fatto che G' è per definizione il più piccolo sottogruppo K tale che G/K sia abeliano)

$[G,N] \leq Z(G)$ quindi è finito, in più $[G,N]$ è definibile e connesso per il corollario del teorema sugli indecomponibili, quindi $\bar{N} = 1$. Rimpiazzando dunque G con $\bar{G}$ possiamo supporre che il nostro gruppo sia semplice.

(3) Se B_1 e B_2 sono sottogruppi distinti allora hanno intersezione banale.
Supponiamo il contrario e cioè che esista $x \neq 1$ in $B_1 \cap B_2$. Si consideri $C_G(x)$, dato che che B_1, B_2 sono abeliani abbiamo che $B_1, B_2 \in C_G(x)$, ed anche $B_1, B_2 \in C_G^0(x)$ e quindi $C_G^0(x) < G$. Ne segue che $rg(C_G^0(x)) = 1$ e ciò implica che $C_G^0(x) = B_1 = B_2$. Assurdo.

(4) Un sottogruppo di Borel è di indice finito nel suo normalizzatore.
Supponiamo che non sia così, allora avremmo che $N_{\bar{G}}(B) = N_G(B)/B$ è infinito e per il Corollario 8.2 esisterebbe un $\bar{A} \leq N_G(B)$ abeliano.

(5) Se B è un sottogruppo di Borel di G, allora $\bigcup_{g\in G} B^g$ e generico in G
Sia $\Psi : G \times B - \{1\} \to G$ tale che $(g,b) \mapsto b^g$ e consideriamone le fibre. $b^g = b_1^{g_1}$ implica $b^{gg_1} = b_1$ e quindi $b^{gg_1^{-1}} \in B^{gg_1^{-1}} B \cap B$ e $b^{gg_1^{-1}} = 1$. Per il punto (4) abbiamo allora che $B^{gg_1^{-1}} B = B$, cioè $gg_1^{-1} \in N_G(B)$, cioè $g_1 = \gamma g$ per qualche $\gamma \in N_G(B)$ e quindi $b^1 = b^{gg_1^{-1}} = b^{gg\gamma^{-1}} = b^{\gamma^{-1}}$. In totale abbiamo che: $\Psi^{-1}(b^g) = \{(\gamma, b^{\gamma^{-1}} \mid \gamma \in N_G(B)\}$ e ciò significa che le fibre sono in biezione defnbile con $N_G(B)$, quindi $rg(\Psi^{-1}(b^g)) = rg(N_G(B))$ che per il punto (4) è proprio il rango di B. Dunque $rg(\cup_{g\in G} B^g) = rg(G \times B) - rg(\Psi^{-1}) = rg(G) + rg(B) - rg(B) = rg(G)$

(6) I sottogruppi di Borel sono tutti coniugati.
Se B_1, B_2 sono di Borel si ha che $\bigcup_{g\in G} B_1, \bigcup_{g\in G} B_2$ sono generici, ma G è connesso, dunque $(\bigcup_{g\in G} B_1) \cap (\bigcup_{g\in G} B_2) \neq 1$ e per il punto (3) questo implica che $\bigcup_{g\in G} B_1 = \bigcup_{g\in G} B_2$

(7) $\forall g \in G - \{1\}$ si ha che $C_G^0(g) \neq 1$ e $g \in N(B_g)$ dove B_g è l'unico sottogruppo di Borel che contiene $C_G^0(g)$
Se $C_G(g)$ è finito allora $x^G = G/C_G(g)$ sarà generico in G e quindi $(x^G) \cap (\bigcup_{g\in G} B^g) \neq \emptyset$. x appartiene ad una classe si coniugio di B che è abeliana, quindi $C(x) \neq 1$. Ma G è semplice e quindi $rg(C_G^0(x)) = 1$, quindi $C_G^0(x)$ è un sottogruppo di Borel e $x \in N_G(C_G^0(x))$

