Théorie des modèles

Frank Wagner

Leçon 1

Langage et structure

En théorie des modèles on n'analyse pas une seule structure, comme les entiers o'u les complexes, mais on prend une *classe* de structures, et on cherche à déterminer les propriétés communes des structures dans cette classe. En général, une telle classe est aussi déterminee par des propriétés, comme par exemple la classe des corps, ou la classe des groupes abéliens. Parlons donc des propriétés.

Pour exprimer une propriété, il nous faut d'abord une langage.

Définition 1.1 Un *langage* $\mathcal{L}$ est l'union (disjointe) d'un ensemble $\mathcal{C}$ de symboles de constantes, d'un ensemble $\mathcal{F}$ de symboles de fonctions, et d'un ensemble $\mathcal{R}$ de symboles de relations. A chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $R \in \mathcal{R}$ est associé un entier, l'*arité*, qui indique le nombre d'arguments.

En plus, on aura les variables, qui seront notés $x, y, z, \ldots, x_0, x_1, x_2, \ldots$.

Remarque 1.2 Une fonction d'arité 0 est une constante. Il y a deux relations d'arité 0 : la relation $\top$ qui est toujours vraie, et la relation $\perp$ qui est toujours fausse.

Exemple 1.3

1. Le langage des ordres $\mathcal{L}_{ord}$ ne contient ni constantes ni fonctions, mais deux relations binaires $=$ et $<$.
2. Le langage des groupes $\mathcal{L}_{gp}$ contient une constante 1, une fonction unaire $^{-1}$, une fonction binaire $*$, et une relation binaire $=$.
3. Le langage $\mathcal{L}_{ann}$ des anneaux contient trois fonctions binaires (d'arité deux) $+$, $-$ et $*$, une relation binaire $=$, et deux constantes 0 et 1.

On utilise ce langage pour former des mots, et des phrases.

Définition 1.4 Soit $\mathcal{L}$ un langage. La collection des *$\mathcal{L}$-termes* est défini récursivement par:

- toute constante et toute variable est un $\mathcal{L}$-terme.
- si $f \in \mathcal{F}$ est une fonction n-aire et $t_1, \ldots, t_n$ sont des $\mathcal{L}$-termes, alors $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un $\mathcal{L}$-terme.

Une *$\mathcal{L}$-formule atomique* est une expression de la forme $R(t_1, \ldots, t_n)$, où $R \in \mathcal{R}$ est une relation n-aire et $t_1, \ldots, t_n$ sont des $\mathcal{L}$-termes. La collection des *$\mathcal{L}$-formules* est défini récursivement par:

- une $\mathcal{L}$-formule atomique est une $\mathcal{L}$-formule.
- si φ et ψ sont des $\mathcal{L}$-formules, leurs *combinaisons booleennes* $(\varphi \wedge \psi)$ (*conjonction, et*), $(\varphi \vee \psi)$ (*disjonction, ou*) et $\neg\varphi$ (*négation, non*) sont des $\mathcal{L}$-formules.
- si φ est une $\mathcal{L}$-formule et x est une variable, les *quantifications* $\forall x\varphi$ (*universelle, quel que soit*) et $\exists x\varphi$ (*existentielle, il y a*) sont des $\mathcal{L}$-formules. Les occurrences de la variable x dans ces formules sont *liées* à ce quanteur $\forall$ ou $\exists$ (sauf si elles sont déjà liées à un quanteur dans φ). Une variable qui n'est pas liée est *libre*.

Un *énoncé*, ou une *formule close*, est une formule sans variable libre; une formule *positive* est une formule sans négation.

Exemple 1.5

1. Les seuls termes de $\mathcal{L}_{ord}$ sont les variables; les $\mathcal{L}_{ord}$-formules atomiques sont les égalités et les inégalités.
2. Parmi les termes de $\mathcal{L}_{gp}$ sont les produits des variables et leurs inverses (le produit vide étant égale à 1); en effet, modulo les lois de groupe chaque terme est équivalent à un tel produit. Donc les $\mathcal{L}_{gp}$-formules atomiques sont les équations.
3. Parmi les termes de $\mathcal{L}_{ann}$ sont les polynômes (en plusieurs variables) à coefficients dans $\mathbb{Z}$, où l'entier n est une abbréviation pour $1 + \ldots + 1$ (somme de n fois 1), et x^n dénote $x * \cdots * x$ (produit de n fois x); dans un anneau commutatif tout terme est équivalent à un tel polynôme. Donc, dans un anneau commutatif, les $\mathcal{L}_{ann}$-formules atomiques sont les sont les équations polynômiales.

Lemme 1.6 [Lecture unique]

1. *Soit t un $\mathcal{L}$-terme. Alors soit t est une constante ou une variable (uniquement déterminée), soit il y a une fonction f d'arité n, et des $\mathcal{L}$-termes $t_n, \ldots, t_n$, uniquement déterminés, tels que t est $f(t_1, \ldots, t_n)$.*

2. *Soit φ une $\mathcal{L}$-formule. Alors soit φ est atomique et il y a une relation R d'arité n, et des $\mathcal{L}$-termes $t_n, \ldots, t_n$, uniquement déterminés, tels que φ est $R(t_1, \ldots, t_n)$, soit φ tombe dans un (et un seul) des cas suivants:*

   (a) Il y a une formule ψ uniquement déterminée telle que φ est $\neg\psi$.

   (b) Il y a deux formules ψ_1 et ψ_2 uniquement déterminées telles que φ est $(\psi_1 \wedge \psi_2)$.

   (c) Il y a deux formules ψ_1 et ψ_2 uniquement déterminées telles que φ est $(\psi_1 \vee \psi_2)$.

   (d) Il y a une formule ψ et une variable x uniquement déterminées telles que φ est $\exists x\psi$.

   (e) Il y a une formule ψ et une variable x uniquement déterminées telles que φ est $\forall x\psi$.

Démonstration:

1. Par récurrence sur le nombre des étapes dans la construction d'un terme (qu'on ne suppose pas encore unique) on se rend compte que dans un terme

   - il y a le même nombre de "(" que de ")", et
   - toute virgule "," est précédée par plus de "(" que de ")".

   Notons qu'un terme formé par itération comporte au moins les deux parenthès, donc est de longueur au moins deux. Alors si t est un mot de longueur un (un seul symbôle), t est soit une constante, soit une variable, qui est évidemment uniquement déterminée. Si t est de longueur supérieur à un, t n'est ni constante ni variable. Donc t est créé itérativement; le premier symbôle de t est une fonction $f \in \mathbb{F}$, déterminée uniquement, d'une certaine arité n. Comme t est un terme, il y a des termes $t_1, \ldots, t_n$ tels que t est $f(t_1, \ldots, t_n)$. Supposons donc que cette lecture n'est pas unique, qu'il y a d'autres termes $s_1, \ldots, s_n$

tels que t se lit aussi $f(s_1, \ldots, s_n)$. Si s_1 n'est pas le même que t_1, alors soit s_1 est un ségment initial propre de t_1, soit t_1 l'en est un de s_1. Donc soit t_1 est $s_1, \ldots$, soit s_1 est $t_1, \ldots$; dans les deux cas la virgule est précédée par autant de "(" que de ")", une contradiction. Donc t_1 est le même que s_1, et on peut répeter avec t_2 et s_2, ensuite t_3 et s_3, etc.

2. Par récurrence sur le nombre des étapes dans la construction d'une formule (qu'on ne suppose pas encore unique) on se rend compte que dans une formule

   - il y a le même nombre de "(" que de ")", et
   - tout "$\wedge$" et tout "$\vee$" est précédée par plus de "(" que de ")".

   Si une formule φ commence par une négation "$\neg$", on est forcément dans le cas (a), et φ est de la forme $\neg\psi$, où ψ est la formule obtenué en supprimant le premier symbôle "$\neg$".

   Si φ commence par un quanteur "$\exists$" ou "$\forall$", on est dans le cas (d) ou (e); le seconde symbôle est la variable, et le reste la formule ψ.

   Si φ commence par un symbôle de relation $R \in \mathbb{R}$, elle est atomique; si n est l'arité de R, et il y a termes $t_1, \ldots, t_n$ tels que φ est $R(t_1, \ldots, t_n)$. L'unicité de ces termes se montre comme pour la lecture unique des termes.

   Si φ commence par une parenthèse "(", on est dans le cas (b) ou (c). Supposons par exemple que φ se lit à la fois $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ et $(\psi_1' \wedge \psi_2')$, où ψ_1 est un ségment initial propre de ψ_1'. Donc ψ_1' est $\psi_1 \wedge \ldots$, et la virgule est précédée par autant de "(" que de ")", une contradiction. Alors ψ_1 est ψ_1', le prochain symbôle est le connecteur booléen ($\wedge$ ou $\vee$, uniquement déterminée), et le reste (sauf la parenthèse finale) est ψ_2. Les autres cas sont analogues. ∎

Définition 1.7 Soit $\mathcal{L}$ un langage. Une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ est un ensemble M, le *domaine* de $\mathfrak{M}$ (souvent confondu avec $\mathfrak{M}$), et

- pour chaque symbôle $c \in \mathcal{C}$ un élément $c^{\mathfrak{M}} \in M$.
- pour chaque symbôle $f \in \mathcal{F}$ d'arité n une fonction $f^{\mathfrak{M}} : M^n \to M$.
- pour chaque symbôle $R \in \mathcal{R}$ d'arité n un sous-ensemble $R^{\mathfrak{M}}$ de M^n.

Définition 1.8 Soit $\mathcal{L}$ une langage, et $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. Si $\bar{m}$ est un uple d'éléments de M et $\bar{x}$ est un uple de variables (de la même longueur) dans un terme $t(\bar{x})$, on peut substituer $\bar{m}$ pour toutes les occurences de $\bar{x}$ dans t et obtenir un terme $t(\bar{m})$, un terme à *paramètres* $\bar{m}$. Nous allons définir l'*interpretation* $t^{\mathfrak{M}}$ d'un terme t à paramètres dans $\mathfrak{M}$ récursivement par:

- l'interpretation d'une constante c est $c^{\mathfrak{M}}$; l'interpretation d'un paramètre m est m.
- si $f \in \mathcal{F}$ est une fonction n-aire et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes à paramètres, alors $f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathfrak{M}} = f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}})$.

Donc l'interpretation associe à chaque terme (avec paramètres) un élément de M.

De même, pour une formule $\varphi(\bar{x})$, on peut substituer $\bar{m}$ pour toutes les occurences *libres* de $\bar{x}$ dans φ et obtenir une formule $\varphi(\bar{m})$ avec paramètres. (Par unicité de lecture, la liberté d'une variable est uniquement déterminée.) Nous allons définir la *satisfaction* d'une formule avec paramètres dans $\mathfrak{M}$ récursivement par:

- si $\varphi(\bar{m})$ est $R(t_1(\bar{m}), \ldots, t_n(\bar{m}))$ est une formule atomique, où $R \in \mathcal{R}$ est une relation n-aire et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes, alors $\varphi(\bar{m})$ est satisfaite dans $\mathfrak{M}$ si $(t_1(\bar{m})^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n(\bar{m})^{\mathfrak{M}}) \in R^{\mathfrak{M}}$.
- si φ est $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, alors φ est satisfaite dans $\mathfrak{M}$ si φ_1 et φ_2 sont satisfaites dans $\mathfrak{M}$.
- si φ est $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, alors φ est satisfaite dans $\mathfrak{M}$ si φ_1 ou φ_2 (ou bien les deux) est satisfaite dans $\mathfrak{M}$.
- si φ est $\neg\psi$, alors φ est satisfaite dans $\mathfrak{M}$ si ψ n'est pas satisfaite dans $\mathfrak{M}$.
- si φ est $\forall x \psi(x)$, alors φ est satisfaite dans $\mathfrak{M}$ si pour tout $m \in M$ la formule $\psi(m)$ est satisfaite dans $\mathfrak{M}$.
- si φ est $\exists x \psi(x)$, alors φ est satisfaite dans $\mathfrak{M}$ s'il y a un $m \in M$ tel que $\psi(m)$ est satisfaite dans $\mathfrak{M}$.

Si $\varphi(\bar{m})$ est satisfaite dans $\mathfrak{M}$, on le dénote par $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$; on dit aussi que $\varphi(\bar{m})$ est *vrai* dans $\mathfrak{M}$, ou que $\mathfrak{M}$ *satisfait* $\varphi(\bar{m})$.

Remarque 1.9 C'est cette définition de la satisfaction qui donne le sens usuel au connecteurs booléens et au quanteurs. Avant, ce n'étaient que des symbôles manipulés de manière purement syntactique. Notons également que la définition est possible à cause du lemme d'unicité de lecture.

On peut aussi voir les choses de l'autre côté: si $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$, on dit également que $\bar{m}$ satisfait $\varphi(\bar{x})$ dans $\mathfrak{M}$, et on écrit $\bar{m} \models_{\mathfrak{M}} \varphi(\bar{x})$. Souvent on confond f et $f^{\mathfrak{M}}$, R et $R^{\mathfrak{M}}$, et c et $c^{\mathfrak{M}}$. Donc, dans un anneau R, on parlera de $+$, $-$, $*$, et pas de $+^R$, $-^R$, $*^R$.

Exemple 1.10

1. Considérons une $\mathcal{L}_{ord}$-structure $\mathfrak{M}$ satisfaisant:
   (a) $\forall x\ \neg x < x$.
   (b) $\forall x\, \forall y\ ((x < y \vee y < x) \vee x = y)$.
   (c) $\forall x\, \forall y\, \forall z\ \neg((x < y \wedge y < z) \wedge (z = x \vee z < x))$.

   Alors la relation $<^{\mathfrak{M}}$ est anti-reflexive, totale, et transitive, donc un ordre total. L'orde est sans extrémités si
   $$\forall x\, \exists y\, \exists z\ (y < x \wedge x < z)$$
   est vrai dans $\mathfrak{M}$; il est dense si $\mathfrak{M}$ satisfait
   $$\forall x \forall y\ ((x = y \vee y < x) \vee \exists z\, (x < z \wedge z < y)).$$

2. Considérons une $\mathcal{L}_{gp}$-structure $\mathfrak{M}$. Elle est un groupe si elle satisfait:
   (a) $\forall x\ (x * 1 = x \wedge 1 * x = x)$.
   (b) $\forall x\ (x * x^{-1} = 1 \wedge x^{-1} * x = 1)$.
   (c) $\forall x\, \forall y\, \forall z\ x * (y * z) = (x * y) * z$.

   Le groupe est abélien si $\forall x\, \forall y\ x * y = y * x$ est vrai.

3. Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}_{ann}$-structure. Elle est un corps (commutatif) si
   (a) $(M, +^{\mathfrak{M}})$ est un groupe abélien.
   (b) $(M - \{0\}, *^{\mathfrak{M}})$ est un groupe abélien. (Exprimer ça par un énoncé.)
   (c) $\forall x\, \forall y\, \forall z\ x * (y + z) = x * y + x * z$.

Si Φ est un ensemble d'énoncés et $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, on écrit $\mathfrak{M} \models \Phi$ si $\mathfrak{M} \models \varphi$ pour tout $\varphi \in \Phi$; on dit que $\mathfrak{M}$ satisfait Φ, que $\mathfrak{M}$ *réalise* Φ, ou bien que $\mathfrak{M}$ est un *modèle* de Φ.

Définition 1.11 Soient $\varphi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ deux $\mathcal{L}$-formules. On dit que $\varphi(\bar{x})$ *implique* $\psi(\bar{x})$ si pour tout $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ et tout $\bar{m} \in M$, si $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$, alors $\mathfrak{M} \models \psi(\bar{m})$.

Deux formules $\varphi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ sont *équivalentes* si φ implique ψ et ψ implique φ.

On a la même définition pour des ensembles $\Phi(\bar{x})$ et $\Psi(\bar{x})$ de $\mathcal{L}$-formules.

Lemme 1.12 *Pour toutes φ et ψ les formules suivantes sont équivalentes:*

- φ *et* $\neg\neg\varphi$.
- $\neg(\varphi \wedge \psi)$ *et* $\neg\varphi \vee \neg\psi$.
- $\neg(\varphi \vee \psi)$ *et* $\neg\varphi \wedge \neg\psi$.
- $\forall x \neg\varphi$ *et* $\neg\exists x \varphi$.
- $\exists x \neg\varphi$ *et* $\neg\forall x \varphi$.

Démonstration: Par exemple, pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ et tout $\bar{m}$ dans $\mathfrak{M}$ on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \models \neg\neg\varphi(\bar{m}) &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models \neg\varphi(\bar{m}) \\ &\Leftrightarrow \text{il n'est pas vrai que } \mathfrak{M} \models \neg\varphi(\bar{m}) \\ &\Leftrightarrow \text{il n'est pas vrai que } \mathfrak{M} \not\models \varphi(\bar{m}) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corollaire 1.13 *Toute formule est équivalente à une formule qui n'utilise qu'un des deux connectifs booléens, et qu'un des deux quanteurs.*

Démonstration: Grâce au Lemme 1.12 on élimine itérativement un des connectifs et un des quanteurs. $\blacksquare$

Nous utiliserons aussi les abbreviations suivantes: $\varphi \rightarrow \psi$ pour $\neg\varphi \vee \psi$, et $\varphi \leftrightarrow \psi$ pour $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$. On doit faire attention: ces connectifs cachent des négations, et sont interdits dans les formules positives.

Exercice 1.14 Deux formules $\varphi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ sont équivalentes si et seulement si $\forall \bar{x}\ (\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$ est vrai dans toute $\mathcal{L}$-structure.

Exercice 1.15 Dans une conjonction ou une disjonction de plusieurs arguments, $\varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ ou $\varphi_0 \vee \cdots \vee \varphi_n$, tout choix des parenthèses donne une formule équivalente.

A partir d'ici on va supprimer les parenthèses superflus. On notera $\bigwedge_{i \leq n} \varphi_i$ une conjonction $\varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$, et $\bigvee_{i \leq n} \varphi_i$ une disjonction $\varphi_0 \vee \cdots \vee \varphi_n$.

Définition 1.16 Une formule est *prénexe* si elle est de la forme

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \varphi,$$

où $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ pour tout $i \leq n$, et φ ne contient pas de quanteur.

Exercice 1.17 Toute formule est équivalente à une formule prénexe.

Leçon 2

Equivalence élémentaire et sous-structures élémentaires

Définition 2.1 Une $\mathcal{L}$-*théorie* T est un ensemble consistant de $\mathcal{L}$-énoncés (qui a un modèle); elle est *complète* si pour chaque énoncé φ soit tout modèle de T satisfait φ, soit tout modèle satisfait $\neg\varphi$.

Donc une $\mathcal{L}$-théorie est complète si et seulement si pour tout $\mathcal{L}$-énoncé φ, soit $T \models \varphi$, soit $T \models \neg\varphi$.

Si $\mathfrak{M}$ est une $\mathcal{L}$-structure et A un ensemble d'éléments dans M, le $\mathcal{L}(A)$-*théorie de* $\mathfrak{M}$, noté $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$, est l'ensemble de tous les énoncés à paramètres dans A qui sont satisfaits par $\mathfrak{M}$. Il est évident que c'est une théorie complète.

