CHAPITRE 12

Systèmes dynamiques continus

Sommaire

Dans ce chapitre, nous abordons le problème de la résolution de systèmes formés de plusieurs équations différentielles linéaires. Dans l'exemple 5.1.2, nous avons exprimé l'évolution de la concentration $x(t)$ d'un polluant dans une cuve en fonction du temps par l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = -\frac{r}{V}\mathbf{x}(t),$$

avec la condition initiale $\mathbf{x}(0) = p_0$. La solution de cette équation est

$$\mathbf{x}(t) = p_0 e^{-\frac{r}{V}t}.$$

Dans l'exemple 5.1.5, nous avons considéré le même problème mais avec trois cuves. L'évolution des concentrations $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ dans chaque cuve est définie par le système différentiel suivant

$$\left|\begin{array}{ll} \dfrac{dx_1(t)}{dt} & = -\dfrac{r}{V}x_1(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} & = \dfrac{r}{V}x_1(t) - \dfrac{r}{V}x_2(t) \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} & = \dfrac{r}{V}x_2(t) - \dfrac{r}{V}x_3(t) \end{array}\right.$$

Ce système s'écrit matriciellement sous la forme

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \tag{12.1}$$

avec

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \\ \dfrac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \frac{r}{V}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nous montrons dans ce chapitreque la solution de l'équation différentielle (12.1) est

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}p_0,$$

où $e^{t\mathbf{A}}$ est l'exponentielle de la matrice $t\mathbf{A}$. Plus généralement, nous donnons une méthode de résolution des systèmes différentiels de la forme :

$$\left|\begin{array}{ll} \dfrac{dx_1(t)}{dt} & = a_1^1 x_1(t) + \cdots + a_1^n x_n(t) \\ \quad\vdots & \qquad\qquad\vdots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} & = a_n^1 x_1(t) + \cdots + a_n^n x_n(t) \end{array}\right.$$

où $a_i^j \in \mathbb{R}$ et les $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions dérivables de variable t, qui s'écrit matriciellement sous la forme

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t),$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \ldots & a_n^n \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},$$

où $\dfrac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$ désigne la dérivé du vecteur $\mathbf{x}(t)$.

§ 1 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

12.1.1. Matrices de variables réelle. — Une *matrice de variable réelle* t de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est une application

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(-) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \\ t &\longmapsto \mathbf{A}(t) \end{aligned}$$

Les coefficients de $\mathbf{A}$ sont alors des fonctions $a_i^j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$. Une matrice est dite *constante* si tous ses coefficients sont constants.

La matrice $\mathbf{A}(t) = [a_i^j(t)]$ de variable réelle t est dite *dérivable*, si tous ses coefficients sont des fonctions dérivables. Sa dérivée est alors la matrice

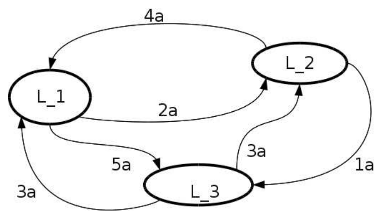
$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \left(\frac{da_i^j(t)}{dt}\right).$$

L'application

$$\frac{d}{dt} : \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$$

est linéaire, *i.e.*, pour toutes matrices $\mathbf{A}(t)$ et $\mathbf{b}(t)$ de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ de variable réelle t, et pour tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$\frac{d}{dt}(\lambda\mathbf{A}(t) + \mu\mathbf{b}(t)) = \lambda\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} + \mu\frac{d\mathbf{b}(t)}{dt}.$$



On suppose que les échanges sont continus. Les lacs L_1, L_2, L_3 contiennent, à l'instant $t = 0$, respectivement q_1, q_2, q_3 grammes de polluant.

8. Écrire les équations décrivant l'évolution de la quantité de polluant dans chaque lac.