(8) $N_G(B) = B$
Sia $A = \{x \in G \mid x \notin C_G^0(x)\}$, mostriamo che $A = \emptyset$. Supponiamo che esista $x \in A$, allora x centralizza $C_G^0(x)$. Le classi di coniugio di $xC_G^0(x)$ sono a due a due disgiunte e dunque $< x > C_G(x)$ è abeliano (Poiché $C_G^0(x)$ è abeliano e $[C_G^0(x), x] = 1$). Dunque prendendo $z \in xC_G^0(x) \cap x^g C_G^0(x)$ si ha che $C_G(x), C_G(x^g) \leq C(z)$, cioè $CG(z) = CG(x) = CG(x^g)$ e quindi $xCG(x) = x^g CG(x)$. Quindi il rango di A è 2 e ciò implica che $A \cap (\bigcup_{g\in G} B^g) \neq \emptyset$ che vuol dire che esiste un x tale che $x \in A$ (cioè $x \notin C_G^0(x)$) e $x \in B^g$ (che vuol dire $x \in C_G^0(x)$). Ciò e assurdo è quindi A deve essere vuoto. Supponiamo ora che $a \in N_G(B) - B$. Chiamiamo $A_1 = a^G \cap N_G(B)$ e $A_2 = a^G - N_G(B)$ chiaramente $a^G = (A_1 \sqcup a_2$. Si noti che poichè G è semplice $[a_G - N_G(B)]$ non è vuoto, se infatti lo fosse avremmo che $a_G \subseteq N_G(B)$ ed allora $< a_G > \leq N_G(B) < G$ e quindi $< a^G > \lhd G$, assurdo. Notiamo che dato che $a^G \sim G/C(a)$ abbiamo $rg(a^G) = 1, deg(a^G) = 1$, e dunque o A_1 o A_2 deve essere finito.

Supponiamo che A_1 sia finito, si noti che B normalizza A_1, A_2, è connesso e centralizza A_1. Ma allora avremmo $a \in C(B), B \leq C^0(a), a \notin C^0(a)$ e $a \in A$. Assurdo. Se A_2 fosse finito il ragionamento è simile.

(9) $G = \bigcup_{g \in G} B^g$
(7)+(8)

(10) G è senza involuzioni.
Si supponga il contrario, sia $i \in B$ un involuzione e prendiamo $g \in G - B$, sia $j = i^g$ chiamiamo B_x il sottoinsieme di Borel a cui appartiene x allora abbiamo che da $ij \in B_{ij}$ deriva che $(ij)^i = (ij)^{-1} \in B_{ij} \cap (B_{ij})^i$. Ma allora $i \in N(B_{ij}) = B_{ij}$ e $j \in N(B_{ij}) = B_{ij}$ che implica che $[i, j] = 1$. Assurdo

Contraddizione finale Sia $a \in G - B$, si definisca $\Phi : B \times B \to BaB$ come $(b_1, b_2) \mapsto b_1 a b_2$. Mostriamo che la sua immagine è generica in G.
Φ è iniettiva: se $b_1 a b_2 = c_1 a c_2$ allora $(c_1^{-1} b_1)^a = c_2 b_2^{-1}$ da cui abbiano che $(c_1^{-1} b_1)^a, c_2 b_2^{-1} \in B^a \cap B = 1$ e quindi $b_1 = c_1$ e $b_2 = c_2$.
Per l'additività del rango abbiamo $rg(BaB) = rg(Im(\phi)) = rg(B \times B) = 2rg(B) = 2$. Quanto voluto.
Dimostriamo che $G = B \sqcup BaB$ (in un gruppo algebrico questo significa che esiste una decomposizione booleana). Sia $a' \in G - B$ allora, ddato che $Ba'B$ è generico abbiamo che $BaB \cap Ba'B \neq \emptyset$, dda cui $\exists b_1, b_2 \in B(a' = b_1 a b_2)$ e quindi $Ba'B = BaB$. In più $a^{-1} \in BaB$ poichè B è un sottogruppo, da cui abbiamo $a^{-1} = b_1 a b_2$, cioè $a b_1 a b_2 = 1$, che implica $b_1 = (b_1 a)^2 b_2$, da cui $(b_1 a)^2 = b_1 b_2^{-1}$.
Ma $b_1 a$ è di ordine 2 in $d(\overline{b_1 a}) = d(b_1 a / d(b_1 a) \cap B$ (si veda Definizione 9.3), il che contraddice il punto (10).