Exemple 2.2

1. La théorie des ordres denses sans extrémité est une $\mathcal{L}_{ord}$-théorie complète.

2. La théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion est une $\mathcal{L}_{gp}$-théorie complète. Elle est donnée par la théorie des groupes abéliens, plus

   (a) $\forall x\, \exists y\; y * \cdots * y = x$ (produit de n fois y), pour tout entier $n > 0$.

   (b) $\forall x\; (x = 1 \vee \neg\, x * \cdots * x = 1$ (avec n fois x), pour tout entier $n > 0$.

3. La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique p fixe est une théorie complète; elle est donnée par les énoncés suivants:

   (a) Les axiomes des corps (commutatifs).

(b) Soit $p = 0$, en caractéristique $p > 0$, soit $n \neq 0$ pour tout $n \in \omega$, en caractéristique 0.

(c) $\forall x_0 \ldots \forall x_n \exists y \sum_{i \leq n} x_i y^i = 0$, pour tout $n \in \omega$.

On notera que les axiomes (a) et (b) donnent la théorie des corps de caractéristique p, qui est axiomatisable par un seul axiome si et seulement si $p > 0$. Les axiomes (a) et (c) forment la théorie ACF des corps algébriquement clos; (c) ne s'exprime pas par un nombre fini d'énoncés. Enfin, (a)–(c) axiomatisent la théorie ACF_p des corps algébriquement clos de caractéristique p.

Le maximum qu'on peut dire dans notre langage d'une structure est sa théorie; nous verrons plus tard que sauf si $\mathfrak{M}$ est fini, il est impossible que $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ caractérise $\mathfrak{M}$ à isomorphisme près. Donc, on définit:

Définition 2.3 Deux $\mathcal{L}$-structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont *élémentairement équivalentes*, notée $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$, si elles satisfont les mêmes énoncés.

Exemple 2.4 1. $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, < \rangle$ et $\langle \mathbb{Z}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{Z}^2, <_{lex} \rangle$, où $<_{lex}$ est l'ordre lexicographique. Par contre, $\langle \mathbb{N}, < \rangle \not\equiv \langle \mathbb{Z}, < \rangle$; l'énoncé $\exists x \neg \exists y \, y < x$ est vrai dans $\mathbb{N}$ mais faux dans $\mathbb{Z}$.

2. $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle \equiv \langle \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}, \bar{0}, + \rangle$, mais $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle \not\equiv \langle \mathbb{R}^+, 1, * \rangle$: l'énoncé $\forall x \exists y \, y + y = x$ est faux dans $\mathbb{Z}$, mais vrai dans $\mathbb{R}^+$.

3. Soit $\tilde{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. Alors $\langle \tilde{\mathbb{Q}}, 0, 1, +, -, * \rangle \equiv \langle \mathbb{C}, 0, 1, +, -, * \rangle$ et $\langle \tilde{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}, 0, 1, +, -, * \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, 0, 1, +, -, * \rangle$. Par contre, $\langle \mathbb{Q}, 0, 1, +, -, * \rangle \not\equiv \langle \mathbb{Q}(x), 0, 1, +, -, * \rangle$; l'énoncé $\forall x \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x$ est vrai dans $\mathbb{Q}$, mais faux dans $\mathbb{Q}(x)$.

Exercice 2.5 Deux $\mathcal{L}$-structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont élémentairement équivalentes si et seulement si $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$.

Convention. L'égalité $=$ sera dans tous les langages, et sera toujours interpreté par la vraie égalité. En particulier, tout théorie spécifiera que $=$ est une congruence par rapport à toute fonction et toute relation, c'est-à-dire

- $\forall x \forall x' \forall \bar{y} \bar{z} \, [x = x' \to f(\bar{y}, x, \bar{z}) = f(\bar{y}, x', \bar{z})]$ pour tout $f \in \mathcal{F}$;
- $\forall x \forall x' \forall \bar{y} \bar{z} \, \{x = x' \to [R(\bar{y}, x, \bar{z}) \leftrightarrow R(\bar{y}, x', \bar{z})]\}$ pour tout $R \in \mathcal{R}$.

Remarquons que si $\mathfrak{M}$ est une $\mathcal{L}$-structure où $=$ n'est pas la vraie égalité, on peut remplacer tout élément par sa classe modulo $=$; comme $=$ est une congruence, les fonctions et relations de $\mathfrak{M}$ induisent des fonctions et relations sur $M/=$, et donc une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}/=$; on voit facilement que $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}/=$.

Définition 2.6 Soit $\mathfrak{N}$ une $\mathcal{L}$-structure. Une *sous-structure* de $\mathfrak{N}$ est un ensemble M de $\mathfrak{N}$ qui contient toutes les constantes et qui est clos par toutes les fonctions; les réstrictions à M des relations de $\mathfrak{N}$ y induiseront une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$. On le dénote $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$.

$\mathfrak{M}$ est une sous-structure *élémentaire* de $\mathfrak{N}$ si pour tout formule $\varphi(\bar{m})$ à paramètres dans $\mathfrak{M}$ on a $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$ si et seulement si $\mathfrak{N} \models \varphi(\bar{m})$. On dénote cette condition par $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$.

Si $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$, on dit que $\mathfrak{N}$ est une *extension élémentaire* de $\mathfrak{M}$.

Exemple 2.7

1. $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \prec \langle \mathbb{R}, < \rangle$ et $\langle \{0\} \times \mathbb{Z}, <_{lex} \rangle \prec \langle \mathbb{Z}^2, <_{lex} \rangle$. Par contre, $\langle 2\mathbb{Z}, < \rangle \not\prec \langle \mathbb{Z}, < \rangle$; l'énoncé $\exists x\,(0 < x \wedge x < 2)$ est faux dans $2\mathbb{Z}$ mais vrai dans $\mathbb{Z}$..

2. $\langle \mathbb{Z} \oplus \{0\}, 0, + \rangle \prec \langle \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}, \bar{0}, + \rangle$, mais $\langle 2\mathbb{Z}, 0, + \rangle \not\prec \langle \mathbb{Z}, 0, 0 \rangle$; l'énoncé $\exists x\, x + x = 2$ est faux dans $2\mathbb{Z}$, mais vrai dans $\mathbb{Z}$.

3. $\langle \tilde{\mathbb{Q}}, 0, 1, +, -, * \rangle \prec \langle \mathbb{C}, 0, 1, +, -, * \rangle$ et $\langle \tilde{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}, 0, 1, +, -, * \rangle \prec \langle \mathbb{R}, 0, 1, +, -, * \rangle$. De l'autre coté, $\langle \mathbb{Q}(x^2), 0, 1, +, -, * \rangle \not\prec \langle \mathbb{Q}(x), 0, 1, +, -, * \rangle$; l'énoncé $\exists y\, y * y = x^2$ est faux dans $\mathbb{Q}(x^2)$, mais vrai dans $\mathbb{Q}(x)$.

Définition 2.8 Un $\mathcal{L}$-morphisme d'une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ dans une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{N}$ est une application σ de M dans N qui preserve les constantes, les fonctions, et les relations. Donc:

1. $\sigma(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}}$ pour tout $c \in \mathcal{C}$.

2. $\sigma(f^{\mathfrak{M}}(\bar{m})) = f^{\mathfrak{N}}(\sigma(\bar{m}))$ pour tout $f \in \mathcal{F}$ et $\bar{m} \in M$.

3. $\bar{m} \in R^{\mathfrak{M}}$ si et seulement si $\sigma(\bar{m}) \in R^{\mathfrak{N}}$, pour tout $R \in \mathcal{R}$ et $\bar{m} \in M$.

Un $\mathcal{L}$-morphisme $\sigma : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ est *élémentaire* si pour tout $\bar{m} \in \mathfrak{M}$ on a $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$ si et seulement si $\mathfrak{N} \models \varphi(\sigma(\bar{m}))$.

Un $\mathcal{L}$-*isomorphisme* est un $\mathcal{L}$-morphisme surjectif.

Lemme 2.9 *1. Un $\mathcal{L}$-morphisme est injectif.*

2. *Un $\mathcal{L}$-morphisme preserve les formules sans quanteurs.*

3. *Un $\mathcal{L}$-isomorphisme est bijectif et élémentaire.*

DÉMONSTRATION:

1. Si $\sigma(m) = \sigma(m')$ pour $m, m' \in M$, alors $m = m'$ par preservation de la relation $=$.

2. Par récurrence sur la construction d'un terme on montre d'abord que $\sigma(t^{\mathfrak{M}}(\bar{m})) = t^{\mathfrak{N}}(\sigma(\bar{m}))$ pour tout terme t et tout $\bar{m} \in M$. Ensuite on utilise une récurrence sur le nombre des operations booléennes. Dans le cas atomique, on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \models R(t_1(\bar{m}), \ldots, t_n(\bar{m})) &\Leftrightarrow (t_1^{\mathfrak{M}}(\bar{m}), \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}(\bar{m})) \in R^M \\ &\Leftrightarrow (\sigma(t_1^{\mathfrak{M}}(\bar{m})), \ldots, \sigma(t_n^{\mathfrak{M}}(\bar{m}))) \in R^{\mathfrak{N}} \\ &\Leftrightarrow (t_1^{\mathfrak{N}}(\sigma(\bar{m})), \ldots, t_n^{\mathfrak{N}}(\sigma(\bar{m}))) \in R^{\mathfrak{N}} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{N} \models R(t_1(\sigma(\bar{m})), \ldots, t_n(\sigma(\bar{m}))). \end{aligned}$$

Quant aux opérations booléens, on a

$$\mathfrak{M} \models \neg\varphi(\bar{m}) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models \varphi(\bar{m}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \not\models \varphi(\sigma(\bar{m})) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \neg\varphi(\sigma(\bar{m}));$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \models \varphi_1(\bar{m}) \wedge \varphi_2(\bar{m}) &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \varphi_1(\bar{m}) \text{ et } \mathfrak{M} \models \varphi_2(\bar{m}) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi_1(\sigma(\bar{m})) \text{ et } \mathfrak{M} \models \varphi_2(\sigma(\bar{m})) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi_1(\sigma(\bar{m})) \wedge \varphi_2(\sigma(\bar{m})); \end{aligned}$$

le cas disjonctif est analogue.

3. Par récurrence sur le nombre des symboles logiques. Par 1. et 2. un $\mathcal{L}$-isomorphisme est bijectif et preserve les formules atomiques. Le cas des operations booléennes étant trivial, on considera une formule de la forme $\exists x\, \varphi(x, \bar{m})$ vraie dans $\mathfrak{M}$. Donc il y a $m_0 \in M$ tel que $\mathfrak{M} \models \varphi(m_0, \bar{m})$, et par hypothèse de récurrence $\mathfrak{N} \models \varphi(\sigma(m_0), \sigma(\bar{m}))$, d'où $\mathfrak{N} \models \exists x\, \varphi(x, \sigma(\bar{m}))$. Réciproquement, si $\mathfrak{N} \models \exists x\, \varphi(x, \sigma(\bar{m}))$, il y a $n_0 \in N$ tel que $\mathfrak{N} \models \varphi(n_0, \sigma(\bar{m}))$; par surjectivité on trouve $m_0 \in M$ avec $n_0 = \sigma(m_0)$. Par hypothèse de récurrence $\mathfrak{N} \models \varphi(\sigma(m_0), \sigma(\bar{m}))$ implique $\mathfrak{M} \models \varphi(m_0, \bar{m})$, d'où $\mathfrak{M} \models \exists x\, \varphi(x, \bar{m})$. Le cas d'un quanteur universel est analogue (ou bien on remplace $\forall x$ par $\neg\exists x\neg$). ■

Exercice 2.10 Un $\mathcal{L}$-morphisme preserve les quanteurs existentiels de la gauche à la droite, et les quanteurs universels de la droite à la gauche.

Exercice 2.11 Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ des $\mathcal{L}$-structures avec $M \subseteq N$. Alors $\mathfrak{M}$ est une $\mathcal{L}$-sous-structure de $\mathfrak{N}$ si et seulement si l'inclusion est un $\mathcal{L}$-morphisme.

Exercice 2.12 Soit $\mathfrak{M}$ une sous-structure de $\mathfrak{N}$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes:

- $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$.
- $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M) = \mathrm{Th}(\mathfrak{N}, M)$.
- l'inclusion $\mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ est un $\mathcal{L}$-morphisme élémentaire.

Exercice 2.13 Soient $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}'$ des $\mathcal{L}$-structures.

1. Si $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N} \prec \mathfrak{N}'$, alors $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}'$.
2. Si $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}'$ et $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{N}'$, alors $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$.

Trouver un exemple avec $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}'$, $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$, mais $\mathfrak{N} \not\prec \mathfrak{N}'$.

Lemme 2.14 *Soit $(I, <)$ un ensemble totalement ordonné, et $(\mathfrak{M}_i : i \in I)$ une chaîne élémentaire de $\mathcal{L}$-structures ($\mathfrak{M}_i \prec \mathfrak{M}_j$ pour tout $i < j$ dans I). Alors la réunion $\mathfrak{M} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{M}_i$ est canoniquement une $\mathcal{L}$-structure qui satisfait $\mathfrak{M}_i \prec \mathfrak{M}$ pour tout $i \in I$.*

Démonstration: Soit $M = \bigcup_{i \in I} M_i$. On définit une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ sur M comme suivant:

- $c^{\mathfrak{M}} = c^{\mathfrak{M}_i}$ pour tout $c \in \mathcal{C}$ et n'importe quel $i \in I$; comme $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}_j$, on a $c^{\mathfrak{M}_i} = c^{\mathfrak{M}_i}$ pour tout $i < j$ et $c^{\mathfrak{M}}$ ne depend pas du choix de i.
- $f^{\mathfrak{M}}(\bar{m}) = f^{\mathfrak{M}_i}(\bar{m})$ si $\bar{m} \in M_i$, pour tout $f \in \mathcal{F}$ (d'arité n, disons); comme $f^{\mathfrak{M}_i} = f^{\mathfrak{M}_j} \restriction M_i^n$ pour $i < j$, ceci est bien défini et $f^{\mathfrak{M}_i} = f^{\mathfrak{M}} \restriction M_i^n$ pour tout $i \in I$.
- $R^{\mathfrak{M}} = \bigcup_{i < \omega} R^{\mathfrak{M}_i}$ pour tout $R \in \mathcal{R}$ (d'arité n, disons); comme $R^{\mathfrak{M}_i} = R^{\mathfrak{M}_j} \cap M_i^n$ pour $i < j$, ceci définit une relation sur M^n telle que $R^{\mathfrak{M}_i} = R^{\mathfrak{M}} \cap M_i^n$ pour tout $i \in I$.

Il suit que $\mathfrak{M}_i$ est une sous-structure de $\mathfrak{M}$ pour tout $i \in I$. Pour vérifier qu'elle y est élémentaire, il nous suffit de voir par récurrence sur le nombre de symboles logiques que les quanteurs existentiels sont préservés de la droite à la gauche. Supposons donc que $\mathfrak{M} \models \exists x\, \varphi(x, \bar{m})$, où $\varphi(x, \bar{m})$ est une formule à paramètres dans $\mathfrak{M}_i$. Donc il y a $m_0 \in M$ tel que $\mathfrak{M} \models \varphi(m_0, \bar{m})$, et il y a $j \geq i$ tel que $m_0 \in M_j$. Par hypothèse de récurrence $\mathfrak{M}_j \models \varphi(m_0, \bar{m})$, d'où $\mathfrak{M}_j \models \exists x\, \varphi(x, \bar{m})$. Comme $\mathfrak{M}_i \prec \mathfrak{M}_j$, on a $\mathfrak{M}_i \models \exists x\, \varphi(x, \bar{m})$. ■

En particulier, une chaîne $\mathfrak{M}_0 \prec \mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{M}_2 \prec \cdots$ donne lieu a une extension élémentaire commune $\mathfrak{M} = \bigcup_{i \in \omega} \mathfrak{M}_i$.

Il n'est pas toujours facile de vérifier qu'une sous-structure est élémentaire, comme on doit connaitre la satisfaction des énoncés dans les deux structures. Voici un critère utile qui ne mentionne que la satisfaction dans la grande structure:

Proposition 2.15 TEST DE TARSKI *Soit* $\mathfrak{M}$ *une sous-structure de* $\mathfrak{N}$*. Alors* $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ *si et seulement si pour tout formule* $\varphi(x)$ *à paramètres dans* $\mathfrak{M}$*, si* $\mathfrak{N} \models \exists x\, \varphi(x)$*, alors il y a* $m \in \mathfrak{M}$ *tel que* $\mathfrak{N} \models \varphi(m)$*.*

DÉMONSTRATION: Si $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N} \models \exists x \varphi(x)$, où φ est une formule à paramètres dans M, alors $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(x)$ et il y a $m \in M$ tel que $\mathfrak{M} \models \varphi(m)$, d'où $\mathfrak{N} \models \varphi(m)$.

Réciproquement, supposant le critère satisfait, nous démontrons par récurrence sur le nombre de symboles logiques d'un énoncé φ à paramètres dans $\mathfrak{M}$ que $\mathfrak{M} \models \varphi$ si et seulement $\mathfrak{N} \models \varphi$. Comme $\mathfrak{M}$ est une sous-structure de $\mathfrak{N}$, il suffit de traiter le cas d'un quanteur existentiel. Supposons donc que $\mathfrak{M} \models \exists x\, \varphi(x, \bar{m})$. Alors il y a $m_0 \in \mathfrak{M}$ tel que $\mathfrak{M} \models \varphi(m_0, \bar{m})$. Par hypothèse de récurrence $\mathfrak{N} \models \varphi(m_0, \bar{m})$, d'où $\mathfrak{N} \models \exists x\, \varphi(x, \bar{m})$. Réciproquement, si $\mathfrak{N} \models \exists x\, \varphi(x, \bar{m})$, alors par hypothèse il y a $m_0 \in \mathfrak{M}$ tel que $\mathfrak{N} \models \varphi(m_0, \bar{m})$. Par hypothèse de récurrence $\mathfrak{M} \models \varphi(m_0, \bar{m})$, et $\mathfrak{M} \models \exists x\, \varphi(x, \bar{m})$. ■

Mais comment est-ce qu'on peut trouver ce témoin m_0 du test de Tarski ?

Définition 2.16 Soit T une $\mathcal{L}$-théorie. Pour chaque $\mathcal{L}$-formule $\varphi(x, \bar{y})$ considérons un nouveau symbole de fonction $f_\varphi(\bar{y})$, et posons

$$\mathcal{L}_{Skolem} = \mathcal{L} \cup \{f_\varphi : \varphi \text{ une } \mathcal{L}\text{-formule}\}.$$

La *skolemisation* T_{Skolem} de T est la théorie suivante:

$$T \cup \{\forall \bar{y}\, [\exists x\, \varphi(x, \bar{y}) \to \varphi(f_\varphi(\bar{y}), \bar{y})] : \varphi \text{ une } \mathcal{L}\text{-formule}\}.$$

Les f_φ s'appèlent *fonctions de Skolem* pour la théorie T.