9. Déterminer la quantité de polluant dans chaque lac, lorsque t tend vers $+\infty$.

12.2.6 Exercice. — On considère la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & \ldots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \ldots & b & a \end{bmatrix}$$

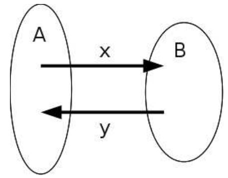
en supposant $n \geq 2$. Déterminer la solution du système différentiel

$$\frac{d\,\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t),$$

prenant en $t = 0$ la valeur $\mathbf{x}(0)$, contenue dans l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ d'équation $x_1 + \ldots + x_n = 0$.

12.2.7 Exercice. — Le problème de diffusion suivant apparaît dans de nombreuses situations biologiques. Considérons deux cellules contenant des composées chimiques. On souhaite étudier la concentration d'un composé injecté dans une cellule, alors que les deux cellules peuvent diffuser mutuellement ce composé.

À l'instant $t = 0$, on injecte une unité d'un composé chimique dans la cellule A. Le composé se diffuse selon les règles suivantes. À chaque instant t, la diffusion du composé de la cellule A vers la cellule B est de x fois la concentration du composé dans la cellule A et la diffusion du composé de la cellule B vers la cellule A est de y fois la concentration du composé dans la cellule B. On suppose $x, y > 0$.



a) Déterminer, à chaque instant t, la concentration du composé dans chacune des deux cellules.

b) Les concentrations du composé dans chaque cellule se stabilisent-elles au bout d'un certain temps ?

En effectuant un décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{x(x-\lambda_2)^2} = \frac{\frac{1}{\lambda_2^2}}{x} + \frac{ax+b}{(x-\lambda_2)^2}.$$

D'après le lemme de décomposition en noyaux, on a

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A}) \oplus \operatorname{Ker}(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{1}_3)^2.$$

La matrice de la projection sur $\operatorname{Ker}(\mathbf{A})$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}-2\mathbf{1}_3)^2$ est donc

$$\Pi_1 = (\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{1}_3)^2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour le calcul de Π_2, il est inutile de déterminer a et b, on exploite la relation $\Pi_2 = \mathbf{1}_3 - \Pi_1$.

On a donc

$$e^{t\mathbf{A}} = \Pi_1 + e^{t\lambda_2}\Pi_2 + e^{t\lambda_2}t(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{1}_3)\Pi_2.$$

D'où

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \Pi_1\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{t\lambda_2}\Pi_2\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{t\lambda_2}t(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{1}_3)\Pi_2\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Comme $\lambda_2 < 0$, on déduit que

$$\lim_{t\to+\infty}\mathbf{x}(t) = \Pi_1\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Par suite, pour $i = 1, 2, 3$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} x_i(t) = \frac{1}{3}x.$$

Autrement dit, à terme le produit chimique se sera diffusé dans les trois cuves de façon homogène, chaque cuve contenant un tiers de la quantité initiale du produit.

12.2.5 Exercice.— On considère la matrice réelle

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \\ 5 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $p_{\mathbf{A}} = -x(x+9)^2$.
2. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre -9.
3. La matrice $\mathbf{A}$ est-elle diagonalisable ?
4. Déterminer le polynôme minimal de $\mathbf{A}$.
5. Exprimer, en fonction de la matrice $\mathbf{A}$, les projecteurs spectraux Π_0 et Π_{-9} de $\mathbf{A}$.
6. Exprimer, en fonction de $\mathbf{A}$, Π_0 et Π_{-9} la matrice $e^{t\mathbf{A}}$, où t est un réel.
7. On considère trois lacs L_1, L_2 et L_3, chacun de volume V, reliés entre eux par un système de canaux permettant de faire circuler l'eau entre les lacs. L'eau circule avec un taux indiqué par la figure suivante.