□

10 Gruppi abeliani

Definizione 10.1. Se p è primo definiamo il p-gruppo di Prüfer o p-gruppo quasiciclico il seguente: $Z_{p^\infty} = \{\lambda \in C^\times \mid \lambda^{p^n} = 1 \text{ per } n \in \mathbb{N}\}$

Teorema 10.2 (Baer I)**.** *Sia G abeliano, $D \leq G$ divisibile. Allora D ha un complemento H in G, cioè $G = D \oplus H$*

Teorema 10.3 (Baer II)**.** *Sia D un grupo abeliano divisibile, allora $D = \left[\bigoplus_{p\ primo} \bigoplus_{I_p} \mathbb{Z}_{p^\infty}\right] \oplus (\bigoplus_i \mathbb{Q})$ dove in generale I_p, I sono indici infiniti.*

sketch. Il sottogruppo delle torsioni, $Tor(D)$ è anche divisibile e quindi per il teorema precedente $D = Tor(D) \oplus H$, dove H è senza torsioni e divisibile, quindi $H = \bigoplus_i \mathbb{Q}$ □

Teorema 10.4 (Macintyre '77)**.** *Sia G un gruppo abeliano di rMf allora:*

1. *$G = D \oplus B_1$ dove D è definibile e divisibile e B_1 è di esponente limitato*
2. *$D = \bigoplus_{p\ primo} (\bigoplus_{I_p} (Z_{p^\infty})) \oplus (\bigoplus \mathbb{Q})$, dove I_p, I sono indici con ogni I_p finito*

3. *$G = DB$ dove B è di esponente limitato definibile e D e B sono caratteristici.*

Dimostrazione. 1. $D = \bigcap_{n \geq 1} G^{n!} = \bigcap_{1 \leq n \leq N} G^{n!}$ dove la seconda uguaglianza vale per la CCD. D è dunque definibile e divisibile, per il teorema di Baer I esiste B_1 tale che $G = D \oplus B_1$ e $B^{N!} = 1$

2. Per il punto (1) ed il teorema di Baer II. La sola cosa da dimostrare è che si può prendere I_p finito. Mostriamo dunque che prendendo I_p uguale a $\bigoplus_{I_p} \mathbb{Z}_{p^\infty}$ non è di ordine finito. Si consideri $D_{p^n} = \{x \in D \mid x^{p^n} = 1\}$, si noti che $D_{p^n} \leq D_{p^{n+1}}$. Si consideri $\Phi : D_{p^{n+1}} \to D_{p^n} \mid x \mapsto x^p$. Allora $Ker(\Phi) = D_{p^n}$ e $Im(\Phi) = D_p$ dove D_p è divisibile. Si noti che $D_{p^{n+1}}/D_{p^n} \sim D_p$ per un isomorfismo interpretabile. Per l'additività del rango: $rg(D_{p^{n+1}} - rg(D_{p^n}) = rg(D_p)$ da cui $rg(D_{p^{n+1}} = rg(D_p) + rg(D_{p^n})$ e cioè $rg(D_{p^n} = nrg(D_p$ il che può valere solo se $rg(D_p) = 0$ e cioè D_p finito.

3. Sia $m = exp(B_1)$, e $B = \{g \in G \mid g^m = 1\}$ (definibile). Allora $B_1 \leq B$ e dunque $G = BG$ e $D \cap B$ è finito.