Lemme 2.17 *La skolemisation d'une théorie consistante est consistante. Plus précisement, tout modèle de T s'étend à un modèle de T_{Skolem}.*

DÉMONSTRATION: Soit $\mathfrak{M}$ un modèle de T; nous choisissons un élément $m_0 \in M$ et interpretons f_φ sur $\mathfrak{M}$ comme suivant:

- Si $\mathfrak{M} \models \exists x\, \varphi(x, \bar{m})$, on choisit $m_\varphi \in M$ tel que $\mathfrak{M} \models \varphi(m_\varphi, \bar{m})$ et met $f_\varphi(\bar{m}) = m_\varphi$.
- Si $\mathfrak{M} \models \neg\exists x\, \varphi(x, \bar{m})$, alors $f_\varphi(\bar{m}) = m_0$.

Il est évident que cette structure $\mathfrak{M}_{Skolem}$ satisfait T_{Skolem}. ■

Les fonctions de Skolem n'ont rien de canonique; leur existence est une conséquence de l'axiome du choix. On appèle $\mathfrak{M}_{Skolem}$ une skolemisation de $\mathfrak{M}$.

Lemme 2.18 *Soit $\mathfrak{N}$ une structure, et $A \subseteq N$. La clôture M de A par les constantes, les fonctions dans $\mathcal{F}$ et les fonctions de Skolem est une sous-structure élémentaire $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{N}$.*

DÉMONSTRATION: Comme M contient les constantes et est clos par les fonctions dans $\mathcal{F}$, les restrictions des fonctions et relations de $\mathfrak{N}$ y induisent une sous-structure $\mathfrak{M}$; si $\mathfrak{N} \models \exists x\,_p(x, \bar{m})$ avec $\bar{m} \in M$, alors $f_\varphi(\bar{m}) \in M$ est le témoin pour l'application du test de Tarski. ■

Corollaire 2.19 LÖWENHEIM-SKOLEM DESCENDANT *Soit $\mathfrak{N}$ une $\mathcal{L}$-structure infini, $A \subseteq N$, et λ un cardinal infini avec $|A| + |\mathcal{L}| \leq \lambda \leq |N|$. Alors il y a une sous-strucure élémentaire $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ contenant A de cardinal λ.*

DÉMONSTRATION: On peut supposer que $|A| = \lambda$. Choisissons une skolemisation de $\mathfrak{N}$, et considérons la clôture M de A sous les constantes, les fonctions de $\mathcal{F}$ et les fonctions de skolem. Comme il y a $|\mathcal{L}| + \aleph_0$ formules et donc fonctions de Skolem, $|M| = |A| = \lambda$; par le lemme précedent $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$. ■

Leçon 3

La compacité

Voici le théorème le plus fondamental en théorie des modèles:

Théorème 3.1 COMPACITÉ *Soit* Φ *un ensemble d'énoncés tel que tout sous-ensemble fini de* Φ *a un modèle. Alors* Φ *a un modèle.*

DÉMONSTRATION: Soit I la collection de sous-ensembles finis de Φ, et pour $i \in I$ soit $\mathfrak{M}_i$ un modèle de i (rappelons que i est un ensemble fini d'énoncés!). Nous allons construire ici, à partir de la famille $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$, une $\mathcal{L}$-structure qui est une sorte de limite, ou moyenne, des structures dans la famille, et qui sera un modèle de Φ entier.

Définition 3.2 Un ensemble non-vide $\mathcal{U}$ de sous-ensembles de I est un *filtre* sur I si

- $\emptyset \notin \mathcal{U}$.
- si $X \in \mathcal{U}$ et $Y \in \mathcal{U}$, alors $X \cap Y \in \mathcal{U}$.
- si $X \in \mathcal{U}$ et $X \subseteq Y \subseteq I$, alors $Y \in \mathcal{U}$.

Un filtre $\mathcal{U}$ est un *ultrafiltre* si pour chaque $X \subseteq I$ soit $X \in \mathcal{U}$, soit $I - X \in \mathcal{U}$.

Pour tout $i \in I$ il y a l'ultrafiltre *principal* sur i, qui est l'ensemble $\{X \subseteq I : i \in X\}$. Par contre, l'existence des ultrafiltres non-principaux nécessite l'axiome du choix.

Lemme 3.3 *Tout filtre sur* I *est contenu dans un ultrafiltre.*

Démonstration: On voit facilement que la réunion d'une chaîne croissante de filtres sur I est toujours un filtre sur I; c'est une propriété *inductive*, où toute chaîne croissante a une borne supérieure. Or, le lemme de Zorn nous assure que tout filtre est contenu dans un filtre maximal. Vérifions qu'un filtre maximal est un ultrafiltre.

Soit donc $\mathcal{U}$ un filtre maximal, et $X \notin \mathcal{U}$ un sous-ensemble de I. On pose $\mathcal{U}' = \{Y \subseteq I : \exists F \in \mathcal{U}\ F - X \subseteq Y\}$. C'est un ensemble clos par intersection (car $\mathcal{U}$ l'est) et agrandissement; si $\emptyset \in \mathcal{U}'$, on aurait $F - X = \emptyset$ pour un $F \in \mathcal{U}$, d'où $F \subseteq X$ et $X \in \mathcal{U}$, contradiction. Donc $\mathcal{U}'$ est un filtre qui étend $\mathcal{U}$ et contient $I - X$; par maximalité $I - X \in \mathcal{U}$. ■

Définition 3.4 Soit $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ une famille de $\mathcal{L}$-structures, et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I. L'*ultraproduit* $\prod_I \mathfrak{M}_i/\mathcal{U}$ est la structure $\mathfrak{M}$ suivante:

- le domaine de $\mathfrak{M}$ est le produit $\times_I M_i$, modulo la relation $\sim$ d'équivalence suivante:
$$(m_i)_{i\in I} \sim (n_i)_{i\in I} \Leftrightarrow \{i \in I : m_i = n_i\} \in \mathcal{U}.$$
On dénotera la classe de $(x_i)_{i\in I}$ modulo $\sim$ par $[x_i]_{i\in I}$.

- pour tout $c \in \mathcal{C}$ on pose $c^{\mathfrak{M}} = [c^{\mathfrak{M}_i}]_{i\in I}$.

- pour tout $f \in \mathcal{F}$ d'arité n on pose
$$f^{\mathfrak{M}} : ([m_i^1]_{i\in I}, \dots, [m_i^n]_{i\in I}) \mapsto [f^{\mathfrak{M}_i}(m_i^1, \dots, m_i^n)]_{i\in I}.$$

- pour tout $R \in \mathcal{R}$ d'arité n soit $R^{\mathfrak{M}}$ l'ensemble
$$\{([m_i^1]_{i\in I}, \dots, [m_i^n]_{i\in I}) \in \mathfrak{M}^n : \{i \in I : (m_i^1, \dots, m_i^n) \in R^{\mathfrak{M}_i}\} \in \mathcal{U}\}.$$

Il nous faut vérifier que c'est bien défini.

D'abord, supposons que $(m_i)_{i\in I} \sim (n_i)_{i\in I}$ et $(n_i : i \in I) \sim (k_i)_{i\in I}$. Alors
$$\{i \in I : m_i = k_i\} \supseteq \{i \in I : m_i = n_i\} \cap \{i \in I : n_i = k_i\} \in \mathcal{U},$$
parce que $\mathcal{U}$ est clos par intersection et agrandissement. Donc $(m_i)_{i\in I} \sim (k_i)_{i\in I}$; comme reflexivité et symétrie sont évidentes, $\sim$ est bien une relation d'équivalence.

Ensuite, si $[m_i^j]_{i\in I} = [n_i^j]_{i\in I}$ pour $j = 1, 2, \dots, n$, alors par clôture de $\mathcal{U}$ par intersections finies,
$$J = \{i \in I : m_i^j = n_i^j \text{ pour tout } j = 1, 2, \dots, n\} \in \mathcal{U}.$$

Mais si $f \in \mathcal{F}$ est une fonction n-aire, J est contenu dans

$$\{i \in I : f^{\mathfrak{M}_i}(m_i^1, \ldots, m_i^n) = f^{\mathfrak{M}_i}(n_i^1, \ldots, n_i^n)\},$$

et la définition de $f^{\mathfrak{M}}$ ne dépend pas du choix des représentants modulo $\sim$. De même, si $R \in \mathcal{R}$ est une relation n-aire, alors J est contenu dans

$$\{i \in I : (m_i^1, \ldots, m_i^n) \in R^{\mathfrak{M}_i} \Leftrightarrow (n_i^1, \ldots, n_i^n) \in R^{\mathfrak{M}_i}\},$$

et la définition de $R^{\mathfrak{M}}$ ne dépend pas du choix des représentants modulo $\sim$ non plus.

Notons que les définitions de $\sim$ et de $=^{\mathfrak{M}}$ sont les mêmes: si $=^{\mathfrak{M}_i}$ est la vraie égalité sur $\mathfrak{M}_i$ pour tout $i \in I$, alors $=^{\mathfrak{M}}$ est la vraie égalité sur $\mathfrak{M}$, conformément à notre convention.

Théorème 3.5 CRITÈRE DE ŁOS *Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur un ensemble I, et $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ une famille de $\mathcal{L}$-structures. Si $\bar{m} = ([m_i^1]_{i\in I}, \ldots, [m_i^n]_{i\in I})$ est un n-uple dans l'ultraproduit $\mathfrak{M} = \prod_I \mathfrak{M}_i/\mathcal{U}$ et $\varphi(\bar{x})$ est une $\mathcal{L}$-formule, alors $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$ si et seulement si*

$$\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \varphi(m_i^1, \ldots, m_i^n)\} \in \mathcal{U}.$$

DÉMONSTRATION: D'abord, nous démontrons par récurrence sur la longueur d'un terme $t(\bar{x})$ que $\mathfrak{M} \models t(\bar{m}) = [n_i]_{i\in I}$ si et seulement si

$$\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models t(m_i^1, \ldots, m_i^n) = n_i\} \in \mathcal{U}.$$

C'est évident si $t(\bar{x}) = f(\bar{x})$ pour une fonction n-aire $f \in \mathcal{F}$, par définition de $f^{\mathfrak{M}}$. Soient donc $t_1(\bar{x}), \ldots, t_k(\bar{x})$ des termes de longueur inférieur à celle de t, et $f \in \mathcal{F}$ une fonction k-aire, tels que $t(\bar{x}) = f(t_1(\bar{x}), \ldots, t_k(\bar{x}))$. Si $n_i^j = t_j(m_i^1, \ldots, m_i^n)$ pour $j = 1, 2, \ldots, k$, par hypothèse de récurrence $\mathfrak{M} \models [n_i^j]_{i\in I} = t_j(\bar{m})$, pour tout $j = 1, 2, \ldots, k$. Ensuite

$$\mathfrak{M} \models f([n_i^1]_{i\in I}, \ldots, [n_i^k]_{i\in I}) = [n_i]_{i\in I}$$

si et seulement si $\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models f(n_i^1, \ldots, n_i^k) = n_i\} \in \mathcal{U}$ par définition de $f^{\mathfrak{M}}$; le résultat suit par substitution.

Maintenant on peut démontrer le critère par récurrence sur la longueur de $\varphi(\bar{x})$; pour l'économie de l'effort on supposera qu'on a remplacé toutes les formules par des formules équivalentes qui ne contiennent ni $\vee$ ni $\forall$ (et la récursion reste bien dans cette classe).

Si $\varphi(\bar{x}) = R(\bar{x})$ pour un $R \in \mathcal{R}$, la proposition suit de la définition de $R^{\mathfrak{M}}$; si $\varphi(\bar{x}) = R(t_1(\bar{x}), \dots, t_k(\bar{x}))$ est atomique, on utilise le paragraphe précédent. Si $\varphi(\bar{m}) = \neg\psi(\bar{m})$, on a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{M} \not\models \psi(\bar{m}) \\
&\Leftrightarrow \quad \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \psi(m_i^1, \dots, m_i^n)\} \notin \mathcal{U} \\
&\Leftrightarrow \quad \{i \in I : \mathfrak{M}_i \not\models \psi(m_i^1, \dots, m_i^n)\} \in \mathcal{U} \\
&\Leftrightarrow \quad \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \varphi(m_i^1, \dots, m_i^n)\} \in \mathcal{U},
\end{aligned}$$

comme $I - J \subseteq I$ est dans $\mathcal{U}$ si et seulement si $J \notin \mathcal{U}$.

Si $\varphi(\bar{x}) = \varphi_1(\bar{x}) \wedge \varphi_2(\bar{x})$, on a pour $j = 1, 2$ que

$$\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \varphi_j(m_i^1, \dots, m_i^n)\} \supseteq \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \varphi(m_i^1, \dots, m_i^n)\}. \qquad (\dagger_j)$$

Donc si le dernier est dans $\mathcal{U}$, ainsi sont les premiers, et par hypothèse de récurrence $\mathfrak{M} \models \varphi_j(\bar{m})$ pour $j = 1, 2$, d'où $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$. Réciproquement, si $\mathfrak{M}$ satisfait $\varphi(\bar{m})$, il satisfait $\varphi_1(\bar{m})$ et $\varphi_2(\bar{m})$, donc les premiers ensembles dans $(\dagger_j)$ sont dans $\mathcal{U}$ pour $j = 1, 2$, ainsi que leur intersection, qui est le deuxième.

Enfin, si $\varphi(\bar{m}) = \exists x\, \psi(x, \bar{m})$, soit $J = \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \varphi(m_i^1, \dots, m_i^n)\}$. Pour chaque $i \in J$ soit $n_i \in \mathfrak{M}_i$ tel que $\mathfrak{M}_i \models \psi(n_i, m_i^1, \dots, m_i^n)$; pour $i \notin J$ on choisit $n_i \in \mathfrak{M}_i$ quelconque. Si $n = [n_i : i \in I]$, alors par hypothèse de récurrence $i \in I$ implique $\mathfrak{M} \models \psi(n, \bar{m})$, d'où $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$. Réciproquement, si $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{x})$, il y a un $n = [n_i : i \in I] \in \mathfrak{M}$ tel que $\mathfrak{M} \models \psi(n, \bar{m})$; par hypothèse de récurrence $\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \psi(n_i, m_i^1, \dots, m_i^n)\} \in \mathcal{U}$, et $\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \varphi(m_i^1, \dots, m_i^n)\} \in \mathcal{U}$. ■

Maintenant nous pouvons finir la d'emonstration du théorème de la compacité. Rappelons que I est l'ensemble des sous-ensembles finis de Φ, et que $\mathfrak{M}_i \models i$ pour chaque $i \in I$. Pour $i \in I$ soit I_i l'ensemble des sous-ensembles finis de Φ qui étendent i. Si $\mathcal{U}_0 = \{X \subseteq I :$ il y a $i \in I$ tel que $X \supseteq I_i\}$, alors pour $X \supseteq I_i$ et $Y \supseteq I_j$ on a $X \cap Y \supseteq I_{i \cup j} \in \mathcal{U}_0$; en plus $X \supseteq I_i \ni i$, et $\mathcal{U}_0$ est un filtre. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre contenant $\mathcal{U}_0$, et $\mathfrak{M} = \prod_I \mathfrak{M}_i / \mathcal{U}$. Donc pour tout $\sigma \in \Phi$ on a

$$\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \sigma\} \supseteq I_{\{\sigma\}} \in \mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}.$$

Par le théorème de Łos, $\mathfrak{M} \models \sigma$. ■

Le réciproque est bien sûr évident.

Exercice 3.6 Démontrer que si toutes les $\mathfrak{M}_i$ sont élémentairement équivalentes, alors tout ultraproduit $\prod_I \mathfrak{M}_i/\mathcal{U}$ est élémentairement équivalent aux $\mathfrak{M}_i$.

Exercice 3.7 Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur un ensemble I, et $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. Alors on peut considérer l'ultraproduit où tous les $\mathfrak{M}_i$ sont égaux à $\mathfrak{M}$; on l'appèle une *ultrapuissance* de $\mathfrak{M}$, et on le dénote $\prod_I \mathfrak{M}/\mathcal{U}$.

1. Vérifier que l'application diagonale $m \mapsto [m]_{i\in I}$ est un $\mathcal{L}$-morphisme, l'*inclusion canonique.*

2. Démontrer que l'inclusion canonique est élémentaire.

Exemple 3.8 Il n'y a pas d'ensemble Φ de $\mathcal{L}_{ord}$-énoncés dont les modèles sont précisement les ordres finis.

Démonstration: Supposons que Φ est un tel ensemble, et considérons l'ensemble

$$\Psi = \Phi \cup \{\exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{i<j} x_i \neq x_j : n < \omega\}.$$

Pour tout sous-ensemble fini Ψ_0 de Ψ soit n_0 maximal tel que Ψ_0 contient l'énoncé $\exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{i<j} x_i \neq x_j$, et soit $\mathfrak{M}_0$ un ordre fini de cardinalité n_0. Comme $\mathfrak{M}_0 \models \Phi$ et a n_0 éléments, $\mathfrak{M}_0 \models \Psi_0$. Donc chaque sous-ensemble fini de Ψ a un modèle; par compacité Ψ a un modèle $\mathfrak{M}$. Comme $\mathfrak{M} \models \Phi$, il est un ordre fini. Mais $\mathfrak{M}$ a au moins n éléments pour chaque $n < \omega$, contradiction. ■

Exercice 3.9 Démontrer qu'il n'y a pas d'ensemble Φ de $\mathcal{L}_{ann}$-énoncés dont les modèles sont précisement les corps finis.

Exemple 3.10

1. Les entiers non-standards
   Soit c un nouvel symbole de constante, et Φ la $\mathcal{L}_{ann} \cup \{c\}$-théorie suivante:

$$\mathrm{Th}_{\mathcal{L}_{ann}}(\langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \dot{-}, *\rangle, \mathbb{N}) \cup \{\exists x\, n * x = c : n < \omega\} \cup \{c \neq 0\}$$

   (on pose $n \dot{-} m = 0$ si $m \geq n$). Tout sous-ensemble fini de Φ a un modèle: on prend $\mathbb{N}$ lui-même, et interprète c par un entier suffisament divisible. Soit $\mathbb{N}^*$ un modèle de tout Φ. Alors l'inclusion $n \mapsto n^{\mathbb{N}^*}$ est élémentaire; c'est un modèle non-standard de l'arithmétique. Notons que $c^{\mathbb{N}^*}$ est un entier non-standard non-nulle qui est divisible par tout entier standard.