12.1.2 Proposition.— L'application $\dfrac{d}{dt}$ satisfait les propriétés suivantes.

i) Pour toutes matrices compatibles $\mathbf{A}(t)$ et $\mathbf{b}(t)$, on a

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}(t)\mathbf{b}(t)) = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\mathbf{b}(t) + \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{b}(t)}{dt}.$$

ii) Si $\mathbf{P}$ est une matrice constante et inversible, pour toute matrice $\mathbf{A}(t)$, on a :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}(t)\mathbf{P}) = \mathbf{P}^{-1}\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\mathbf{P}.$$

Preuve. Montrons **i)**. Posons $\mathbf{A}(t) = [a_i^j(t)]$ et $\mathbf{b}(t) = [b_i^j(t)]$. On a

$$(\mathbf{A}\mathbf{b})_i^j = \sum_k a_i^k b_k^j$$

Donc

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\mathbf{b})_i^j = \frac{d}{dt}\left(\sum_k a_i^k b_k^j\right) = \sum_k \frac{d}{dt}(a_i^k b_k^j).$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\mathbf{b})_i^j &= \sum_k\left(\frac{da_i^k}{dt}b_k^j + a_i^k\frac{db_k^j}{dt}\right)\\ &= \sum_k\frac{da_i^k}{dt}b_k^j + \sum_k a_i^k\frac{db_k^j}{dt}\\ &= \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{b}\right)_i^j + \left(\mathbf{A}\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_i^j.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\mathbf{b})_i^j = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{b} + \mathbf{A}\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_i^j.$$

L'assertion **ii)** est une conséquence immédiate de **i)**. Si $\mathbf{P}$ est une matrice constante, on a $\dfrac{d\mathbf{P}}{dt} = 0$. □

12.1.3 Proposition.— Pour toute matrice constante $\mathbf{A}$, on a

$$\frac{d}{dt}e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}} = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{A}. \tag{12.2}$$

Preuve. Soit $\mathbf{A}$ une matrice diagonalisable de spectre $\operatorname{Sp}(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$. D'après le théorème de décomposition spectrale, on a $\mathbf{A} = \lambda_1\Pi_{\lambda_1} + \ldots + \lambda_p\Pi_{\lambda_p}$, d'où

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{\lambda_1 t}\Pi_{\lambda_1} + \ldots + e^{\lambda_p t}\Pi_{\lambda_p},$$

où les Π_{λ_i} sont les projecteurs spectraux de $\mathbf{A}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{t\mathbf{A}} &= \lambda_1 e^{\lambda_1 t}\Pi_{\lambda_1} + \ldots + \lambda_p e^{\lambda_p t}\Pi_{\lambda_p},\\ &= \left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i \Pi_{\lambda_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{p} e^{\lambda_i t}\Pi_{\lambda_i}\right)\\ &= \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}.\end{aligned}$$

Comme $e^{t\mathbf{A}}$ est un polynôme en $\mathbf{A}$, on a $\mathbf{A}e^{t\mathbf{A}} = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{A}$.

Si la matrice $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable, la méthode est la même. On utilise la relation suivante qui découle de la décomposition spectrale algébrique :

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=0}^{k_i-1} t^k e^{\lambda_i t}\frac{(\mathbf{A}-\lambda_i \mathbf{1})^k}{k!}\Pi_{\lambda_i}.$$

□

12.1.4. Systèmes différentiels linéaires. — Un *système différentiel linéaire* du premier ordre à coefficients constants réels (resp. complexes) est la donnée d'une équation

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \qquad (\mathcal{E})$$

où t parcourt un intervalle réel I, $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) et $\mathbf{v} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbf{v} : I \longrightarrow \mathbb{C}^n$) est une application.

L'application $\mathbf{v}$ est appelée *second membre* de l'équation $(\mathcal{E})$. L'*équation homogène* associée à $(\mathcal{E})$ est l'équation différentielle sans second membre :

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \qquad (\mathcal{E}_0)$$

On appelle solution de $(\mathcal{E})$ toute application $\mathbf{x} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbf{x} : I \longrightarrow \mathbb{C}^n$) de classe C^1 et satisfaisant $(\mathcal{E})$, pour tout réel t.

12.1.5 Proposition. —

i) L'ensemble des solutions de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$ forme un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{C}^n)$).

ii) La solution générale de l'équation $(\mathcal{E})$ est la somme d'une solution particulière de $(\mathcal{E})$ et d'une solution générale de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$.

