CHAPITRE
5

Pour se mettre en appétit

Sommaire

§ 1 Équations d'évolution linéaire couplées

5.1.1. Évolution discrète du temps.— On s'intéresse à l'évolution d'une population de renards dans une forêt au cours des années. Supposons que le nombre de renards l'année n est proportionnel au nombre de renards l'année précédente $n-1$. En désignant par $x(n)$ le nombre de renards vivant dans la forêt l'année n, l'évolution du nombre de renards se modélise par l'équation

$$x(n) = ax(n-1), \tag{5.1}$$

où a est une constante positive réelle. Cet exemple est un modèle d'évolution *linéaire*. La population est croissante si $a > 1$ et en extinction si $a < 1$. Si $a = 1$ la population reste constante à sa valeur initiale. Connaissant la population initiale $x(0)$ de renards l'année 0, de l'équation de récurrence 5.1, on déduit le nombre de renards en fonction de l'année n :

$$x(n) = a^n x(0).$$

De nombreux problèmes d'évolution discrète linéaire peuvent être décrits par une telle équation.

5.1.2. Évolution continue du temps.— Afin d'illustrer les problèmes d'évolution continue, considérons une cuve pleine d'eau de volume V litre et contenant p litre de polluant à l'instant

$t = 0$. Un robinet d'eau non polluée verse dans la cuve à raison de r litre d'eau par seconde. Afin de maintenir la quantité d'eau constante dans la cuve, un robinet vide la cuve à raison de r litre d'eau par seconde, comme indiqué sur la figure 5.1.

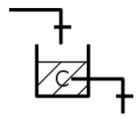


FIGURE 5.1 – Évolution de la concentration de polluant dans une cuve

On souhaite déterminer la quantité de polluant dans la cuve à tout instant t. Notons $x(t)$ la quantité de polluant dans la cuve à l'instant t. Le taux de variation de la quantité de polluant par rapport au temps s'exprime par

$$\frac{dx(t)}{dt} = \text{concentration qui arrive} - \text{concentration évacuée.}$$

L'eau versée dans la cuve étant non polluée, la concentration de poluant qui arrive est nulle et la concentration évacuée est $\frac{r}{V}x(t)$, on a donc

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0 - \frac{r}{V}x(t), \tag{5.2}$$

avec la condition initiale $x(0) = p_0$. Cette équation différentielle admet pour solution

$$x(t) = e^{-\frac{r}{V}t}p_0.$$

5.1.3. Équations couplées, la cas discret. — Dans de nombreuses situations, on étudie l'évolution de plusieurs espèces cohabitant dans un même écosystème. Le système est alors décrit par plusieurs variables du temps $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ qui représentent le nombre d'individus de chaque espèce. Ces variables dépendent les unes des autres, on dit qu'elles sont « *couplées* ».
Il existe plusieurs cas d'évolution :

- chaque population a un effet négatif sur la croissance des autres populations, il s'agit de la *compétition interspécifique*,
- on parle de relations *proie-prédateur* ou *hôte-parasite*, lorsqu'une population a un effet positif sur une autre, mais l'effet est négatif dans l'autre sens,
- chaque population a un effet positif sur la croissance des autres populations, on parle alors d'évolution en *symbiose*.

5.1.4. Un modèle proie-prédateur. — Comme illustration du modèle proie-prédateur, considérons les populations de renards et de mulots dans une forêt. L'évolution de ces deux populations est liée du fait que l'on suppose que les renards mangent les mulots. En conséquence, plus il y aura de mulots, plus les renards auront à manger ; on peut supposer alors que cela encourage leur reproduction, par suite le nombre de renards augmente. D'autre part, plus il y aura de renards, plus de mulots seront mangés, ce qui va réduire la population de mulots l'année suivante.