2. Les réels non-standards

   Soit $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ann} \cup \{c, <\}$, et Φ la $\mathcal{L}$-théorie suivante:

$$\mathrm{Th}_{\mathcal{L}_{ann}\cup\{<\}}(\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, -, *, <\rangle, \mathbb{R}) \cup \{0 < c < \frac{1}{n} : n < \omega\}.$$

   Tout sous-ensemble fini de Φ ayant $\mathbb{R}$ comme modèle (avec une interpretation de c assez proche de 0), on trouve un modèle $\mathbb{R}^*$ de Φ entier, les réels non-standard. L'inclusion $r \mapsto r^{\mathbb{R}^*}$ est élémentaire. Pour chaque $r \in \mathbb{R}^*$ borné (tel qu'il y a $r \in \mathbb{R}$ avec $r^* < r$ on trouve un unique réel $\mathrm{stand}(r^*) \in \mathbb{R}$ tel que $|r^* - \mathrm{stand}(r^*)| < \frac{1}{n}$ pour tout $n < \omega$. On appèle $\mathrm{stand}(r^*)$ la partie *standard* du réel non-standard r^*.

Notons que ni les entiers ni les réels non-standard sont déterminés à isomorphisme près.

Maintenant nous allons voir que l'équivalence élémentaire ne peut pas determiner le cardinal d'une $\mathcal{L}$-structure, sauf si elle est fini.

Lemme 3.11 *Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure infini. Alors il y a $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ arbitrairement large.*

Démonstration: Soit λ un cardinal arbitraire, $\{c_i : i < \lambda\}$ des nouvelles constantes, et

$$\Phi = \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M) \cup \{c_i \neq c_j : i \neq j\}.$$

Alors chaque sous-ensemble fini de Φ ne mentionne qu'un nombre fini de constantes, qu'on peut interpreter dans $\mathfrak{M}$. Donc chaque sous-ensemble fini de Φ a un modèle; par compacité il y a un modèle $\mathfrak{N}$ de Φ. Evidemment $|\mathfrak{N}| \geq \lambda$. En plus, on a une injection canonique de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$, qui envoie un élément $m \in \mathfrak{M}$ à la réalisation $m^{\mathfrak{N}}$ de sa constante dans $\mathfrak{N}$.

Soit maintenant $\varphi(\bar{m}) \in \mathcal{L}(\bar{m})$ pour un $\bar{m} \in \mathfrak{M}$. Alors

$$\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{m}) \in \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{m}),$$

donc l'inclusion est élémentaire. ■

Corollaire 3.12 Löwenheim-Skolem ascendant *Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure infini. Alors pour tout $\lambda \geq |\mathcal{L}| + |M|$ il a une extension élémentaire $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ de cardinal λ.*

Démonstration: Par le lemme 3.11 on trouve $\mathfrak{N}' \succ \mathfrak{M}$ de cardinal au moins λ; par Löwenheim-Skolem descendant il y a $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{N}'$ contenant $\mathfrak{M}$ de cardinal λ, et $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$. ■

Leçon 4

Types

Définition 4.1 Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, $A \subseteq M$ et $\bar{a}$ un uple dans M. Le *type* de $\bar{a}$ sur A, noté $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$, est l'ensemble des $\mathcal{L}(A)$-formules $\varphi(\bar{x})$ satisfaites par $\bar{a}$ dans $\mathfrak{M}$. Si A est vide, on l'omet et note $\mathrm{tp}(\bar{a})$.

Plus généralement, un n-*type* (complèt) sur A est un ensemble $p(\bar{x})$ maximal de $\mathcal{L}(A)$-formules avec variables libres $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, tel que toute partie finie de $p(\bar{x})$ est réalisée dans $\mathfrak{M}$

La famille des n-types sur A est noté $S_n(A)$; on pose $S(A) = \bigcup_{n<\omega} S_n(A)$.

Nous allons également considerer des types en une infinité de variables.

Remarque 4.2 Soit $p(\bar{x})$ un type sur $A \subseteq \mathfrak{M}$, et $\varphi(\bar{x})$ une formule telle que ni φ ni $\neg\varphi$ est dans p. Par maximalité on trouve des sous-ensembles finis π_0 et π_1 de p tels que ni $\pi_0(\bar{x}) \cup \{\varphi(\bar{x})\}$, ni $\pi_1(\bar{x}) \cup \{\neg\varphi(\bar{x})\}$ a une réalisation dans $\mathfrak{M}$. Mais $\pi_0(\bar{x}) \cup \pi_1(\bar{x})$ a une réalisation $\bar{a}$ dans $\mathfrak{M}$; comme soit $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a})$, soit $\mathfrak{M} \models \neg\varphi(\bar{a})$, on obtient une contradiction. Donc pour toute $\mathcal{L}(A)$-formule $\varphi(\bar{x})$ soit φ, soit $\neg\varphi$ est dans p.

$\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$ fait partie de tout type sur A, et $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ dépend du modèle ambiant $\mathfrak{M}$. Or, ce type reste inchangé si on remplace $\mathfrak{M}$ par une extension élémentaire.

Remarque 4.3 La collection des n-types sur $\emptyset$ ne dépend que de la théorie $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) = T$; on la dénote par $S_n(T)$.

Démonstration: Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux modèles de T, et p un type sur $\emptyset$ dans $\mathfrak{M}$. Alors pour toute partie finie π de p on a $\mathfrak{M} \models \exists\bar{x} \bigwedge \pi(\bar{x})$. Par complétude, $T \models \exists\bar{x} \bigwedge \pi(\bar{x})$, et on trouve $\bar{b} \in N$ tel que $\mathfrak{N} \models \pi(\bar{b})$. Donc p est finiment réalisable dans $\mathfrak{N}$; comme p contient toute formule ou sa négation, p est un type dans $\mathfrak{N}$. ■

Remarque 4.4 Comme il y a au plus $|\mathcal{L}|+|A|+\omega$ formules avec paramètres dans A, il y a au plus $2^{|\mathcal{L}|+|A|+\omega}$ types sur A.

Exemple 4.5

1. Dans la théorie des ordres denses, un 1-type sur A correspond à la coupure qu'il détermine dans A.
2. Dans $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, 0, +)$ un 1-type sur $\{1\}$ non-réalisé est déterminé par sa classe modulo n pour chaque entier n.
3. Dans $\mathrm{Th}(\mathbb{C}, 0, 1, +, -, *)$ un 1-type $p(x)$ sur un sous-corps k est déterminé
   - soit par l'unique $a \in k$ tel que $x = a$ est dans $p(x)$,
   - soit par le polynome minimal sur k d'une réalisation de p,
   - soit par l'ensemble $f(x) \neq 0$ pour tout $f(x) \in k[x]$.

Proposition 4.6 *Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, $A \subseteq M$ et $p(\bar{x}) \in S_n(A)$. Alors il y a $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ et $\bar{c} \in N$ tel que $p = \mathrm{tp}(\bar{c}/A)$. Deux uples $\bar{a}$ et $\bar{a}'$ on même type sur A si et seulement s'il y a $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ et un automorphisme de $\mathfrak{N}$ qui fixe A et envoie $\bar{a}$ à $\bar{a}'$.*

Démonstration: Toute partie finie de $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M) \cup p(\bar{c})$ (où $\bar{c}$ sont des nouvelles constantes) est satisfaite dans $\mathfrak{M}$. Par compacité il y a un modèle $\mathfrak{N}$ de $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M) \cup p(\bar{c})$; comme l'application $M \ni m \mapsto m^{\mathfrak{N}}$ est élémentaire, on peut considérer $\mathfrak{N}$ comme extension élémentaire de $\mathfrak{M}$. On pose $\bar{a} = \bar{c}^{\mathfrak{N}}$; il est évident que $\mathrm{tp}(\bar{a}/A) = p(\bar{x})$.

Maintenant soient $\bar{a}$ et $\bar{a}'$ deux réalisations d'un type $p(\bar{x})$ sur A dans une extension élémentaire $\mathfrak{M}_0$ de $\mathfrak{M}$. Nous allons construire une suite

$$\mathfrak{M} \prec \mathfrak{M}_0 \prec \mathfrak{M}_1 \prec \cdots$$

d'extensions élémentaires, et une chaîne $\sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq \cdots$ d'isomorphismes partiels élémentaires $\sigma_i : \mathfrak{M}_i \to \mathfrak{M}_i$, telle que σ_0 fixe A et envoie $\bar{a}$ à $\bar{a}'$, et pour tout $i < \omega$ la domaine de σ_{2i+1} contient $\mathfrak{M}_{2i}$ et l'image de σ_{2i+2} contient $\mathfrak{M}_{2i+1}$. Alors $\mathfrak{N} = \bigcup_{i<\omega} \mathfrak{M}_i$ sera une extension élémentaire de $\mathfrak{M}$, et $\sigma = \bigcup_{i<\omega} \sigma_i$ sera un automorphisme de $\mathfrak{N}$ qui fixe A et envoie $\bar{a}$ à $\bar{a}'$.

Lemme 4.7 *Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et σ un $\mathcal{L}$-morphisme élémentaire partiel de $\mathfrak{M}$. Alors il y a $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ et un $\mathcal{L}$-morphisme partiel τ de $\mathfrak{N}$ de domaine $\mathfrak{M}$ qui étend σ; en plus $\tau(\mathfrak{M}) \prec \mathfrak{N}$.*

DÉMONSTRATION: Pour chaque $m \in M$ soit m' une nouvelle constante. Il nous faut voir que la théorie Φ suivante est consistante:

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M) \cup \{\varphi(\bar{m}', \sigma(\bar{n})) : \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}, \bar{n}) \text{ et } \bar{n} \in \mathrm{dom}(\sigma)\}.$$

Considérons une partie finie Φ_0 de Φ qui contient des formules $\varphi_i(\bar{m}'_i, \sigma(\bar{n}_i))$ pour $i \leq n$. Alors $\mathfrak{M} \models \bigwedge_{i\leq n} \varphi_i(\bar{m}_i, \bar{n}_i)$ et $\mathfrak{M} \models \exists_{i\leq n}\bar{x}_i \bigwedge_{i\leq n} \varphi_i(\bar{x}_i, \bar{n}_i)$; comme σ est élémentaire, on a

$$\mathfrak{M} \models \exists_{i\leq n}\bar{x}_i \bigwedge_{i\leq n} \varphi_i(\bar{x}_i, \sigma(\bar{n}_i)).$$

Donc, on peut modéliser Φ_0 dans $\mathfrak{M}$. Par compacité on trouve un modèle $\mathfrak{N}$ de Φ, qui est une extension élémentaire de $\mathfrak{M}$; l'application $\tau : m \mapsto (m')^{\mathfrak{N}}$ est une continuation élémentaire de σ sur $\mathfrak{M}$. Enfin, pour tout formule $\varphi(\tau(\bar{m}))$ à paramètres dans $\tau(\mathfrak{M})$

$$\mathfrak{N} \models \varphi(\tau(\bar{m})) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{m}) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}) \Leftrightarrow \tau(\mathfrak{M}) \models \varphi(\tau(\bar{m})).$$

Maintenant on applique le lemme 4.7 d'abord à $\mathfrak{M}_0$ et σ_0 pour obtenir $\mathfrak{M}_1$ et σ_1, ensuite à $\mathfrak{M}_1$ et σ_1^{-1} pour obtenir $\mathfrak{M}_2$ et σ_2^{-1}, etc. ∎

La preuve précedente démontre une méthode très utile en théorie des modèles pour construire un automorphisme d'une structure $\bigcup_{i<\omega} \mathfrak{M}_i$ comme réunion de morphismes partiels, le *va-et-vient*: le *va* aux étapes impairs nous assure que σ sera total, et le *vient* aux étapes pairs prend charge de la surjectivité.

Définition 4.8 Un type $p(\bar{x})$ sur A est *algébrique* s'il y a une $\mathcal{L}(A)$-formule $\varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$ qui n'a qu'un nombre fini de réalisations. Un uple $\bar{a}$ est *algébrique sur A* si $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ l'est.

Exercice 4.9 Un uple $\bar{a}$ est algébrique sur A si et seulement s'il est contenu dans chaque sous-structure élémentaire contenant A de toute extension élémentaire de $\mathfrak{M}$.

Nous avons vu qu'on peut toujour trouver un modèle qui réalise un type. Mais est-ce qu'on peut en trouver un qui ne le réalise pas ?

Définition 4.10 Un type $p(\bar{x})$ sur A est *principal*, ou *isolé*, s'il y a une formule $\varphi(\bar{x})$ dans $p(\bar{x})$ telle que $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A) \cup \{\varphi(\bar{x})\} \models p(\bar{x})$. Dans ce cas, la formule $\varphi(\bar{x})$ *isole* $p(\bar{x})$ sur A.

Une reformulation nous donne : $\varphi(\bar{x})$ isole $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ si et seulement si $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A) \cup \{\varphi(\bar{a})\} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A\bar{a})\}$.

Exercice 4.11 Un type algébrique est isolé.

Lemme 4.12 $\mathrm{tp}(\bar{a}\bar{b}/A)$ *est isolé ssi* $\mathrm{tp}(\bar{a}/A\bar{b})$ *et* $\mathrm{tp}(\bar{b}/A)$ *le sont.*

Démonstration: Si $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ isole $\mathrm{tp}(\bar{a}\bar{b}/A)$, alors $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ isole $\mathrm{tp}(\bar{a}/A\bar{b})$, et $\exists \bar{x}\, \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ isole $\mathrm{tp}(\bar{b}/A)$. Réciproquement, si $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ isole $\mathrm{tp}(\bar{a}/A\bar{b})$ et $\psi(\bar{y})$ isole $\mathrm{tp}(\bar{b}/A)$, alors

$$\mathrm{Th}(M, A) \cup \{\psi(\bar{b})\} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A\bar{b}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A\bar{b}) \cup \{\varphi(\bar{a}, \bar{b})\} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A\bar{a}\bar{b})\}.$$

Donc $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \psi(\bar{y})$ isole $\mathrm{tp}(\bar{a}\bar{b}/A)$. ■

Il est évident qu'un type principal est réalisé dans chaque modèle contenant A, comme $\exists \bar{x}\, \varphi(\bar{x})$ fait partie de $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$. Pour le réciproque, il faut que $\mathcal{L}(A)$ soit dénombrable.

Théorème 4.13 Omission des types *Soit* $\mathfrak{M}$ *une* $\mathcal{L}$*-structure,* $A \subseteq M$*, et* $p(\bar{x}) \in S_n(A)$ *dénombrable. Alors il y a un modèle de* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$ *qui omet* p *si et seulement si* p *n'est pas principal.*

Démonstration: Soit $C = \{c_i : i < \omega\}$ des nouvelles constantes. Nous allons construire une $\mathcal{L}(A \cup C)$-théorie consistante T étendant $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$ telle que pour chaque formule $\varphi(x)$ il y a $i_\varphi < \omega$ tel que $\exists x \varphi(x) \to \varphi(c_{i_\varphi})$ est dans T. Alors si $\mathfrak{N}$ est un modèle de T, alors $\{c_i^{\mathfrak{N}} : i < \omega\}$ est une sous-structure de $\mathfrak{N}$, comme parmi les formules $\varphi(x)$ se trouvent celles de la forme $x = a$ pour toute constante a, et $x = f(\bar{c})$ pour toute fonction $f(\bar{x}) \in \mathcal{F}$ et $\bar{c} \in C$. Par le test de Tarski, l'inclusion est élémentaire, et $\{c_i^{\mathfrak{N}} : i < \omega\}$ est un modèle de $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$; nous allons faire de manière qu'il omet p.

Soit $(\varphi_i(x) : 0 < i < \omega)$ une énumération des $\mathcal{L}(A \cup C)$-formules avec une variable lible x, et $(\bar{c}_i : i < \omega)$ une énumération des n-uples dans C. On pose $T_0 = \emptyset$; si on a déjà construit T_n fini tel que $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A) \cup T_n$ a un modèle, alors :

- Si $n = 2m$, soit i minimal tel que c_i ne figure pas dans T_n. On met $T_{n+1} = T_n \cup \{\exists x \varphi_m(x) \to \varphi_m(c_i)\}$; comme c_i ne figure pas dans $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A) \cup T_n$, il y a un modèle de $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A) \cup T_{n+1}$.

- Si $n = 2m+1$, on considère l'uple $\bar{c}_m$. Soient $\bar{d}$ les constantes dans $C - \{\bar{c}_m\}$ qui figurent dans T_n, et $\psi(\bar{c}_m, \bar{d})$ l'énonce $\bigwedge T_n$. Comme $p(\bar{x})$ n'est pas principal,

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A) \cup \{\exists \bar{y}\, \psi(\bar{x}, \bar{y})\} \not\models p(\bar{x})$$

et il y a un modèle $\mathfrak{M}_m$ de $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A) \cup \{\psi(\bar{c}_m, \bar{d})\}$ tel que $\mathfrak{M}_m \not\models p(\bar{c}_m)$. Si $\psi_m(\bar{x}) \in \mathrm{tp}(\bar{c}_m/A) - p(\bar{x})$, alors $T_{n+1} = T_n \cup \{\psi_m(\bar{c}_m)\}$ a un modèle.

On pose $T = \bigcup_{n<\omega} T_n$. Alors T est consistant par compacité et étend $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$, les quanteurs existentiels on des témoins dans C, et aucun uple dans C réalise p. ■

Exercice 4.14 Soit T une théorie (possiblement incomplète), dans un langage dénombrable. Une formule $\varphi(\bar{x})$ est un *support* pour un ensemble $\Phi(\bar{x})$ si $T \cup \{\exists \bar{x}\, \varphi(\bar{x})\}$ a un modèle et $\varphi(\bar{x})$ implique $\Phi(\bar{x})$ modulo T. Si $\Phi_n(\bar{x})$ est sans support pour chaque $n < \omega$, démontrer que T a un modèle qui omet tous les $\Phi_n(\bar{x})$ simultanément.

Leçon 5

Les grands et les petits

Il convient de rappeler quelques propriétes des ordinaux et des cardinaux. Considérons la suite des entiers naturels : $1, 2, 3, \ldots$. Leur réunion est l'ensemble des entiers naturels, ω; on peut continuer à compter, en prenant des réunions au cas limites:

$$1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega = \omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1, \ldots, \omega\cdot 3, \ldots, \omega\cdot\omega = \omega^2, \ldots.$$

On obtient la collection des *ordinaux*. Chaque ordinal a soit un prédecesseur immédiat α, et est donc de la forme $\alpha + 1$ et qualifie comme *ordinal successeur*, soit est la réunion des ordinaux précedents et qualifie comme *ordinal limite*. La suite des ordinaux est bien-fondée, ce qui permet les preuves par récurrence *transfini* : Une propriété est vrai pour tout ordinal si on peut la montrer pour 0, pour $\alpha + 1$ successeur pourvu qu'elle soit vraie pour α, et pour α limite pourvu qu'elle soit vraie pour tout $\beta < \alpha$. Notons aussi que ni l'addition ni la multiplication des ordinaux sont commutatives.

Quant aux cardinaux, on les confond avec le plus petit ordinal de leur cardinalité (ce qui existe comme la collection des ordinaux est bien-fondée). Pour des cardinaux infinis λ et κ on a

$$\lambda + \kappa = \lambda \cdot \kappa = \max\{\lambda, \kappa\}$$

(le premier majore le cardinal d'une réunion $A \cup B$ avec $|A| = \lambda$ et $|B| = \kappa$, le deuxième le cardinal du produit $A \times B$, ou bien d'une réunion $\bigcup_{a\in A} B_a$ avec $|B_a| \leq \kappa$ pour tout $a \in A$). Le théorème de Cantor nous affirme que $2^\lambda > \lambda$.