Preuve. Montrons **i)**. De la relation $\dfrac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, on déduit que les solutions $\mathbf{x}(t)$ de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il est immédiat que toute combinaison linéaire de solutions de $(\mathcal{E}_0)$ est solution de $(\mathcal{E}_0)$.

Montrons **ii)**. Supposons que $\mathbf{y}(t)$ soit une solution particulière de l'équation $(\mathcal{E})$ et $\mathbf{x}(t)$ une solution générale de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$. On a

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}(t)-\mathbf{y}(t)) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t)-\mathbf{y}(t)).$$

Par suite $\mathbf{x}(t)-\mathbf{y}(t)$ est solution de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$. □

Par exemple, il circule de la cuve L_1 à la cuve L_2 un volume de $2a$ litres de liquide par seconde, où a est une constante fixée. On suppose que les échanges de liquide entre les cuves sont continus.

On suppose que les trois cuves L_1, L_2 et L_3 ne contiennent que de l'eau. À l'instant $t = 0$, on verse x grammes d'un produit chimique dans la cuve L_1. On souhaite étudier la diffusion de ce produit dans les autres cuves, en particulier déterminer la quantité de polluant dans chaque cuve à chaque instant, puis lorsque t tend vers $+\infty$.

Notons $x_i(t)$ la quantité du produit chimique, exprimée en gramme, dans la cuve L_i à l'instant t. Lorsque $t = 0$, on a $x_1(0) = x$, $x_2(0) = x_3(0) = 0$. La concentration de produit chimique dans la cuve L_i, à l'instant t est $\dfrac{1}{V}x_i(t)$ gramme par litre. LE taux de variation de la quantité du produit chimique dans la cuve L_i est défini par

$$\frac{d\,x_i(t)}{dt} = \left(\begin{array}{c}\text{quantité de produit chimique qui}\\ \text{entre dans la cuve } L_i \text{ par seconde}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{quantité de produit chimique qui}\\ \text{sort de la cuve } L_i \text{ par seconde}\end{array}\right)$$

D'où le système d'équations différentielles :

$$\left|\begin{array}{ll}\dfrac{dx_1(t)}{dt} &= 4\dfrac{a}{V}x_2(t) - 4\dfrac{a}{V}x_1(t)\\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} &= 2\dfrac{a}{V}x_1(t) + 3\dfrac{a}{V}x_3(t) - 5\dfrac{a}{V}x_2(t)\\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} &= 2\dfrac{a}{V}x_1(t) + \dfrac{a}{V}x_2(t) - 3\dfrac{a}{V}x_3(t)\end{array}\right.$$

Ce système s'écrit matriciellement sous la forme

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix} = \frac{a}{V}\begin{bmatrix} -4 & 4 & 0\\ 2 & -5 & 3\\ 2 & 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}.$$

D'après le théorème 12.1.6, la solution de ce système est

$$\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix} = e^{t\mathbf{A}}\begin{bmatrix} x\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

avec

$$\mathbf{A} = \frac{a}{V}\begin{bmatrix} -4 & 4 & 0\\ 2 & -5 & 3\\ 2 & 1 & -3\end{bmatrix}.$$

On calcule le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{A}$:

$$p_{\mathbf{A}} = -x(\frac{6a}{V}+x)^2.$$

Posons $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -\frac{6a}{V}$. On détermine le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_2 :

$$E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}\begin{bmatrix} -2\\ 1\\ 1\end{bmatrix}.$$

Par suite, la matrice $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable et son polynôme minimal est $m_{\mathbf{A}} = x(\dfrac{6a}{V}+x)^2$.

et

$$\int_0^t e^{-s}(s-1)ds = (2-t)e^{-t} - 2.$$

Par suite,

$$\int_0^t e^{(t-s)\mathbf{A}}\mathbf{v}(s)ds = -\frac{e^{4t}}{12}\big((\frac{3}{4}+t)e^{-4t}-1\big)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{e^t}{3}\big((2-t)e^{-t}-2\big)\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}(0) &= e^{4t}\Pi_4\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} + e^t\Pi_1\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\\ &= \frac{e^{4t}}{3}(x_1+x_2+x_4)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{e^t}{3}\begin{bmatrix}-2x_1+x_2+x_3\\x_1-2x_2+x_3\\x_1+x_2-2x_3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Le système différentiel admet donc pour solution