Ces deux espèces sont ainsi en interaction, on peut modéliser cette interaction de la façon suivante. Notons respectivement par $x_1(n)$ et $x_2(n)$ le nombre de renards et de mulots l'année n. Les équations qui décrivent l'évolution des deux populations forment le système :

$$\left| \begin{array}{ll} x_1(n) & = ax_1(n-1) + bx_2(n-1), \\ x_2(n) & = -cx_1(n-1) + dx_2(n-1), \end{array} \right. \tag{5.3}$$

où a, b, c, d sont quatre constantes réelles positives. On regroupe les deux quantités $x_1(n)$ et $x_2(n)$ pour former un vecteur

$$\mathbf{x}(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}.$$

Le système d'équation (5.3) s'écrit alors sous la forme d'une seule équation

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n-1), \tag{5.4}$$

où $\mathbf{A}$ désigne la matrice

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -c & d \end{bmatrix}$$

L'équation (5.4) est une généralisation au cas de plusieurs variables de l'équation (5.1). De la même façon que dans le cas à une seule variable, connaissant les deux populations l'année 0, *i.e.*, étant donné le vecteur $\mathbf{x}(0)$, on montre par récurrence que le nombre de renards et de mulots l'année n est donné par

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}^n\mathbf{x}(0).$$

5.1.5. Équations couplées, la cas continu.— On considère le problème de concentration de polluant de l'exemple 5.1.2, mais maintenant avec trois cuves. On dispose trois cuves pleines d'eau polluée, d'un volume V chacune, de telle façon que l'eau circule entre elles selon le schéma de la figure 5.2.

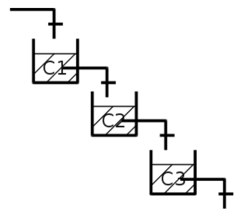


FIGURE 5.2 – Évolution de la concentration de polluant dans trois cuves

Il y a r litre d'eau par seconde qui passe de la cuve C_1 à la cuve C_2, de la cuve C_2 à la cuve C_3 et de la cuve C_3 à l'égout. De plus r litre d'eau pur par seconde est versé dans la cuve C_1. Les cuves contiennent initialement p_1, p_2 et p_3 litre de polluant respectivement. On souhaite déterminer la quantité de polluant qui se trouve dans chacune des cuves à chaque instant t de l'évolution du système.

Notons $x_i(t)$ la quantité de polluant dans la cuve i, à l'instant t. On a

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \text{concentration qui arrive} - \text{concentration évacuée}.$$

La concentration du polluant évacuée de la cuve i est donc $\frac{r}{V}x_i(t)$. Les quantités de polluant satisfont donc le système différentiel suivant :

$$\left|\begin{array}{ll} \dfrac{dx_1(t)}{dt} & = -\dfrac{r}{V}x_1(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} & = \dfrac{r}{V}x_1(t) - \dfrac{r}{V}x_2(t) \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} & = \dfrac{r}{V}x_2(t) - \dfrac{r}{V}x_3(t) \end{array}\right.$$

Ce système s'écrit matriciellement sous la forme

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \frac{r}{V}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}.$$

Ou encore,

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \tag{5.5}$$

en posant

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \frac{r}{V}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

et où $\dfrac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$ désigne la dérivée du vecteur $\mathbf{x}(t)$:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \frac{dx_3(t)}{dt} \end{bmatrix}.$$

Nous montrerons plus loin dans le cours que l'équation (5.5) admet pour solution

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}(0), \tag{5.6}$$

où $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$ désigne le vecteur représentant les concentrations de polluant dans les trois cuves à l'instant $t = 0$ et où $e^{\frac{rt}{V}\mathbf{A}}$ est la matrice définie par une série de matrices :

$$e^{\frac{rt}{V}\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{rt}{V}\mathbf{A}\right)^k.$$

Nous justifierons plus loin cette définition et nous présenterons des méthodes de calcul des exponetielles de matrices. On remarquera l'analogie entre la solution (5.6) et la solution de l'équation différentielle (5.2).

Comme dans le cas discret, le calcul de la solution passe ainsi par celui des puissances de la matrice $\mathbf{A}$. Nous allons voir comment l'on peut réduire le calcul des puissances de $\mathbf{A}$ à celui des puissances d'une matrice diagonale semblable à $\mathbf{A}$. On appelle cette opération le *découplage*.

§ 2 Le découplage de système d'équations

Nous allons montrer que pour résoudre un système d'équations couplées, il est judicieux de transformer ce système en un système découplé. Dans un premier temps, on montre que la résolution d'un système découplé est immédiate.