Définition 5.1 Une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ est *atomique* sur $A \subseteq M$ si $\mathrm{tp}(\bar{m}/A)$ est isolé pour chaque uple fini $\bar{a}$ de M. Comme toujours, on supprime "sur $\emptyset$".

Soit λ un cardinal. Une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ est λ-*saturée* si $\mathfrak{M}$ réalise chaque type (en un nombre fini de variables) sur tout sous-ensemble de M de cardinal strictement inférieur à λ. Enfin, $\mathfrak{M}$ est *saturée* si $\mathfrak{M}$ est $|\mathfrak{M}|$-saturée.

Si $|A| < \lambda < |S(A)|$ pour un sous-ensemble A d'un modèle de T, alors il n'y a pas de modèle saturé de cardinal λ (un tel modèle devrait contenir une copie A' de A, et ensuite réalisations de tous les types sur A'). En général, l'existence des modèles saturés dépend de l'*hypothèse du continu généralisé* (GCH), qui postule qu'il n'y a pas de cardinal entre λ et 2^λ.

Théorème 5.2 *1. Deux modèles atomiques dénombrables d'une théorie complète sont isomorphes. Plus précisement, tout isomorphisme élémentaire partiel σ_0 de deux parties finies se prolonge en un isomorphisme.*

2. Deux modèles saturés de même cardinal λ d'une théorie complète sont isomorphies. Plus précisement, tout isomorphisme élémentaire partiel σ_0 de deux parties de cardinal strictement inférieur à λ se prolonge en un isomorphisme.

Démonstration: Si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont deux modèles de la même théorie complète, l'application vide est un isomorphisme partiel. Donc l'isomorphie des modèles est une conséquence de la possibilité de prolongement.

Dans le cas 1. on pose $\lambda = \omega$. Soient $(m_i : i < \lambda)$ et $(n_i : i < \lambda)$ des énumérations de M et de N. On va construire une suite d'isomorphismes partiels $(\sigma_i : i < \lambda)$ de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$, tels que σ_i étend σ_j pour $j > i$, et pour tout $i \geq 0$, le domaine de σ_i contient $\{m_k : k < i\}$, et l'image de σ_i contient $\{n_k : k < i\}$, les deux étant de cardinal au plus $2 \cdot |i| + |\mathrm{dom}(\sigma_0)|$. Alors $\sigma = \bigcup_{i<\lambda} \sigma_i$ sera l'isomorphisme de $\mathfrak{M}$ à $\mathfrak{N}$ (principe du va-et-vient).

Supposons qu'on a trouvé σ_i, et soit A_i le domaine et B_i l'image de σ_i. Dans le cas 1. le type $\mathrm{tp}(m_i/A_i)$ est isolé par une formule $\varphi(x, A_i)$ d'après le lemme 4.12; comme $\mathfrak{M} \models \exists x\, \varphi(x, A_i)$ et σ_i est élémentaire, $\mathfrak{N} \models \exists x\, \varphi(x, B_i)$; soit $n \in N$ tel que $\mathfrak{N} \models \varphi(n, B_i)$. Comme σ_i est élémentaire et $\varphi(x, A_i)$ implique $\mathrm{tp}(m_i/A_i)$ modulo $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A_i)$, l'image $\sigma(\varphi(x, A_i)) = \varphi(x, B_i)$ implique $\sigma(\mathrm{tp}(m_i/A_i)) = \mathrm{tp}(n/B_i)$ modulo $\sigma(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A_i)) = \mathrm{Th}(\mathfrak{N}, B_i)$. Donc on peut étendre σ_i en envoyant m_i à n. De même, comme $\mathrm{tp}(n_i/B_i n)$ est isolé par une formule $\psi(x, B_i, n)$, on trouve $m \in M$ réalisant $\psi(x, A_i, m_i)$.

Dans le cas 2. le type $\sigma(\mathrm{tp}(m_i/A_i))$ est réalisé dans $\mathfrak{N}$ par un élément n par saturation de $\mathfrak{N}$, et le type $\sigma^{-1}(\mathrm{tp}(n_i/B_i))$ est réalisé dans $\mathfrak{M}$ par un élément

m par saturation de $\mathfrak{M}$. Ceci ajoute au plus deux éléments au domaine et à l'image, qui restent donc de cardinal au plus $2 \cdot |i+1| + |\mathrm{dom}(\sigma_0)|$; on pose

$$\sigma_{i+1} : x \mapsto \begin{cases} \sigma_i(x) & \text{si } x \in A_i \\ n & \text{si } x = m_i \\ n_i & \text{si } x = m. \end{cases}$$

Si on a obtenu une suite $(\sigma_j : j < i)$ d'isomorphismes partiels pour un ordinal limite i, alors $\sigma_i = \bigcup_{j<i} \sigma_j$ est aussi un isomorphisme partiel; comme on peut majorer le cardinal du domaine et de l'image de σ_i par $|i| \cdot 2 \cdot |i| + |\mathrm{dom}(\sigma_0)| = 2 \cdot |i| + |\mathrm{dom}(\sigma_0)|$ pour i infini, le théorème est démontré. ■

Exemple 5.3 1. $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ et $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ sont atomiques, $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ est saturé, mais $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ n'est pas saturé : il omet le 2-type qui dit que la distance entre x et y est infini.

2. $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ est atomique; sa théorie n'a pas de modèle saturé de cardinal ω : pour tout ensemble P de nombres premiers il y a le type qui dit que x est divisible par p si et seulement si $p \in P$; ça fait 2^ω types sur $\emptyset$ qu'on ne peut pas tous réaliser dans un modèle dénombrable.

3. $\tilde{\mathbb{Q}}$ et $\tilde{\mathbb{F}}_p$ sont les corps algébriquement clos atomiques. $\mathbb{C}$ est saturé (de cardinal 2^ω), et $\widetilde{\mathbb{Q}(x_i : i < \omega)}$ est saturé dénombrable.

Exemple 5.4 Voici une théorie qui n'a pas de modèle atomique: Le langage comporte un ordre $<$ et un prédicat unaire P; on considère la théorie de $\mathbb{R}$, ou on a ajoute une constante pour chaque rationel $q \in \mathbb{Q}$, et P est interpreté par $\mathbb{Q}$. Alors tout modèle contiendra une copie de $\mathbb{Q}$; on peut construire un modèle $\mathfrak{M}$ de façon que pour une certaine coupure irrationnel sur $\mathbb{Q}$ toute réalisation satisfait P. Mais s'il y a un modèle atomique $\mathfrak{M}_0$, il s'injecte dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathfrak{M}$, et toutes les réalisations de cette coupure dans $\mathfrak{M}_0$ satisfont à la fois $\neg P$ et P. Donc il n'y en a pas; comme on peut repeter avec chaque coupure irrationnel, aucune telle coupure est réalise dans $\mathfrak{M}_0$. Mais $\mathfrak{M}_0$ s'injecte dans $\mathbb{R}$ et ne réalise que des coupures irrationnelles. Ça signifie que la domaine de $\mathfrak{M}_0$ est $\mathbb{Q}$, et $\mathfrak{M}_0$ ne comporte aucun élément réalisant $\neg P$, contradiction.

Exercice 5.5 Soit $\mathfrak{M}$ atomique sur A et $M - A$ dénombrable. Alors $\mathfrak{M}$ s'injecte élémentairement dans tout modèle de $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$.

Exercice 5.6 Soit $\mathfrak{M}$ saturé. Alors tout modèle de $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ de cardinal au plus $|\mathfrak{M}|$ s'injecte élémentairement dans $\mathfrak{M}$.

Exercice 5.7 Soit T une théorie complète dénombrable. Un modèle $\mathfrak{M}$ de T s'injecte élémentairement dans tout modèle de T si et seulement si $\mathfrak{M}$ est atomique et dénombrable.

Exercice 5.8 Pour tout $\mathfrak{M}$ et tout λ il y a une extension élémentaire $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ qui est λ-saturée.

Exercice 5.9 Si $\lambda^+ = 2^\lambda$, une théorie complète a un modèle saturé de cardinal λ^+.

Définition 5.10 Soit λ un cardinal infini. Une théorie T est λ-*catégorique* si tous les modèles de cardinal λ sont isomorphes.

Exemple 5.11
1. La théorie des ordres denses sans extrémités est ω-catégorique.
2. La théorie des groupes abéliens d'exposant p premier est λ-catégorique pour tout λ.
3. La theorie des corps algébriquement clos de caractéristique donnée est λ-catégorique pour tout λ non-dénombrable.

Théorème 5.12 RYLL-NARDZEWSKI, SVENONIUS, ENGELER *Les conditions suivantes sont équivalentes pour une théorie complète dénombrable avec modèle infini :*

1. *T est ω-catégorique.*
2. *Pour chaque $n < \omega$ il n'y a qu'un nombre fini de formules inéquivalentes modulo T à n variables libres $x_1, \ldots, x_n$.*
3. *$S_n(T)$ est fini pour chaque $n < \omega$.*

DÉMONSTRATION: Si $S_n(T)$ est fini, on trouve facilement des formules isolant les types dans $S_n(T)$; une formule en n variables libres sera donc équivalente à une combinaison booléenne de ces formules. L'équivalence 2. $\Leftrightarrow$ 3. suit.

Si $S_n(T)$ est fini pour chaque n, alors chaque type sur $\emptyset$ est isolé et tout modèle de T est atomique; par le théorème 5.2 deux modèles dénombrables sont isomorphes.

Réciproquement, si T est ω-catégorique, comme tout type non-isolé sur $\emptyset$ peut être ou bien réalisé ou bien omis dans un modèle dénombrable par le théorème d'omission des types, tout type sur $\emptyset$ est principal. Fixons $n < \omega$; s'il y a une infinite de types sur $\emptyset$, isolés par des formules $\{\varphi_i(\bar{x}) : i \in I\}$, alors par compactité l'ensemble $\{\neg\varphi_i(\bar{x}) : i \in I\}$ est consistant et on peut le completer à un type $p(\bar{x})$. Mais la formule isolant $p(\bar{x})$ doit figurer parmi les formules $\varphi_i(\bar{x})$, ce qui contredit que p contient $\neg\varphi_i(\bar{x})$ pour tout i. ■

Définition 5.13 Une théorie complète est *menue* si $S(T)$ est dénombrable.

Proposition 5.14 *Une théorie dénombrable menue a un modèle atomique dénombrable et un modèle saturé dénombrable.*

Evidemment, s'il y a un modèle saturé dénombrable, T est menue.

Démonstration: Notons d'abord que comme un type $\text{tp}(\bar{a}/\bar{b})$ est déterminé par $\text{tp}(\bar{a}\bar{b})$, sur tout ensemble fini dans un modèle de T il n'y a qu'un nombre dénombrable de types.

Construisons d'abord le modèle saturé. Soit $\mathfrak{M}_0$ n'importe quel modèle dénombrable. Alors il y a $\bigcup_{n<\omega} \omega^n = \bigcup_{n<\omega} \omega = \omega \cdot \omega = \omega$ sous-ensembles finis de $\mathfrak{M}_0$, et sur chaqu'un il n'y a qu'un nombre dénombrable de types. Il y a $\mathfrak{M}_1 \succ \mathfrak{M}_0$ qui réalise tous ces types; par le théorème de Löwenheim-Skolem on peut choisir $\mathfrak{M}_1$ dénombrable. Mais ensuite on trouve $\mathfrak{M}_2 \succ \mathfrak{M}_1$ dénombrable qui réalise tous les types sur les sous-ensembles finis de $\mathfrak{M}_1$, et on obtient récursivement une chaîne élémentaire $\mathfrak{M}_0 \prec \mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{M}_2 \prec \cdots$, telle que $\mathfrak{M}_{i+1}$ est dénombrable et réalise tous les types sur les ensembles finis de $\mathfrak{M}_i$. Alors $\mathfrak{M} = \bigcup_{i<\omega} \mathfrak{M}_i$ sera une extension élémentaire de $\mathfrak{M}_0$ qui est ω-saturée (comme tout sous-ensemble fini de $\mathfrak{M}$ est contenu dans un des $\mathfrak{M}_i$).

Quant au modèle atomique, on va le construire comme sous-structure élémentaire de n'importe quel modèle dénombrable $\mathfrak{M}$ de T. Soit $\bar{a}$ un uple fini de M, et $\varphi(x, \bar{a})$ une formule consistante : $\mathfrak{M} \models \exists x\, \varphi(x, \bar{a})$.

Lemme 5.15 *Il y a un type isolé $p(x) \in S_1(\bar{a})$ qui contient $\varphi(x, \bar{a})$.*

Démonstration: Supposons qu'aucune formule consistante $\psi(x, \bar{a})$ qui implique $\varphi(x, \bar{a})$ isole un type sur $\bar{a}$. Alors on trouve une $\mathcal{L}(\bar{a})$-formule $\varphi_1(x)$

telle que $\varphi(x,\bar{a}) \wedge \varphi_\emptyset(x)$ et $\varphi(x,\bar{a}) \wedge \neg\varphi_\emptyset(x)$ sont consistantes; ensuite on divise la première en deux par une formule $\varphi_0(x)$, et la deuxième par une formule $\varphi_1(x)$. Plus généralement, pour toute suite $(s_i : i \leq n) \in \{0,1\}^n$ et $\mathcal{L}(\bar{a})$-formules $\varphi_{(s_i:i<k)}(x)$ pour $k \leq n$ telles que

$$\varphi(x,\bar{a}) \wedge \bigwedge_{k\leq n} \neg^{s_k}\varphi_{(s_i:i<k)}(x)$$

est consistant (où $\neg^0\psi$ est ψ et $\neg^1\psi$ est $\neg\psi$), on trouve une $\mathcal{L}(\bar{a})$-formule $\varphi_{(s_i:i\leq n)}(x)$ telle que

$$\varphi(x,\bar{a}) \wedge \bigwedge_{k\leq n} \neg^{s_k}\varphi_{(s_i:i<k)}(x) \wedge \neg^{s_{n+1}}\varphi_{(s_i:i\leq n)}(x)$$

est consistante pour $s_{n+1} = 0$ et $s_{n+1} = 1$. Récursivement on trouve donc des formules $\varphi_{\bar{s}}$ pour toute suite fini binaire $\bar{s}$, telles que pour toute suite *infini* $s = (s_0, s_1, s_2, \ldots) \in \{0,1\}^\omega$

$$p_s(x) = \varphi(x,\bar{a}) \wedge \bigwedge_{k<\omega} \neg^{s_k}\varphi_{(s_i:i<k)}(x)$$

est consistant. Mais les completions des différents $p_s(x)$ donnent 2^ω types sur $\bar{a}$, contradiction. ■

Soit $(\varphi_i(x,\bar{a}_i) : i < \omega)$ une énumération de toutes les formules à paramètres dans $\mathfrak{M}$ qui isolent un type sur $\bar{a}_i$. On pose $A_0 = \emptyset$; si on a trouvé A_i, soit $j < \omega$ minimal telle que $\bar{a}_j \in A_i$ et $\varphi_j(x,\bar{a}_j)$ n'a pas de réalisation dans A_i. Par le lemme, on trouve une $\mathcal{L}(A_i)$-formule qui implique $\varphi_j(x,\bar{a}_j)$ et isole un type sur A_i; on ajoute une réalisation de ce type (qui doit exister dans $\mathfrak{M}$) pour obtenir A_{i+1}. A la fin, on pose $A = \bigcup_{i<\omega} A_i$.

A est atomique par le lemme 4.12, comme chaque A_{i+1} est atomique sur A_i. Il contient toutes les constantes, comme $x = c$ isole un type pour chaque $c \in \mathcal{C}$, et est clos par les fonctions, comme $x = f(\bar{a})$ isole un type sur $\bar{a}$. Donc A est une sous-structure de $\mathfrak{M}$; elle est élémentaire par le test de Tarski : Si $\mathfrak{M} \models \exists x\, \varphi(x,\bar{a})$ avec $\bar{a} \in A$, il y a une formule $\varphi_i(x,\bar{a})$ qui implique $\varphi(x,\bar{a})$ et isole un type sur $\bar{a}$. Mais si $\bar{a} \in A_j$, alors $\varphi_i(x,\bar{a})$ est réalise dans A_{j+i} au plus tard. ■

Le reste de ce cours sera ciblé vers une preuve du théorème suivant:

Théorème 5.16 Morley *Si une théorie dénombrable est catégorique en un cardinal non-dénombrable, elle est catégorique en tout cardinal non-dénombrable.*

Leçon 6

Indiscernables

Définition 6.1 Soit $\mathfrak{M}$ une structure, $A \subseteq M$, et $(\bar{a}_i : i \in I)$ une suite d'uples de même longueur dans M, où I est un ensemble d'indices ordonné infini. La suite est *indiscernable* sur A si pour chaque $n < \omega$ et tout $i_1 < \cdots < i_n$ et $j_1 < \cdots < j_n$ on a $\mathrm{tp}(\bar{a}_{i_1}, \ldots, \bar{a}_{i_n}/A) = \mathrm{tp}(\bar{a}_{j_1}, \ldots, \bar{a}_{j_n}/A)$.

Lemme 6.2 *Soit $\mathfrak{M}$ une structure, $A \subseteq M$, et $(\bar{a}_i : i \in I)$ une suite indiscernable sur A. Alors pour tout ensemble ordonné J infini il y a $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ et une suite indiscernable $(\bar{a}'_j : j \in J) \subset N$ sur A dont les sous-suites finis ont même type sur A que les sous-suites finis de $(\bar{a}_i : i \in I)$.*

DÉMONSTRATION: Simple application de la compacité. ■

Pour construire des suites indiscernables, on a besoin d'un théorème combinatoire :

Théorème 6.3 THÉORÈME DE RAMSEY *Soit X un ensemble ordonné de type ω dont les n-uples croissants sont colorés en k couleurs. Alors il y a un sous-ensemble $Y \subseteq X$ infini monochrome.*

DÉMONSTRATION: Par récurrence sur n, l'énoncé étant évident si $n = 1$. Considérons donc une coloration des $(n+1)$-uples de X ; fixant $x_0 \in X$ on obtient par hypothèse de récurrence un sous-ensemble infini $X_0 \subseteq X - \{x_0\}$ et une couleur $k_0 < k$ tel que pour tout n-uple $\bar{x}$ de X_0 le $(n+1)$-uple $x_0\bar{x}$ porte la couleur k_0. Récursivement on obtient une suite $X = X_{-1} \supseteq X_0 \supseteq X_1 \supseteq \cdots$ de sous-ensembles infinis, des éléments $x_i \in X_{i-1} - X_i$, et des couleurs k_i, tels que pour chaque n-uple $\bar{x}$ dans X_i le $(n+1)$-uple $x\bar{x}$ porte la couleur k_i. Comme il n'y a qu'un nombre fini de couleurs, il y a un sous-ensemble infini

$I \subseteq \omega$ et une couleur k' tels que $k_i = k'$ pour tout $i \in I$. Alors l'ensemble $\{x_i : i \in I\}$ sera monochrome. ■

Remarque 6.4
- L'hypothèse que le type de l'ordre de X soit ω est sans importance : Dans chaque ordre infini (totale) on trouve soit une chaîne croissante infinie, soit une chaîne décroissante infinie.
- Il y a un théorème équivalent pour les colorations des n-sous-ensembles d'un ensemble infini.