□

Nota. B_1 nel teroema è interpretabile ($B_1 = G/D$) ma non necessariamente definibile. Infatti, se $D = Z_{p^\infty}$ allora $B_1 = \bigoplus_I Z_p$ con I infinito. Allora $G = DD \oplus B_1$ è di rMf, si può dimostrare che $D = G^p$ ma D non ha alcun complemento definibile in G

Definizione 10.5. Sia G un gruppo diremo che x è un p-elemento se $x^{p^n} = 1$

Lemma 10.6. *Sia G di rMf e $H \trianglelefteq G$ definibile, $x \in G$ tale che per p primo si abbia $\bar{x}$ di ordine p^n in $\bar{G} = G/H$. Allora i coset xH contengono in p-elemento*

Dimostrazione. $d(x) = d(< x >)$ è abeliano, per il Theorem 10.4 $d(< x >) \cap H = DB$
$x^{p^n} \in d(< x >) \cap H$ implica $x^{p^n} = d^{p^n} b$ con $d \in D$. Sia $x_1 = xd^{-1}$ ne viene $\bar{x}_1 = \bar{x}$ e $x_1^{p^n} = b$, ma $ord(b) = np^n$ e $pgcd(r, p^n) = 1$. Per il teorema di Bezout $\exists u, v(ur + vp^n = 1)$. Quindi x_1^u è quanto ci serve, infatti $x_1 = x_1^{ur+vp^n} = x^{ur} x^{vp^n} = x^{ur} b^v$ e quindi $\bar{x_1^{ur}} = \bar{x}_1 = \bar{x}$
$(x_1^{ur})^{p^{n+m}} = x_1^{p^n r p^m u} = (b^{rp})^{mu} = 1^u = 1$ □

Nota.

- Il teorema non è vero se il gruppo non è di rMf : $G = \mathbb{Z}, H = 2\mathbb{Z}$ allora $G/H = \mathbb{Z}_2$
- Il teorema non è vero se H non è definibile: $G = \mathbb{Q}, H = \mathbb{Z}$ allora G/H è un gruppo di torsioni

11 Classificazione dei gruppi semplici

11.1 Gruppi semplici finiti

Qui la classificazione è completa

Teorema 11.1. *Ogni gruppo semplice finito è isomorfo ad uno dei seguenti:*

- $\mathbb{Z}_p$ *gruppi ciclici (unici gruppi abeliani semplici)*
- A_n *con* $n \geq 4$ *gruppi alternanti*
- *un gruppo del tipo di Lie*
- *26 gruppi sporadici*

La classificazione si basa pesantemente sul seguente teorema

Teorema 11.2 (Feit-Thompson '63)**.** *Tutti i gruppi finiti semplici abeliani contengono una involuzione*

La dimostarzione di questo teorema consta di più di 200 pagine e si basa su una distinzione in 4 casi che vengono fuori nel considerare gruppi di caratteristica uguale a 2 o diversa e gruppi "grandi" o gruppi "piccoli" (nel senso, grosso modo, di matrici di taglia superiore o uguale, o inferiore a 4)

Congettura 11.3 (di Cherlin-Zilber)**.** *Un gruppo semplice infinito rMf è isomorfo ad un gruppo algebrico su di un corpo algebricamente chiuso.*

L'equivalente del teorema di Feit-Thompson si trova nella seguente generalizzazione dell'idea di involuzione:

Definizione 11.4. Un p-sottogruppo è un sottogruppo in cui ciascun elemento è di ordine p^n
Un p-sottogruppo di Sylow è un p-sottogruppo massimale

Congettura 11.5. *Se* G *è un gruppo semplice finito di rMf. Allora* G *ha dei 2-sottogruppi di Sylow infiniti.*

Teorema 11.6 (Borovik-Bendges-Charlin '05)**.** *Se* G *rMf in cui i 2-sottogruppi di Syolw sono finiti allora* G *è senza involuzioni.*