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) = \frac{e^{4t}}{3}\big((x_1+x_2+x_4) - \frac{1}{4}\big((\frac{3}{4}+t)e^{-4t}-1\big)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\\ -\frac{e^t}{3}\begin{bmatrix}-2x_1+x_2+x_3\\x_1-2x_2+x_3\\x_1+x_2-2x_3\end{bmatrix} + \frac{e^t}{3}\big((2-t)e^{-t}-2\big)\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

12.2.3 Exercice.— Résoudre le système différentiel

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix}1\\t\\1\end{bmatrix},$$

pour les matrices suivantes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix}-1&1&3\\-2&2&2\\-2&1&4\end{bmatrix}.$$

12.2.4. Exemple.— On considère un ensemble de trois cuves dans une usine chimique, reliées entre elles par un système de canalisations. Les cuves L_1, L_2 et L_3 ont chacune le même volume V. Le système de canalisation permet un échange du liquide contenu dans les trois cuves. Les canalisations et les débits de chacune d'elles sont représentés par la figure 12.1.

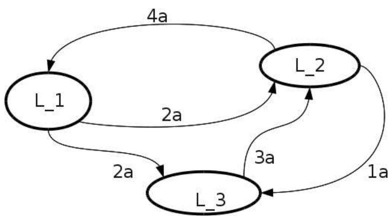


FIGURE 12.1 – Trois lacs reliés par des canaux

12.1.6 Théorème.— La solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ avec la condition initiale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ existe et est unique. Elle est donnée par

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{(t-s)\mathbf{A}}\mathbf{v}(s)ds.$$

Preuve. Nous admettrons l'unicité. L'existence peut se montrer en utilisant la méthode de la variation de la constante. D'après la relation (12.2), pour tout vecteur constant $\mathbf{y}$,

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{y},$$

est solution de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$. On cherche une solution de $(\mathcal{E})$ sous la forme

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{y}(t),$$

où $\mathbf{y}(t)$ est un vecteur dépendant de t. On a :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}\mathbf{y}(t) + e^{t\mathbf{A}}\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt},\\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + e^{t\mathbf{A}}\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt}.\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{x}(t)$ est solution de l'équation $(\mathcal{E})$, on obtient

$$e^{t\mathbf{A}}\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{v}(t).$$

La matrice $e^{t\mathbf{A}}$ est inversible. On a donc

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = e^{-t\mathbf{A}}\mathbf{v}(t).$$

Soit

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t e^{-s\mathbf{A}}\mathbf{v}(s)ds + \mathbf{y}_0.$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{t\mathbf{A}}\mathbf{y}(t),\\ &= e^{t\mathbf{A}}\int_0^t e^{-s\mathbf{A}}\mathbf{v}(s)ds + e^{t\mathbf{A}}\mathbf{y}_0,\\ &= \int_0^t e^{(t-s)\mathbf{A}}\mathbf{v}(s)ds + e^{t\mathbf{A}}\mathbf{y}_0.\end{aligned}$$

Or $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ donc $\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0$. On a ainsi

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{(t-s)\mathbf{A}}\mathbf{v}(s)ds.$$

□

12.1.7 Proposition. — La solution de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$ avec la condition initiale $\mathbf{x}_0$ est
$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0.$$
De plus, l'espace des solutions de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$ est de dimension n. Une base de cet espace est donnée par les vecteurs colonnes de la matrice $e^{t\mathbf{A}}$.