Théorème 6.5 *Soit $\mathfrak{M}$ une structure, $A \subseteq M$, et $(\bar{a}_i : i < \omega)$ une suite infinie d'uples de même longueur dans M. Alors il y a une extension élémentaire $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ et une suite indiscernable $(\bar{a}'_i : i < \omega)$ sur A dans $\mathfrak{N}$, telles que toute $\mathcal{L}(A)$-formule $\varphi(\bar{x}_i : i < n)$ satisfaite par $(\bar{a}'_1, \ldots, \bar{a}'_n)$ est satisfaite par une n-sous-suite de $(\bar{a}_i : i < \omega)$.*

DÉMONSTRATION: Pour toute suite finie de $\mathcal{L}(A)$-formules $\Delta = \{\varphi_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) : i \leq k\}$ le théorème de Ramsey nous donne un sous-ensemble infini $X_\Delta \subseteq \omega$ tel que soit $\mathfrak{M} \models \varphi_i(\bar{a}_{j_1}, \ldots, \bar{a}_{j_n})$ pour tous $j_1 < \cdots < j_n$ dans X_Δ, soit $\mathfrak{M} \models \neg\varphi_i(\bar{a}_{j_1}, \ldots, \bar{a}_{j_n})$ pour tous $j_1 < \cdots < j_n$ dans X_Δ, comme satisfaction de ces formules nous donne une 2^k-coloration des n-uples dans $(\bar{a}_i : i < \omega)$. Donc, si $(\bar{c}_i : i < \omega)$ sont des nouvelles constantes,

$$\begin{aligned} \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M) \quad \cup & \bigcup_{\substack{i_1 < \cdots < i_n \\ j_1 < \cdots < j_n}} \{\varphi(\bar{c}_{i_1}, \ldots, \bar{c}_{i_n}) \leftrightarrow \varphi(\bar{c}_{j_1}, \ldots, \bar{c}_{j_n}) : \varphi \in \mathcal{L}(A)\} \\ \cup & \left\{ \varphi(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n) : \begin{array}{l} \varphi \in \mathcal{L}(A),\ \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}_{i_1}, \ldots, \bar{a}_{i_n}) \\ \text{pour tout } i_1 < \cdots < i_n < \omega \end{array} \right\} \end{aligned}$$

est finiment réalisable dans $\mathfrak{M}$, et a un modèle $\mathfrak{N}$, extension élémentaire de $\mathfrak{M}$; on prend $\bar{a}'_i = \bar{c}_i^{\mathfrak{N}}$ pour $i < \omega$. ■

Théorème 6.6 *Soit T une $\mathcal{L}$-théorie dénombrable avec un modèle infini. Alors pour chaque cardinal λ infini il y a un modèle $\mathfrak{M}$ de T qui ne réalise que $|A|$ types sur chaque ensemble infini $A \subseteq M$.*

DÉMONSTRATION: On va raisonner dans $\mathcal{L}_{Skolem}$. Soit $\mathfrak{N}$ un modèle dénombrable de T_{Skolem}. Par le théorème 6.5 on trouve une extension élémentaire $\mathfrak{N}'$ de $\mathfrak{N}$ qui contient une suite indiscernable $(a_i : i < \lambda)$ avec $a_0 \neq a_1$ (on l'obtient à partir de n'importe quel énumération de N). Soit $\mathfrak{M}$ la sous-structure de $\mathfrak{N}'$ engendrée par $(a_i : i < \lambda)$; par le lemme 2.18 elle est inclus élémentairement dans $\mathfrak{N}'$ pour le langage $\mathcal{L}$ original.

Soit $A \subseteq M$ infini, et $\bar{a} \in M$; on doit calculer le nombre de possibilités pour $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$. Mais A est engendré par une partie $(a_i : i \in I)$ de la suite indiscernable, de cardinal $|I| = |A|$; il suffira donc de compter les types sur $(a_i : i \in I)$ réalisés dans $\mathfrak{M}$. Chaque $a \in \bar{a}$ est engendré par un nombre fini d'éléments dans la suite indiscernable; le type sur $(a_i : i \in I)$ d'un uple $\bar{a}' \in (a_i : i < \lambda)$ qui engendre $\bar{a}$, ainsi que $\mathrm{tp}(\bar{a}/\bar{a}')$, déterminera $\mathrm{tp}(\bar{a}/a_i : i \in I)$. Comme $\bar{a}$ est engendré par $\bar{a}'$ par les fonctions et les fonctions de Skolem, il n'y a qu'un nombre dénombrable de possibilités. Il suffit donc de compter le possibilités pour $\mathrm{tp}(\bar{a}'/a_i : i \in I)$; comme $(a_i : i < \lambda)$ est indiscernable, ce type est déterminé par les coupures des $a' \in \bar{a}'$ dans $(a_i : i \in I)$. Comme il n'y a que $|I|$ coupures (la coupure d'un $a' \notin (a_i : i \in I)$ est déterminée par le plus petit élément au dessus, s'il y en a), il n'y a que $|I| = |A|$ types.

Tout ceci est vrai pour les types dans le sens de $\mathcal{L}_{Skolem}$, et a fortiori pour les $\mathcal{L}$-types. ■

Corollaire 6.7 *Soit T une théorie dénombrable catégorique en λ non-dénombrable. Alors $S(\mathfrak{M})$ est dénombrable pour chaque modèle dénombrable de T.*

DÉMONSTRATION: Sinon, on trouve $\mathfrak{M} \models T$ dénombrable, et $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ de cardinal λ qui réalise un nombre non-dénombrable de types sur $\mathfrak{M}$. Mais par catégoricité $\mathfrak{N}$ est isomorphe au modéle donné par le théorème 6.6, une contradiction. ■

Définition 6.8 Une théorie T est λ-stable si $|S(\mathfrak{M})| = \lambda$ pour tout modèle $\mathfrak{M} \models T$ de cardinal λ. Une théorie est *stable* si elle est λ-stable pour un λ. Une structure est (λ-) stable si sa théorie l'est.

Exemple 6.9

1. Un ordre total infini est instable.
2. Un groupe abélien A est stable; il est ω-stable si et seulement si A est la somme directe d'un groupe divisible avec un groupe d'exposant borné.
3. Un corps algébriquement clos est ω-stable, et même catégorique en tout cardinal non-dénombrable.

Le corollaire 6.7 affirme qu'une théorie catégorique en λ non-dénombrable est ω-stable.

Remarque 6.10 En fait, la démonstration montre qu'une théorie catégorique en λ est κ-stable pour tout $\kappa < \lambda$ infini. On va voir dans la leçon prochaine qu'on peut faire mieux.

Enfin, on peut lier la stabilité aux suites indiscernables.

Définition 6.11 Soit $\mathfrak{M}$ une structure, $A \subseteq M$ et $\{\bar{a}_i : i \in I\}$ un ensemble d'uples de même longueur dans M. L'ensemble est *indiscernable* sur A si pour chaque $n < \omega$ et tout $i_1, \ldots, i_n$ et $j_1, \ldots, j_n$ distincts dans I on a $\text{tp}(\bar{a}_{i_1}, \ldots, \bar{a}_{i_n}/A) = \text{tp}(\bar{a}_{j_1}, \ldots, \bar{a}_{j_n}/A)$.

Théorème 6.12 *Une suite indiscernable dans une structure stable $\mathfrak{M}$ est un ensemble indiscernable.*

Démonstration: Sinon, on trouve un ensemble $A \subseteq M$, une suite indiscernable $(\bar{a}_i : i < \omega)$ sur A dans M, et une formule φ tels que

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &\models \varphi(\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{i-1}, \bar{a}_i, \bar{a}_{i+1}, \bar{a}_{i+2}, \ldots, \bar{a}_n), \text{ mais} \\ \mathfrak{M} &\models \neg\varphi(\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{i-1}, \bar{a}_{i+1}, \bar{a}_i, \bar{a}_{i+2}, \ldots, \bar{a}_n). \end{aligned}$$

On prolonge la suite en une suite indexée par $\omega\hat{}\omega\hat{}\omega$, et prend $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{i-1}$ dans la première et $\bar{a}_{i+2}, \ldots, \bar{a}_n$ dans la troisième copie de ω comme paramètres, qu'on ajoute à A. Comme les a_i pour i dans la deuxième copie de ω restent indiscernables sur ces paramètres, on peut supposer que $n = 2$ et $i = 1$. C'est-à-dire, on a une formule telle que $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{a}_j)$ si et seulement si $i < j$ (ou $i \leq j$, si $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}_1, \bar{a}_1)$). Par le lemme 6.2 on peut remplacer la suite indiscernable par une suite qui est indexée par un ordre I dense de cardinal λ infini sur lequel il y a 2^λ coupures. Mais chaque coupure donne lieu à un type partiel sur l'ensemble $\{a_i : i \in I\}$ de cardinal λ (on remplace l'ordre $<$ ou $\leq$ sur I par φ sur la suite indiscernable); on peut les completer pour obtenir 2^λ types. ■

Remarque 6.13 Le réciproque est aussi vrai : Une théorie est stable si et seulement si toute suite indiscernable est un ensemble indiscernable.

Théorème 6.14 *Soit $\mathfrak{M}$ une structure ω-stable, et $\{\bar{a}_i : i \in I\}$ indiscernable infini (sur $\emptyset$). Alors pour toute formule $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ il y a un $n_\varphi < \omega$ tel que pour tout $\bar{m} \in M$ soit $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{m})$ pour tout $i \in I$ sauf au plus n_φ, soit $\mathfrak{M} \models \neg\varphi(\bar{a}_i, \bar{m})$ pour tout $i \in I$ sauf au plus n_φ.*

Démonstration: Sinon, par compacité on trouve $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ et $\bar{m}_0 \in N$ tel que $J = \{i \in I : \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{m}_0)\}$ est infini et co-infini. Par indiscernabilité de l'ensemble $\{\bar{a}_i : i \in I\}$ on peut supposer que $I = \mathbb{Q}$ et $J = \mathbb{Q}^+$; encore par indiscernabilité pour tout $j \in \mathbb{Q}$ on trouve $\bar{m}_j$ (dans une extension élémentaire $\mathfrak{N}'$) tel que $\mathfrak{N}' \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{m}_j) \Leftrightarrow i > j$. Mais pour tout $r \in \mathbb{R}$ le type partiel

$$\{\varphi(\bar{a}_i, \bar{x}) : i < r\} \cup \{\neg\varphi(\bar{a}_i, \bar{x}) : i > r\}$$

est finiment réalisable, et on peut le completer à un type $p_r(\bar{x})$ sur un modèle dénombrable contenant $\{\bar{a}_i : i \in \mathbb{Q}\}$. Comme $p_r \neq p_{r'}$ pour $r \neq r'$, on contredit l'ω-stabilité. ■

Remarque 6.15 Par compacité, il y a un n_φ qui ne dépend pas de la suite $(\bar{a}_i : i \in I)$.

En fait, en utilisant un ordre de cardinal λ avec 2^λ coupures à la place de $\mathbb{Q}$, on peut même contredire la stabilité.

Leçon 7

Le rang de Morley

Définition 7.1 Soit T une théorie, et $\bar{x}$ un uple de variables. Le *rang de Morley* RM est défini sur la collection des formules en $\bar{x}$ avec paramètres dans des modèles de T par la récurrence suivante :

1. $RM(\varphi(\bar{x})) \geq 0$.
2. $RM(\varphi(\bar{x})) \geq \alpha + 1$ pour un ordinal α s'il y a une extension élémentaire $\mathfrak{M}$ du modèle, et des formules deux-à-deux contradictoires $\{\varphi_i(\bar{x}) : i < \omega\}$, tel que $RM(\varphi(\bar{x}) \wedge \varphi_i(\bar{x})) \geq \alpha$ pour tout $i < \omega$.
3. $RM(\varphi(\bar{x})) \geq \alpha$ pour α limite si $RM(\varphi(\bar{x})) \geq \beta$ pour tout $\beta < \alpha$.

Proprement dit, ceci définit la condition $RM(\varphi) \geq \alpha$; au cause du lemme suivant, on peut poser $RM(\varphi) = \alpha$ si $RM(\varphi) \geq \alpha$ est vrai, mais $RM(\varphi) \geq \alpha + 1$ ne l'est pas. On pose $RM(\varphi) = \infty$ si $RM(\varphi) \geq \alpha$ pour tout ordinal α. Remarquons que le rang de Morley est évidemment préservé par isomorphisme.

Lemme 7.2 *1. Si $\mathfrak{M} \models \forall \bar{x}\, [\varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x})]$, alors $RM(\varphi) \geq \alpha$ implique $RM(\psi) \geq \alpha$.*

2. Si $RM(\varphi) \geq \alpha$ est vrai et $\alpha > \beta$, alors $RM(\varphi) \geq \beta$ est vrai.

DÉMONSTRATION: (1) est évident par récurrence sur α. On montre (2) par récurrence sur α, l'énoncé étant trivial si $\alpha = 0$ ou limite. Si $RM(\varphi) \geq \alpha + 1$ on trouve φ_0 avec $RM(\varphi \wedge \varphi_0) \geq \alpha$, d'où $RM(\varphi \wedge \varphi_0) \geq \beta$ par hypothèse de récurrence, et $RM(\varphi) \geq \beta$ par la première partie. ■

Proposition 7.3 *1. Soient $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ deux modèles de la même théorie complète. Alors il y a $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}_1$ tel que $\mathfrak{M}_2$ s'injecte élémentairement dans $\mathfrak{N}$.*

2. Soient $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ deux extensions élémentaires de $\mathfrak{M}$. Alors il y a $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}_1$ tel que $\mathfrak{M}_2$ s'injecte élémentairement dans $\mathfrak{N}$ sur $\mathfrak{M}$ (i.e. l'injection est l'identité sur M).

DÉMONSTRATION: On laisse (1) comme exercice, et démontrera (2). Soient $\{c_m : m \in M_2\}$ des nouvelles constantes, et

$$\Phi = \mathrm{Th}(\mathfrak{M}_1, M_1) \cup \{\varphi(c_{m_1}, \ldots, c_{m_k}) : \varphi(\bar{x}) \in \mathcal{L}(M),\ \mathfrak{M}_2 \models \varphi(m_1, \ldots, m_k)\}.$$

Si on prend un nombre fini $\varphi_1(\bar{c}), \ldots, \varphi_n(\bar{c})$ de formules dans Φ avec nouvelles constantes $\bar{c}$, alors $\mathfrak{M}_2 \models \exists \bar{x} \bigwedge_{i=1}^n \varphi_i(\bar{x})$. Donc cet énoncé est vrai dans $\mathfrak{M}$, et ainsi dans $\mathfrak{M}_1$: On peut modéliser toute partie finie de Φ dans $\mathfrak{M}_1$. Par compacite on a un modèle $\mathfrak{N}$ de Φ, extension élémentaire de $\mathfrak{M}_1$, et $n \mapsto c_n^{\mathfrak{N}}$ est une application élémentaire de $\mathfrak{M}_2$ dans $\mathfrak{N}$ qui est l'identité sur M. ■

Corollaire 7.4 *Le rang de Morley d'une formule ne dépend pas du modèle ambient, mais seulement du type sur $\emptyset$ de ses paramètres.*

DÉMONSTRATION: Montrons d'abord par récurrence sur α que si $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ et $\varphi(\bar{x})$ est une formule avec paramètres dans M et $RM(\varphi) \geq \alpha$ calculé par rapport à $\mathfrak{M}$, alors $RM(\varphi) \geq \alpha$ calculé par rapport à $\mathfrak{N}$ (l'autre inégalité étant évident). C'est clair pour $\alpha = 0$ ou limite. Si $\mathfrak{M}' \succ \mathfrak{M}$ et φ_i sont des formules sur $\mathfrak{M}'$ qui témoignent que $RM(\varphi) \geq \alpha + 1$, alors on peut supposer que $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{N}$ ont une extension élémentaire commune $\mathfrak{N}'$; par hypothèse d'induction $RM(\varphi \wedge \varphi_i) \geq \alpha$ pour tout $i < \omega$ par rapport à $\mathfrak{N}'$, d'où $RM(\varphi) \geq \alpha + 1$ par rapport à $\mathfrak{N}$.

Soient maintenant $\bar{a} \in \mathfrak{M}_1$ et $\bar{b} \in \mathfrak{M}_2$ deux uples de même type sur $\emptyset$. Alors on trouve une extension élémentaire commune (quitte à remplacer $\mathfrak{M}_2$ par une copie isomorphe), où $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type. Par la proposition 4.6 il y a une extension élémentaire de $\mathfrak{N}$ où $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont conjugués par un automorphisme σ. Mais alors $RM(\varphi(\bar{x}, \bar{a})) = RM(\varphi(\bar{x}, \bar{b}))$. ■

Proposition 7.5 $R(\varphi \vee \psi) = \max\{RM(\varphi), RM(\psi)\}$. *Si $RM(\varphi) = \alpha$, alors il y a $n < \omega$ tel que sur tout modèle il y a au plus n formules deux-à-deux disjoints $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ avec $RM(\varphi \wedge \varphi_i) = \alpha$ pour $i = 1, \ldots, n$.*

Démonstration: Evidemment $RM(\varphi \vee \psi) \geq \max\{RM(\varphi), RM(\psi)\}$. On montre par récurrence sur α que $RM(\varphi \vee \psi) \geq \alpha$ implique $RM(\varphi) \geq \alpha$ ou $RM(\psi) \geq \alpha$. C'est évident si $\alpha = 0$ ou limite. Soit donc $RM(\varphi \vee \pi) \geq \alpha+1$ et φ_i des formules deux-à-deux contradictoires telles que $RM((\varphi \vee \psi) \wedge \varphi_i) \geq \alpha$ pour tout $i < \omega$. Comme $(\varphi \vee \psi) \wedge \varphi_i$ est équivalent à $(\varphi \wedge \varphi_i) \vee (\psi \wedge \varphi_i)$, par hypothèse d'induction soit $RM(\varphi \wedge \varphi_i) \geq \alpha$, soit $RM(\psi \wedge \varphi_i) \geq \alpha$; on choisit φ ou ψ tel que c'est vrai pour une infinité de $i < \omega$.