Definizione 11.7. Un sottogruppo di un gruppo di rMf si dice 2-nilpotente se è definibile, connesso e nilpotente. L'esempio tipico si ha prendendo K algebricamente chiuso di caratteristica 2 e considerando le matrici triangolari con 1 sulla diagonale.
Un sottogruppo si dice 2-torico se è divisibile e abeliano. L'esempio tipico si ha prendendo K algebricamente chiuso di caratteristica diversa 2 e considderando le matrici diagonali con radici 2^n-esime dell'unità sulla diagonale.

Teorema 11.8 (Borovik-Poizat '94)**.** *In un gruppo di rMf i 2-sottogruppi di Sylow sono tutti coniugati. In particolare se* S *è uno di essi, allora* $S^0 = U * T$ *dove* U *è 2-nilpotente,* T *è 2-torico e* $*$ *è un prodotto centrale (cioè* $[U,T] = 1$ *e* $U \cap T$ *è finito)*

11.2 Tipi di gruppi di rango di Morley finito

I tipi dei gruppi di rango di Morley finito sono definiti considerando T e U nella sezione precedente:

$T \downarrow, U \rightarrow$	$\neq 1$	$= 1$
$\neq 1$	*Misto*	*Dispari*
$= 1$	*Pari*	*Degeneri*

Esempio 4.
- *Sia K_1 un campo algebricamente chiuso di caratteristica 2, allora $SL_n(K_1)$ è un gruppo di tipo pari*
- *Sia K_2 un campo algebricamente chiuso di caratteristica diversa da 2, allora $SL_n(K_2)$ è un gruppo di tipo dispari*
- *$SL_n(K_1) \times SL_n(K_2)$ è un gruppo di tipo misto*

Teorema 11.9 (Atinel, Borovik, Charlin,...'04)**.** *Se G è un gruppo semplice di rMf di tipo pari, allora G è un gruppo algebrico su un campo algebricamente chiuso di caratteristica 2*

La prova è molto lunga ed esposta in un libro in corso di preparazione

Corollario 11.10. *Un gruppo semplice infinito di rMf non può essere di tipo misto*

11.3 Gruppi di tipo dispari

Definizione 11.11. Si consideri un 2-sottogruppo di Sylow S di un gruppo G. In generale $S^0 = \mathbb{Z}_{2^\infty} \times .... \times \mathbb{Z}_{2^\infty}$, il 2-rango di Prüffer è il numero di copie di $\mathbb{Z}_{2^\infty}$ che appaiono nel prodotto.

Teorema 11.12. *Un minimo controesempio di tipo dispari alla congettura di Charlin-Zilber è di 2-rango di Prüffer al massimo 2.*

11.4 Gruppi di tipo misto

Teorema 11.13 (Charlin '79)**.** *Sia G un gruppo semplice di rango di Morley 3. Allora ci sono due possibilità:*

- *G ha un sottogruppo di Borel di rango 2 e in questo caso $G \sim PSL_2(K)$, e $B = K_+ semiprod K^\times$*
- *Tutti i sottogruppi di Borel di G sono di rango 1 ed in questo caso $\forall g \in G - B(B \cap B^g = 1$ e $G = \bigcup_{g \in G} B^g$*

Definizione 11.14. Dato S un gruppo di torsione divisibile e abeliano definiamo $T = d(S)$ il toro decente.

Teorema 11.15. *Sia G di rMf, T toro decente di G. Allora $U_{g \in G} C_G^g(T)$ è generico e in più i tori decenti massimali sono tutti coniugati.*

Riferimenti bibliografici

[1] V. Borovik & A. Nesin. *Groups of Finite Morley Rank*, Oxford University Press, 1994.

[2] V. Borovik. *Brief introduction to groups of finite Morley rank*, `http://www.ma.umist.ac.uk/avb/pdf/brief.pdf`