5.5.3 Exercice.— On considère les deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{bmatrix}.$$

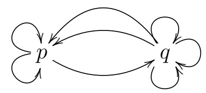
1. Écrire $\mathbf{A}$ comme combinaison linéaire de $\mathbf{I}$ et $\mathbf{1}_n$.
2. Calculer les matrices $\mathbf{I}^k$ et $\mathbf{A}^k$, pour tout entier naturel k.

5.5.4 Exercice.— Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que la matrice $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ est de la forme

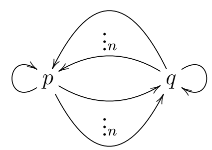
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

2. Combien y a-t-il de chemins de longueur 2, 3 et 4 dans le graphe ci-dessous ?

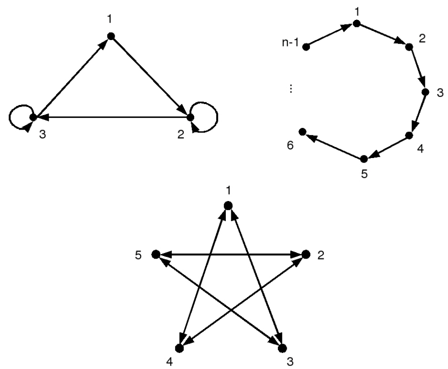


3. Comparer les résultats avec $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$, $\mathbf{A}^4$ que l'on calculera à l'aide de la matrice $\mathbf{D}$.

4. Déterminer, pour tout entier $k \geq 1$, le nombre de chemins de longueur k dans le graphe suivant



5.5.5 Exercice.— Écrire les matrices d'adjacence des graphes suivants



Pour calculer le nombre d'itinéraires possibles en k jours d'une ville à une autre, on calcule les coefficients de la matrice $\mathbf{G}^k$. La matrice $\mathbf{G}$ est diagonalisable. On montre en effet

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P},$$

avec

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Comme $\mathbf{G} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$, on a

$$\mathbf{G}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}\ldots\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1},$$

soit

$$\mathbf{G}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}.$$

Donc

$$\mathbf{G}^k = \mathbf{P}\begin{bmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}.$$

Soit

$$\mathbf{G}^k = \frac{2^k}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{(-1)^k}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

En particulier,

$$\mathbf{G}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^4 = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

§ 5 Exercices

5.5.1 Exercice.— Soit Π le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x+3y+5z = 0$ et soit Δ la droite d'équation $3x = 5y = 15z$. Notons π la projection de $\mathbb{R}^3$ sur le plan Π parallèlement à la droite Δ.

1. Écrire la matrice de l'endomorphisme π dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. Sans calcul, trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de π est la plus simple possible, *i.e.*, ayant le plus grand nombre de coefficients nuls.

5.5.2 Exercice.— Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E vérifiant $u^2 = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E).$$

2. Montrer que si $u \neq \mathrm{Id}_E$ et $u \neq -\mathrm{Id}_E$, alors il existe une base de E dans laquelle l'endomorphisme u est représenté par la matrice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}_q \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{1}_p$ et $\mathbf{1}_q$ désignent les matrices identités de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ at $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ respectivement.

5.2.1. Les équations découplées.— Supposons que nous ayons une équation d'évolution discrète

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1),$$

avec par exemple

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

L'équation est équivalente au système de deux équations linéaires :

$$\left|\begin{array}{l} x_1(k) = 3x_1(k-1) \\ x_2(k) = 5x_2(k-1) \end{array}\right.$$

Ces équations sont dites *non couplées*, car $x_1(k)$ ne dépend que des valeurs des $x_1(i)$, pour $i \leq k$, et est indépendant des valeurs de $x_2(i)$. De même pour $x_2(k)$ qui ne dépend que des valeurs de $x_2(i)$, pour $i \leq k$.