Pour le deuxième énoncé, supposons qu'on a de tels formules $\varphi_1^n, \ldots, \varphi_n^n$ pour tout $n < \omega$. Par la proposition 7.3 on peut supposer que ce sont des formules à paramètres dans la même extension élémentaire $\mathfrak{N}$, et que $\mathfrak{N} \models \forall \bar{x}\, [\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^n \varphi_i^n(\bar{x})]$ pour tout $n < \omega$. Par la partie précédente pour tout n on trouve $i \leq n$ et $j \leq n+1$ tels que $\varphi_i^n \wedge \varphi_j^{n+1}$ et $\varphi_i \wedge \neg\varphi_j^{n+1}$ sont de rang de Morley α. On obtient un arbre infini de formules de rang α, dont on peut extraire une suite infinite de formules deux-à-deux contradictoires de rang α. ■

Définition 7.6 1. Le degré de Morley $DM(\varphi)$ d'une formule φ est le n maximal tel qu'on peut diviser φ en n formules de même rang de Morley.

2. Pour un type partiel π on pose $RM(\pi(\bar{x})) = \min\{RM(\varphi(\bar{x})) : \pi \models \varphi\}$ et $DM(\pi(\bar{x})) = \min\{DM(\varphi(\bar{x})) : \pi \models \varphi$ et $RM(\varphi) = RM(\pi)\}$.

3. Si $\mathfrak{M}$ est une structure, $A \subset M$ et $\bar{a} \in M$, on pose $RM(\bar{a}/A) = RM(\mathrm{tp}(\bar{a}/A))$ et $DM(\bar{a}/A) = DM(\mathrm{tp}(\bar{a}/A))$.

Il suit du Corollaire 7.4 que le degré de Morley d'une formule ou d'un type partiel, ainsi que le rang de Morley d'un type partiel, ne dépendent pas du modèle ambient, mais seulement du type des paramètres.

Exercice 7.7 Montrer que $RM(\varphi) = \max\{RM(p) : \varphi \in p\}$.

Proposition 7.8 *Tout type partiel π se complète en un type du même rang de Morley. Si $A \subseteq B \subseteq \mathfrak{M}$, tout type sur A a une extension sur B du même rang.*

Démonstration: Si $\pi(\bar{x})$ est un type partiel sur $A \subseteq M$, on considère l'ensemble

$$\Phi(\bar{x}) = \pi(\bar{x}) \cup \{\neg\varphi(\bar{x}) : \varphi \in \mathcal{L}(A),\, RM(\varphi) < RM(\pi)\}.$$

Par le Corollaire 7.5 toute partie finie de Φ est consistante avec $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$; toute complétion de $\Phi(\bar{x})$ est un type sur $\mathfrak{M}$ de rang $RM(\pi)$.

Pour la deuxième partie, on considère un type sur A comme type partiel sur B. ■

Exercice 7.9 Montrer qu'un type p avec $RM(p) = \alpha$ a $DM(p)$ extensions de même rang.

Théorème 7.10 *$RM(\varphi) < \infty$ pour toute formule φ dans une théorie dénombrable ω-stable.*

DÉMONSTRATION: Comme il n'y a que $|S(T)|$ types d'uples sur $\emptyset$ et ω formules, il y a au plus $|S(T)|$ valeurs possibles pour le rang de Morley. Donc il y a un ordinal α tel que $RM(\psi) \geq \alpha$ implique $RM(\psi) = \infty$ pour toute formule ψ. Supposons $RM(\varphi(\bar{x})) = \infty$. Comme $RM(\varphi) \geq \alpha + 1$, on trouve d'abord $\varphi_\emptyset$ telle que $RM(\varphi \wedge \varphi_\emptyset) \geq \alpha$ et $RM(\varphi \wedge \neg\varphi_\emptyset) \geq \alpha$. Ces rangs sont donc ∞; on peut repeter et trouver récursivement des formules $\varphi_{\bar{s}}$ pour toute suite finie binaire $\bar{s}$ en $\{0, 1\}$, telle que pour tout $(s_0, \ldots, s_n)$

$$RM(\varphi \wedge \bigwedge_{i<n} \neg^{s_i} \varphi_{(s_j : j<i)}) = \infty.$$

Si $\mathfrak{N}$ est un modèle dénombrable qui contient les paramètres de φ et de toutes les $\varphi_{\bar{s}}$, il y a 2^ω types sur $\mathfrak{M}$, et la théorie n'est pas ω-stable. ■

Remarque 7.11 Comme $|S(T)| = \omega$, le rang de Morley ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs. Notons que s' il n'y a pas de formule de rang α, il n'y a pas de formule de rang ordinal supérieur à α (considérer une telle formule de rang minimal). Donc tous les rangs sont des ordinaux dénombrables.

Corollaire 7.12 *Une théorie ω-stable est λ-stable pour tout λ infini.*

DÉMONSTRATION: Soit $\mathfrak{M}$ un modèle de cardinal λ. A chaque type p sur $\mathfrak{M}$ on associe une formule $\varphi \in p$ de même rang de Morley. Cette formule ne contient que $DM(\varphi)$ types de rang $RM(p)$. Donc le nombre total de types est borne par le nombre de formules sur $\mathfrak{M}$, c'est-à-dire λ. ■

Corollaire 7.13 *Soit $\mathfrak{M}$ une structure ω-stable, $A \subseteq M$, et $\varphi(\bar{x})$ une $\mathcal{L}(A)$-formule. Alors il y a une $\mathcal{L}(A)$-formule $\psi(\bar{x})$ qui implique $\varphi(\bar{x})$ modulo* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$, *et qui isole un type complèt sur A.*

Démonstration: Soit $\psi(\bar{x})$ une $\mathcal{L}(A)$-formule de rang et degré de Morley minimal qui implique $\varphi(\bar{x})$. Si $\psi'(\bar{x})$ est une autre formule sur A telle que $\psi \wedge \psi'$ et $\psi \wedge \neg\psi'$ sont consistants, alors par minimalité ils ont le même rang de Morley que ψ. Mais alors $DM(\psi) \geq DM(\psi \wedge \psi') + DM(\psi \wedge \neg\psi')$; comme le degré de Morley est au moins 1, ça contredit la minimalité de $DM(\psi)$. Donc ψ isole un type sur A. ■

Définition 7.14 Soit $\mathfrak{M}$ une structure ω-stable, et $A, B \subseteq M$. On dit qu'un uple $\bar{a} \in M$ est *indépendant* de B sur A, noté $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A B$, si $RM(\bar{a}/A \cup B) = RM(\bar{a}/A)$. Dans ce cas, $\mathrm{tp}(\bar{a}/A \cup B)$ est une extension *non-deviante* de $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$.

Remarque 7.15 Comme le rang de Morley d'un type est le minimum des rangs des formules qu'il contient, l'indépendance est locale : $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A B$ si et seulement si $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A \bar{b}$ pour tout uple $\bar{b} \in B$.

Notons qu'un type de degré de Morley 1 a une unique extension non-deviante sur chaque ensemble de paramètres qui contient son domaine.

Remarque 7.16 Si $A \subseteq B \subseteq C \subseteq \mathfrak{M}$, alors $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A C$ si et seulement si $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A B$ et $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_B C$.

Définition 7.17 Soit $\mathfrak{M}$ une structure ω-stable, $A \subseteq M$, $p \in S(A)$ de degré 1. Une *suite de Morley* dans p est une suite $(\bar{a}_i : i < \alpha)$ tel que $\bar{a}_i$ réalise l'unique extension non-deviante de p à $A \cup \{\bar{a}_j : j < i\}$ pour tout $i < \alpha$.

Lemme 7.18 *Une suite de Morley est indiscernable.*

Démonstration: Pour tout $i_0 < i_1 < \cdots$ on voit récursivement sur n que $\mathrm{tp}(a_{i_0} \ldots a_{i_n}/A) = \mathrm{tp}(a_0 \ldots a_n/A)$. ■

Théorème 7.19 *Soit $\mathfrak{M}$ une structure ω-stable, $A \subseteq M$, et $\bar{a}, \bar{b}$ des uples dans M. Alors $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A \bar{b}$ si et seulement si $\bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A \bar{a}$.*

Démonstration: Supposons $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A \bar{b}$, et soit $n = DM(\bar{a}/A)$. Quitte à remplacer $\mathfrak{M}$ par une extension élémentaire, on trouve $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{M}$ avec $A \subseteq N$ tel que $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ a n extensions non-deviantes $\{p_i : i < n\}$ de degré 1 sur $\mathfrak{N}$. Pour chaque $i < n$ soit $(\bar{a}_i^j : j < \omega)$ une suite de Morley dans p_i, et $\bar{b}'$ une réalisation de $\mathrm{tp}(\bar{b}/A)$ indépendant de $N \cup \{\bar{a}_i^j : i < n, j < \omega\}$.

Si $\bar{a}'$ est tel que $\mathrm{tp}(\bar{a}'\bar{b}'/A) = \mathrm{tp}(\bar{a}\bar{b}/A)$, on peut supposer que $\bar{a}'$ est indépendant de $N \cup \{\bar{a}_i^j : i < n, j < \omega\}$ sur $A\bar{b}'$. Alors

$$RM(\bar{a}'/N, \bar{b}', \bar{a}_i^j : i < n, j < \omega) = RM(\bar{a}'/A, \bar{b}') = RM(\bar{a}/A, \bar{b}) = RM(\bar{a}/A)$$

et $\bar{a}'$ realise une extsion non-deviante de $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$. Donc il y a $i < n$ tel que $\bar{a}'$ réalise l'extension non-deviante de p_i sur $N \cup \{\bar{b}', \bar{a}_i^j : j < \omega\}$; comme ce type a degré 1, on peut prendre $\bar{a}'$ comme premier élément d'une suite de Morley $\bar{a}' = \bar{a}'_0, \bar{a}'_1, \ldots$.

La suite $(\bar{a}_i^j : j < \omega)\hat{}(\bar{a}'_j : j < \omega)$ est une suite de Morley dans p_i et indiscernable par le lemme7.18; si $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})$ et donc $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}', \bar{b}')$, alors $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}'_j, \bar{b}')$ pour tout $j < \omega$, et par le Théorème 6.14 on a $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}_i^j, \bar{b}')$ pour tout $j < \omega$ sauf un nombre fini. En particulier

$$RM(\varphi(\bar{a}, \bar{y}) = RM(\varphi(\bar{a}', \bar{y}) \geq RM(\bar{b}'/N, \bar{a}_i^j : j < \omega) = RM(\bar{b}/A).$$

On en déduit que $RM(\bar{b}/A, \bar{a}) = RM(\bar{b}/A)$, et $\bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A \bar{a}$. ■

Définition 7.20 Soit $\mathfrak{M}$ une structure ω-stable, et $A, B, C \subseteq M$. On dit que A est indépendant de B sur C, noté $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C B$, si $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C B$ pour tout uple fini $\bar{a} \in A$.

Corollaire 7.21 *Soit $\mathfrak{M}$ une structure ω-stable.*

1. EXTENSION *Si $A \subseteq B \subseteq M$ et $C \subseteq M$, il y a (dans une extension élémentaire $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{M}$) un $C' \models \mathrm{tp}(C/A)$ avec $C' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$.*

2. SYMÉTRIE *Si $A, B, C \subseteq M$, alors $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C B$ si et seulement si $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C A$.*

3. TRANSITIVITÉ *Si $B \subseteq C \subseteq D \subseteq M$ et $A \subseteq M$, alors $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B D$ si et seulement si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B C$ et $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C D$.*

4. CHARACTÈRE LOCAL *Pour tout $\bar{a} \in M$ et $B \subseteq M$ il y a un uple $\bar{b} \in B$ avec $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\bar{b}} B$.*

DÉMONSTRATION: 2. et 3. suit des remarques 7.15 et 7.16, du théorème 7.19, et des définitions. Pour 1., notons que si $\bar{c}\bar{c}' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$, alors par symétrie $\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$ et $\bar{c}' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$. Donc le type partiel qui dit que chaque uple $\bar{c} \in C$ ne satisfait aucune $\mathcal{L}(B)$-formule de rang inférieur à $RM(\bar{c}/A)$ est consistant. Enfin pour 4. on prend un uple fini $\bar{b} \in B$ tel que $RM(\bar{a}/\bar{b})$ est minimal. Comme $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\bar{b}} \bar{b}'$ pour tout $\bar{b}' \in B$, on a $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\bar{b}} B$. ■

Théorème 7.22 *Soit $\mathfrak{M}$ une structure ω-stable, $A \subseteq M$ et $p(\bar{x}) \in S(A)$. Alors pour toute formule $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ il y a une $\mathcal{L}(A)$-formule $\psi(\bar{y})$ telle que $\mathfrak{M} \models \psi(\bar{b})$ si et seulement si $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ est dans une extension non-deviante de p sur $A \cup \bar{b}$.*

DÉMONSTRATION: On peut supposer qu'il y a $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{M}$ avec $A \subseteq N$ tel que p a $d := DM(p)$ extensions non-deviantes sur $\mathfrak{N}$. Soient $(\bar{a}_i^j : j < \omega)$ pour $i < d$ des suites de Morley dans ces extensions, et considérons n_φ donné par la remarque 6.15. Soit $\vartheta(\bar{y})$ la formule

$$\bigvee_{i<d} \ \bigvee_{0 \leq k_0 < \cdots < k_{n_\varphi} < 2n_\varphi} \ \bigwedge_{j \leq n_\varphi} \varphi(\bar{a}_i^{k_j}, \bar{y}).$$

Si $\bar{b} \in M$ et p a une extension non-deviante q sur $A \cup \bar{b}$ qui contient $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$, on peut prendre une extension non-deviante q' de q sur $\mathfrak{N} \cup \{\bar{a}_i^j : i < d, j < \omega\}$ et considérer une suite de Morley $(\bar{a}'_j : j < \omega)$ dans q'; comme cette suite prolonge une des $(\bar{a}_i^j : j < \omega)$, on a $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}_i^j, \bar{b})$ pour tous j sauf au plus n_φ. Donc $\mathfrak{M} \models \vartheta(\bar{b})$.

Réciproquement, si $\mathfrak{M} \models \vartheta(\bar{b})$, soit $i < d$ tel que $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}_i^j, \bar{b})$ au moins $n_\varphi + 1$ fois. Soit $(\bar{a}'_j : j < \omega)$ une suite de Morley dans l'extension non-deviante de p_i sur $N \cup \{\bar{b}, \bar{a}_i^j : j < \omega\}$. Alors $\mathfrak{M} \models \phi(\bar{a}'_j, \bar{b})$ pour tout $\bar{a}'_j$ sauf au plus n_φ, et $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ est dans une extension non-deviante de p sur $A \cup \bar{b}$.

Si $\bar{m}$ sont les paramètres dans $\vartheta(\bar{x}, \bar{m})$ et $r(\bar{z}) = \mathrm{tp}(\bar{m}/A)$, alors

$$r(\bar{m}') \cup r(\bar{m}'') \models \forall \bar{x} \, [\vartheta(\bar{x}, \bar{m}') \leftrightarrow \vartheta(\bar{x}, \bar{m}'')],$$

comme l'ensemble défini par $\vartheta(\bar{m})$ est invariant par A-automorphisme. Par compacité une partie finie $\pi(\bar{z})$ de $r(\bar{z})$ suffit pour l'implication; on prend $\psi(\bar{y}) = \exists \bar{z} \, [\vartheta(\bar{y}, \bar{z}) \wedge \bigwedge \pi(\bar{z})]$. ■

Remarque 7.23 En effet, la dernière partie de la preuve montre que si une formule définit un ensemble invariant par tout automorphisme de toute extension élémentaire fixant A, alors elle est équivalente à une formule avec paramètres dans A.

Leçon 8

Modèles premiers

Définition 8.1 Soit $\mathfrak{M}$ une structure, et $A \subseteq M$. Un modèle $\mathfrak{N}$ de $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$ est *premier* sur A s'il s'injecte élémentairement dans chaque modèle de $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$.

Proposition 8.2 *Si $\mathcal{L}$ et A sont dénombrables, un modèle est premier sur A si et seulement s'il est atomique sur A et dénombrable.*

Démonstration: Si $\mathfrak{N}$ est atomique sur A et dénombrable, il s'injecte dans tout modèle de $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$ par l'exercice 5.5. Si $\mathfrak{N}$ n'est pas atomique sur A, il réalise un type p non-isolé. Or, par le thérème d'omission des types il y a un modèle $\mathfrak{N}'$ de $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$ qui omet p. Donc $\mathfrak{N}$ ne s'injecte pas dans $\mathfrak{N}'$. ∎

Ce qui fait marcher l'inclusion dans le cas des modèles atomiques dénombrables, c'est le fait que le type de chaque élément sur ses prédécesseurs est isolé.

Définition 8.3 Soit $\mathfrak{M}$ une structure, $A \subseteq M$, et $I = (a_i : i < \alpha)$ une suite d'éléments dans $\mathfrak{M}$. La suite I est *construite* sur A si $\mathrm{tp}(a_i/A, a_j : j < i)$ est isolé pour tout $i < \alpha$.

Exercice 8.4 Montrer qu'un modèle construit sur A est atomique sur A.

Lemme 8.5 *Si $\mathfrak{M}$ est construit sur A, il est premier sur A.*

Démonstration: L'inclusion σ de $\mathfrak{M}$ dans un autre modèle $\mathfrak{M}'$ de $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$ se fait récursivement : on commence avec l'identité sur A; si on a défini σ sur $A \cup \{a_j : j < i\}$, comme $\mathrm{tp}(a_i/A, a_j : j < i)$ est isolé par une formule $\varphi(x, \bar{a})$, on trouve une réalisation de $\varphi(x, \sigma(\bar{a}))$ dans $\mathfrak{M}'$, qui réalise $\sigma(\mathrm{tp}(a_i/A, a_j : j < i))$. ∎

Corollaire 8.6 *Une théorie ω-stable a des modèles premiers, même construits, sur tout ensemble de paramètres.*

DÉMONSTRATION: Soit $\mathfrak{M}$ un modèle contenant un ensemble A, et $(\varphi_i(x) : i < \alpha)$ une énumération des $\mathcal{L}(M)$-formules réalisées dans $\mathfrak{M}$. On commence avec $A_0 = A$; dans le cas limite on prend la réunion, et si on a construit A_j, on prend $i < \alpha$ minimal tel que les paramètres de φ_i sont dans A_j et $\varphi_i(x)$ n'est pas réalisée dans A_j. Par le corollaire 7.13 on trouve une $\mathcal{L}(A_j)$-formule $\psi_j(x)$ qui isole un type complèt sur A_j; elle est réalisée dans $\mathfrak{M}$ par un élément a_j, et on pose $A_{j+1} = A_j \cup \{a_j\}$.

On s'arrète quand on ne trouve plus de formules non-réalisées; par le test de Tarski l'ensemble $A \cup \{a_j\}_j$ est une sous-structure élémentaire de $\mathfrak{M}$, qui est évidemment construite sur A. ∎

Ce qui est plus difficile à voir, c'est que deux modèles construits sur A sont isomorphes. Le problème, c'est que si $\mathfrak{M}$ est construit sur A et $A \subset B \subset M$, si $B - A$ est infini, on ne sait pas que $\mathfrak{M}$ est construit sur B, ni que B est construit sur A. Dans le cas dénombrable, les seuls $B - A$ qu'on considère sont finis, où c'est le lemme 4.12.