Preuve. La première assertion est une conséquence immédiate du théorème précédent. Notons $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n$ les colonnes de la matrice $e^{t\mathbf{A}}$:
$$e^{t\mathbf{A}} = \big[\, \mathbf{C}_1 \,|\, \mathbf{C}_2 \,|\, \ldots \,|\, \mathbf{C}_n \,\big].$$
Si le vecteur $\mathbf{x}_0$ a pour composante x_0^i, on a
$$\mathbf{x}(t) = \big[\, \mathbf{C}_1 \,|\, \mathbf{C}_2 \,|\, \ldots \,|\, \mathbf{C}_n \,\big] \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ \vdots \\ x_0^n \end{bmatrix}.$$
D'où $\mathbf{x}(t) = x_0^1\mathbf{C}_1 + \ldots + x_0^n\mathbf{C}_n$, ainsi la famille $(\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n)$ forme une base de l'espace des solutions de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$. □

§ 2 Exemples

12.2.1. Exemple. — Le système différentiel
$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{12.3}$$
a pour solution $\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0$. Il nous suffit donc de déterminer la matrice $e^{t\mathbf{A}}$.

Le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{A}$ est $p_{\mathbf{A}} = -(x-1)(x-2)^2$, son polynôme minimal est $(x-1)(x-2)^2$. La matrice $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable.

Déterminons une identité de Bézout entre les polynômes premiers entre eux $x-1$ et $(x-2)^2$. En effectuant un décomposition en éléments simples :
$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{-1}{(x-2)} + \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{3-x}{(x-2)^2}.$$
D'où l'identité de Bézout :
$$1 = (x-2)^2 + (3-x)(x-1).$$
On en déduit les projecteurs spectraux de $\mathbf{A}$
$$\Pi_1 = (\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_3)^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\Pi_2 = (-\mathbf{A} + 3\mathbf{1}_3)(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour calculer ce dernier, on aurait pu aussi exploiter la relation $\Pi_2 = \mathbf{1}_3 - \Pi_1$, moins coûteuse en calculs.

De la relation (10.6), on déduit que
$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= t^0\frac{e^t}{0!}(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3)^0\Pi_1 + t^0\frac{e^{2t}}{0!}(\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_3)^0\Pi_2 + t\frac{e^{2t}}{1!}(\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_3)\Pi_2, \\ &= e^t\mathbf{1}_3\Pi_1 + e^{2t}(\mathbf{1}_3 + t(\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_3))\Pi_2, \\ &= e^t\Pi_1 + e^{2t}\Pi_2 + te^{2t}(\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_3)\Pi_2. \end{aligned}$$
D'où :
$$e^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^t + 2te^{2t} & -e^t + e^{2t} & -te^{2t} \\ 2te^{2t} & e^{2t} & -te^{2t} \\ 2e^t + 2(2t-1)e^{2t} & 2(e^{2t} - e^t) & (1-2t)e^{2t} \end{bmatrix}.$$
On en déduit la solution du système différentiel (12.3).

12.2.2. Exemple. — Le système différentiel
$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} \tag{12.4}$$
a pour solution
$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{(t-s)\mathbf{A}}\mathbf{v}(s)ds.$$
D'après l'exemple 9.2.1, la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable, de spectre $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \{1, 4\}$ et ses projecteurs spectraux sont
$$\Pi_1 = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \Pi_4 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
On a $\mathbf{A} = \Pi_1 + 4\Pi_4$, d'où, pour tous réel t et s, on a
$$e^{(t-s)\mathbf{A}} = e^{4(t-s)}\Pi_4 + e^{(t-s)}\Pi_1. \tag{12.5}$$
Par ailleurs,
$$\Pi_1\mathbf{v}(s) = \frac{s-1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \Pi_4\mathbf{v}(s) = \frac{2+s}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{12.6}$$
Des équations (12.5) et (12.6), on déduit que
$$\begin{aligned} \int_0^t e^{(t-s)\mathbf{A}}\mathbf{v}(s)ds &= \int_0^t e^{4(t-s)}\frac{2+s}{3}ds \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{(t-s)}\frac{s-1}{3}ds \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \\ &= \frac{e^{4t}}{3}\int_0^t e^{-4s}(2+s)ds \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{e^t}{3}\int_0^t e^{-s}(s-1)ds \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$
Or, on a :
$$\int_0^t e^{-4s}(2+s)ds = -\frac{1}{4}\big((\frac{3}{4} + t)e^{-4t} - 1\big),$$