Définition 8.7 Soit $(a_i : i < \alpha)$ une construction sur A. La *clôture* $\mathrm{cl}(a_i)$ d'un élément a_i est défini récursivement par:

- $\mathrm{cl}(a_0) = a_0$.
- Si $\mathrm{tp}(a_i/A, a_j : j < i)$ est isolé par une formule avec paramètres $\bar{a}$, alors $\mathrm{cl}(a_i) = a_i \cup \bigcup_{a \in \bar{a} - A} \mathrm{cl}(a)$.

On pose $\mathrm{cl}(\bar{a}) = \bigcup_{a \in \bar{a}} \mathrm{cl}(a)$.

Comme les ordinaux sont bien ordonnés, la clôture d'un uple fini est fini. Un ensemble $B \subseteq \{a_i : i < \alpha\}$ est *clos* si $\mathrm{cl}(a) \subseteq B$ pour chaque $a \in B$.

Lemme 8.8 *Si $(a_i : i < \alpha)$ est construit sur A et $B \subseteq \{a_i : i < \alpha\}$ est clos, alors B est construit sur A et $\{a_i : i < \alpha\}$ est construit sur AB.*

DÉMONSTRATION: Soit $(b_i : i < \beta)$ l'énumération des a_i où on a supprimé tous les éléments qui ne sont pas dans B. C'est donc une énumération de B; il nous faut voir que c'est une construction. Mais si $b_i = a_k$ et $\mathrm{tp}(a_k/A, a_j : j < k)$ est isolé par une formule $\varphi(x, \bar{a})$, alors $\bar{a} \in A \cup B$ comme B est clos, et $\bar{a} \in A \cup \{b_j : j < i\}$. A fortiori $\varphi(x, \bar{a})$ isole $\mathrm{tp}(b_i/A, b_j : j < i)$.

Ensuite, montrons que $\{a_i : i < \alpha\}$ est atomique sur AB : Si $\bar{a}$ est un uple dans $\{a_i : i < \alpha\}$, pour $a = a_i \in \mathrm{cl}(\bar{a})$ considérons la formule $\varphi_a(x, \bar{b}_a)$ (avec des paramètres additionnels dans A) qui isole $\mathrm{tp}(a_i/A, a_j : j < i)$, et soit

$$\psi(\bar{c}, \bar{b}) = \bigwedge_{a \in \mathrm{cl}(\bar{a})} \varphi_a(a, \bar{b}_a),$$

où $\bar{b} = \mathrm{cl}(\bar{a}) \cap B$ et $\bar{c} = \mathrm{cl}(\bar{a}) - B$. Alors pour tout $\bar{c}' \models \psi(\bar{x}, \bar{b})$ l'ensemble $B\bar{c}'$ est construit sur A de même façon que $B\bar{c}$ (notons que c'est clos; il y a les mêmes formules isolants les types) et donc a le même type sur A. Il suit que $\mathrm{tp}(\bar{c}'/AB) = \mathrm{tp}(\bar{c}/AB)$, et ψ isole ce type. Donc $\mathrm{tp}(\bar{a}/AB)$ est isolé par le lemme 4.12.

On peut maintenant trouver une construction de $\{a_i : i < \alpha\}$ sur AB en énumérant les clôtures des éléments l'une après l'autre. ■

En particulier, on voit que la construction originale est aussi une construction sur AB. En plus, on peut toujours trouver une construction avec $\alpha = |\alpha|$ (c'est-à-dire où les ségments initiaux sont de cardinal strictement inférieur).

Théorème 8.9 *Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ construits sur A. Alors $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont isomorphes sur A.*

Démonstration: Soient $M - A = (m_i : i < \alpha)$ et $N - A = (n_i : i < \alpha)$ deux constructions avec $\alpha = |M - A| = |N - A|$ (ces deux cardinaux sont egaux, comme les deux modèles s'injectent l'un dans l'autre sur A). On va construire une chaîne croissante $\mathrm{id}_A = \sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq \cdots$ d'isomorphismes partiels élémentaires de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$, telle que pour tout $i < \alpha$

- $m_j \in \mathrm{dom}(\sigma_i)$ et $n_j \in \mathrm{im}(\sigma_i)$ pour $j < i$;
- $A_i = \mathrm{dom}(\sigma_i) - A$ et $B_i = \mathrm{im}(\sigma_i) - A$ sont clos.

Alors $\bigcup_{i<\alpha} \sigma_i$ sera l'isomorphisme de $\mathfrak{M}$ à $\mathfrak{N}$.

Pour i limite on pose $\sigma_i = \bigcup_{j<i} \sigma_j$. Supposons donc qu'on a trouvé σ_i. Comme $\mathrm{tp}(m_i/A_i)$ est isolé, on trouve n_j qui réalise $\sigma_i(\mathrm{tp}(m_i/A_i))$, un type isolé sur B_i. Ensuite $\mathrm{tp}(\mathrm{cl}(n_j n_i)/B_i n_j)$ est isolé, et il y a $\bar{c} \in M$ réalisant le type correspondant sur $A_i m_i$; notons que $m_i \in \bar{c}$. On repète avec $\mathrm{cl}(\bar{c})$ etc.; à la fin on obtient deux suites $(a_i : i < \omega)$ et $(b_i : i < \omega)$ (avec $a_0 = m_i$ et $b_0 = n_j$, $b_1 = n_i$) telles que l'application $\sigma_{i+1} : a_i \mapsto b_i$ étend élémentairement σ_i, et $A_{i+1} = A_i \cup \{a_i : i < \omega\}$ et $B_{i+1} = B_i \cup \{b_i : i < \omega\}$ sont clos. ■

Ce qui est plus difficile à voir, et qui est faux en général, c'est que tout modèle premier est construit, ou même que s'il y a un modèle construit, tout modèle premier est construit. Dans le cas dénombrable, ça reste sur le fait qu'un ensemble dénombrable est construit, avec une construction de type ω.

Exemple 8.10 Le langage comporte une famille non-dénombrable $\{E_i : i < \omega_1\}$ de relations binaires, et la théorie affirme que chaque E_i est une relation d'équivalence avec une infinité de classes, et si $j > i$, alors E_j raffine chaque classe de E_i en une infinité de classes. Cette théorie a des modèles premiers non-isomorphes (et donc non-construits) sur $A = \emptyset$.

Lemme 8.11 *Soit $\mathfrak{M}$ une structure ω-stable, $A \subseteq B \subseteq M$, et $\bar{a} \in M$ indépendant de B sur A. Alors si* $\mathrm{tp}(\bar{a}/B)$ *est isolé,* $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ *est isolé.*

Démonstration: Soit $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ une formule qui isole $\mathrm{tp}(\bar{a}/B)$. Par le théorème 7.22 il y a une $\mathcal{L}(A)$-formule $\psi(\bar{x})$ tel que $\mathfrak{M} \models \psi(\bar{a}')$ si et seulement s'il y a $\bar{b}' \models \mathrm{tp}(\bar{b}/A)$ avec $\bar{b}' \downarrow_A \bar{a}'$ et $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}', \bar{b}')$. Donc $\psi \in \mathrm{tp}(\bar{a}/A)$; on voit facilement que ψ isole ce type. ■

Proposition 8.12 *Soit $\mathfrak{M}$ un modèle construit sur A dans une théorie ω-stable. Alors tout sous-ensemble $B \subseteq M$ est construit sur A.*

Démonstration: On peut supposer $A \subseteq B$. Soit $(m_i : i < \alpha)$ une construction de M sur A. On va trouver récursivement une chaîne $A = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots$ de sous-ensembles clos de M telle que $m_i \in M_{i+1}$, $M_{i+1} - M_i$ est dénombrable, et $M_i \downarrow_{M_i \cap B} B$ pour tout $i < \alpha$. Notons que pour i limite on peut prendre $M_i = \bigcup_{j<i} M_j$.

Supposons donc qu'on a trouve M_i, et soit $\bar{b}_0 \in M_i B$ tel que $m_i \downarrow_{\bar{b}_0} M_i B$; on pose $C_0 = M_i \cup \bar{b}_0 \cup \{m_i\}$. Comme $M_i \downarrow_{C_0 \cap B} B$ on a $M_i \bar{b}_0 \downarrow_{C_0 \cap B} B$; transitivité nous donne $C_0 \downarrow_{C_0 \cap B} B$. Le problème, c'est que C_0 n'est pas clos; mais $\mathrm{cl}(C_0) - C_0$ est fini et il y a $\bar{b}_i \in C_0 B$ tel que $\mathrm{cl}(C_0) - C_0 \downarrow_{\bar{b}_1} C_0 B$; on pose $C_1 = \mathrm{cl}(C_0) \cup \bar{b}_1$, et repète ω fois : si $\bar{b}_{j+1}$ est fini tel que $\mathrm{cl}(C_j) - C_j \downarrow_{\bar{b}_{j+1}} C_j B$, on prend $C_{j+1} = \mathrm{cl}(C_j) \cup \bar{b}_{j+1}$, et $M_{j+1} = \bigcup_{j<\omega} C_j$. Alors M_{i+1} sera clos, et $M_{i+1} \downarrow_{M_{i+1} \cap B} B$.

Soit $B_i = M_i \cap B$; il est évident que $B = \bigcup_{i<\alpha} B_i$. Considérons un uple $\bar{b} \in B$. Comme M_i est clos, M est atomique sur M_i par le lemme 8.8, et $\mathrm{tp}(\bar{b}/M_i)$ est isolé. Mais $\bar{b} \downarrow_{B_i} M_i$, d'après le lemme 8.11 le type $\mathrm{tp}(\bar{b}/B_i)$ est aussi isolé : B_{i+1} est atomique sur B_i. Comme $B_{i+1} - B_i$ est dénombrable,

B_{i+1} est construit sur B_i. En concatenant toutes ces constructions, on obtient une construction de B sur A. ■

Corollaire 8.13 *Dans une théorie ω-stable les modèles premiers sur un ensemble A de paramètres sont construits et isomorphes sur A.*

DÉMONSTRATION: Par le corollaire 8.6 il y a un modèle $\mathfrak{M}$ construit sur A. Si $\mathfrak{N}$ est un autre modèle premier sur A, il s'injecte élémentairement dans $\mathfrak{M}$; la proposition 8.12 implique que $\mathfrak{N}$ est aussi construit sur A, et donc isomorphe à $\mathfrak{M}$ sur A par le théorème 8.9. ■

Leçon 9

Paires de Vaught et Théorème de Morley

Définition 9.1 Soit $\mathfrak{M}$ une structure, $p \in S(\mathfrak{M})$ et φ une $\mathcal{L}(M)$-formule. On dit que p est *orthogonal* à φ s'il y a un modèle $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ réalisant p, tel qu'il n'y a pas de réalisation de φ dans $N - M$.

Dans une théorie ω-stable, on peut prendre $\mathfrak{N}$ le modèle premier sur $\mathfrak{M}$ et une réalisation de p.

Lemme 9.2 *Soit $\mathfrak{M}$ une structure ω-stable, $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{M}$, et φ une $\mathcal{L}(N)$-formule. Si $p \in S(M)$ est orthogonal à φ et ne devie pas sur $\mathfrak{N}$, alors $p \restriction \mathfrak{N}$ est orthogonal à φ.*

Démonstration: Supposons que $\bar{a}$ (dans une extension élémentaire $\mathfrak{M}' \succ \mathfrak{M}$ réalise p, et soit $\mathfrak{N}'$ un modèle premier sur $N\bar{a}$. S'il y a une réalisation $\bar{b}$ de φ dans N' qui n'est pas dans N, alosr $\mathrm{tp}(\bar{b}/N\bar{a})$ est isolé par une formule $\psi(\bar{a}, \bar{y})$; comme $\mathrm{tp}(\bar{b}/N)$ n'est pas isolé (sinon $\bar{b} \in N$), par le lemme 8.11 on a $\bar{b} \not\perp_N \bar{a}$, et $RM(\bar{a}/N\bar{b}) < RM(p)$. Mais le modèle premier sur $M\bar{a}$ contient une réalisation $\bar{b}'$ de $\psi(\bar{a}, \bar{y})$; comme $\mathrm{tp}(\bar{b}'/N\bar{a}) = \mathrm{tp}(\bar{b}/N\bar{a})$ on a $\mathfrak{M}' \models \varphi(\bar{b}')$. Par orthogonalité $\bar{b}' \in M$, ce qui contredit

$$RM(\bar{a}/M) \leq RM(\bar{a}/N\bar{b}') = RM(\bar{a}/N\bar{b}) < RM(p) = RM(q). \quad \blacksquare$$

Définition 9.3 Une *paire de Vaught* est une paire de structures $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ tel qu'il y a une $\mathcal{L}(M)$-formule φ infinie, dont les réalisations dans N sont tous déjà dans M.

Théorème 9.4 *Soit $\mathfrak{M} \prec N$ une paire de Vaught d'une théorie ω-stable dénombrable, témoignée par la formule $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$. Alors pour tous $\lambda > \kappa$ infinis il y a une modèle $\mathfrak{M}'$ de $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}, \bar{b})$ de cardinal λ, et qui ne contient que κ réalisations de φ.*

Démonstration: Soit $R(x)$ une nouvelle relation unaire interpretée par M dans $\mathfrak{N}$, et $\mathfrak{N}'$ un modèle λ-saturé de $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}(R)}(\mathfrak{N}, \bar{b})$. Alors $R^{\mathfrak{N}'}$ est une $\mathcal{L}$-sous-structure élémentaire de $\mathfrak{N}'$, et $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ n'est pas réalisée dans N' en dehors de R. Soit $a \in N' - R^{\mathfrak{N}'}$, et $\mathfrak{M}_0 \prec R^{\mathfrak{N}'}$ une $\mathcal{L}$-sous-structure élémentaire de cardinal κ contenant $\bar{b}$, telle que $\mathrm{tp}_{\mathcal{L}}(a/R^{\mathfrak{N}'})$ ne devie pas sur $\mathfrak{M}_0$, et qui contient κ réalisations de $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$. Par saturation $\mathrm{tp}_{\mathcal{L}}(a/M_0)$ est réalisé par un élément $a_0 \in R^{\mathfrak{N}'}$; si $\mathfrak{M}_1 \prec R^{\mathfrak{N}'}$ est le modèle premier sur $M_0 \cup \{a_0\}$, alors φ n'est pas réalisé dans $M_1 - M_0$. On itère λ fois en prenant réunions aux étapes limites; $\mathfrak{M}' = \bigcup_{i<\lambda} \mathfrak{M}_i$ répond aux conditions demandées. ■

Corollaire 9.5 *Une théorie dénombrable catégorique en λ non-dénombrable n'a pas de paire de Vaught.*

Démonstration: Par une réunion de chaîne on construit aisément un modèle de cardinal λ tel que toute formule y a λ réalisations. Comme la théorie est ω-stable par le corollaire 6.7, le théorème 9.4 implique qu'il n'y a pas de paire de Vaught. ■

Lemme 9.6 *Si T est dénombrable ω-stable sans paire de Vaught, pour chaque $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ il y a un n_φ tel que pour tout modèle $\mathfrak{M}$ et tout $\bar{a} \in M$, dès que $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ a n_φ réalisations dans $\mathfrak{M}$, elle y a une infinité.*

Démonstration: Supposons que pour chaque n il y a un modèle $\mathfrak{M}_n$ et $\bar{a}_n$ tel que $n < |\{\bar{m} \in M_n : \mathfrak{M}_n \models \varphi(\bar{m}, \bar{a}_n)\}| < \omega$. En remplaçant $\mathfrak{M}_n$ par une extension élémentaire, on peut supposer qu'il est de cardinal $\lambda > 2^\omega$. Si $\mathfrak{N} = \prod_\omega \mathfrak{M}_n/\mathcal{U}$ est un ultraproduit non-principal et $\bar{a} = [\bar{a}_n]_n$, alors $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ y a 2^ω réalisations, mais $|\mathfrak{N}| = 2^\lambda > 2^\omega$. Il y a une sous-structure $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ de cardinal 2^ω qui contient toutes les réalisations de $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$, et donc une paire de Vaught. ■

Proposition 9.7 *Si T est dénombrable ω-stable sans paire de Vaught, alors sur le modèle premier il y a une formule de rang et degré de Morley* 1.

Démonstration: Soit $\mathfrak{M}$ le modèle premier, et $\varphi(x)$ une $\mathcal{L}(M)$-formule de rang et degré de Morley minimal strictement positif. Si $RM(\varphi) > 1$ ou $DM(\varphi) > 1$, alors dans une extension élémentaire $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ il y a une formule $\psi(x, \bar{n})$ telle que $\varphi \wedge \psi$ et $\varphi \wedge \neg\psi$ sont tous les deux infinis. Comme $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ on trouve $\bar{n}' \in M$ tel que $\varphi(x) \wedge \psi(x, \bar{n}')$ et $\varphi(x) \wedge \neg\psi(x, \bar{n}')$ ont plus que $n_{\varphi\wedge\psi} + n_{\varphi\wedge\neg\psi}$ éléments, et sont donc infinis. Mais alors $\varphi(x) \wedge \psi(x, \bar{n}')$ ou $\varphi(x) \wedge \neg\psi(x, \bar{n}')$ est de rang ou degré strictement inférieur à φ, contradiction. ■

Proposition 9.8 *Une théorie dénombrable ω-stable est catégorique en λ non-dénombrable si et seulement si elle n'a pas de paire de Vaught.*

Démonstration: On vient de voir qu'une théorie λ-catégorique n'a pas de paire de Vaught. Réciproquement soit $\mathfrak{M}$ un modèle de cardinal λ non-dénombrable, et $\varphi(x)$ une formule de rang et degré de Morley 1 sur le modèle premier $\mathfrak{M}_0$. Alors il y a un seul type $p \in S(\mathfrak{M}_0)$ non-algébrique qui contient φ; il est de rang et degré de Morley 1. Soit X un ensemble maximal indépendant de réalisations de p dans M. Comme $RM(p) = 1$, une réalisation a de p qui dépend de réalisations $\bar{a}$ de p est algébrique sur $\bar{a}$; le modèle premier sur M_0X contient donc toutes les réalisations de φ et est égal à $\mathfrak{M}$. Donc $|X| = \lambda$; comme $DM(p) = 1$, en effet X est une suite de Morley dans p.

Si $\mathfrak{M}'$ est un autre modèle de cardinal λ, on trouve d'abord une copie $\mathfrak{M}'_0 \prec \mathfrak{M}'$ du modèle premier, et ensuite une suite de Morley maximale X' du type correspondant p'. L'application canonique $M_0X \to M'_0X'$ est élémentaire, et sétend à un isomorphisme des modèles premiers, c'est-à-dire de $\mathfrak{M}$ à $\mathfrak{M}'$. ■

Corollaire 9.9 Morley *Une théorie dénombrable catégorique en un λ non-dénombrable est catégorique en tout λ non-dénombrable.*

Démonstration: Une telle théorie est ω-stable par le corollaire 6.7. ■