Les solutions du système se déduisent par une simple récurrence :

$$x_1(k) = 3^k x_1(0) \quad \text{et} \quad x_2(k) = 5^k x_2(0).$$

5.2.2. Le découplage.— Considérons le système suivant de deux équations couplées :

$$\left|\begin{array}{ll} x_1(k) & = 2x_1(k-1) + x_2(k-1), \\ x_2(k) & = x_1(k-1) + 2x_2(k-1). \end{array}\right. \tag{5.7}$$

Afin de résoudre ce système, nous effectuons le changement de variables suivant :

$$y_1(k) = \frac{x_1(k) + x_2(k)}{2}, \qquad y_2(k) = \frac{x_1(k) - x_2(k)}{2}. \tag{5.8}$$

On a alors

$$x_1(k) = y_1(k) + y_2(k), \qquad x_2(k) = y_1(k) - y_2(k). \tag{5.9}$$

En additionnant et soustrayant les deux équations du système précédent, on obtient

$$\left|\begin{array}{ll} y_1(k) & = 3y_1(k-1), \\ y_2(k) & = y_2(k-1). \end{array}\right. \tag{5.10}$$

Ce dernier système est découplé, il admet pour solutions :

$$y_1(k) = 3^k y_1(0), \qquad y_2(k) = y_2(0).$$

On peut alors résoudre notre problème initial. On a

$$y_1(0) = \frac{x_1(0) + x_2(0)}{2}, \qquad y_2(0) = \frac{x_1(0) - x_2(0)}{2}.$$

D'où

$$y_1(k) = 3^k\frac{x_1(0) + x_2(0)}{2}, \qquad y_2(k) = \frac{x_1(0) - x_2(0)}{2}.$$

Et en utilisant les équations (5.9), on obtient

$$x_1(k) = \frac{3^k+1}{2}x_1(0) + \frac{3^k-1}{2}x_2(0), \qquad x_2(k) = \frac{3^k-1}{2}x_1(0) + \frac{3^k+1}{2}x_2(0). \tag{5.11}$$

5.2.3. Exégèse matricielle. — Le système (5.7) s'écrit sous la forme matricielle suivante

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1),$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}.$$

Le changement de variable (5.8) consiste à considérer la matrice

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

et définir le vecteur $\mathbf{y}(k)$ par

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{Q}\mathbf{x}(k). \tag{5.12}$$

Par ailleurs, le changement de variable (5.9) s'écrit matriciellement sous la forme :

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{P}\mathbf{y}(k), \quad \text{avec} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{5.13}$$

On vérifiera que $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$. Le système découplé (5.10) s'écrit matriciellement sous la forme

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}(k-1).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k \mathbf{y}(0) \\ &= \begin{bmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}(0). \end{aligned}$$

Donc, de (5.12), on déduit que $\mathbf{y}(0) = \mathbf{Q}\mathbf{x}(0)$, d'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3^k(x_1(0) - x_2(0)) \\ x_1(0) - x_2(0) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

D'après (5.13), on en déduit finalement que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^k(x_1(0) - x_2(0)) \\ x_1(0) - x_2(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3^k/2(x_1(0) + x_2(0)) + (x_1(0) - x_2(0)) \\ 3^k/2(x_1(0) + x_2(0)) - (x_1(0) - x_2(0)) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ceci correspond à la solution que nous avons obtenu en (5.11).

Le choix du changement de variable (5.13) pour obtenir un système découplé, *i.e.*, avec une matrice diagonale, est possible car il existe deux ≪ *vecteurs propres* ≫

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

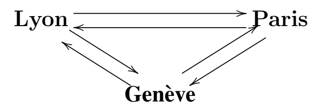


FIGURE 5.3 – Liaisons féroviaires entre trois villes

est la matrice

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.4.3 Proposition. — Soient $\mathbf{G}$ la matrice associée à un graphe $\mathcal{G}$ et k un entier naturel. Le nombre de chemins de longueur k du sommet j au sommet i dans le graphe $\mathcal{G}$ est donnée par le coefficient $(\mathbf{G}^k)^i_j$.

Preuve. On obtient ce résultat par récurrence sur la longueur du nombre de chemins. Le nombre de chemins de longueur 2 de j à i est

$$\sum_{l=1}^{n} \mathbf{G}^l_j \mathbf{G}^i_l,$$

car $\mathbf{G}^l_j$ est le nombre de chemins de longueur 1 de j à l et $\mathbf{G}^i_l$ est le nombre de chemins de longueur 1 de l à i. Cette somme correspond au coefficient $(\mathbf{G}^2)^i_j$.

On suppose que, pour tous i, j, $(\mathbf{G}^{k-1})^i_j$ est le nombre de chemins de longueur $k-1$ entre i et j. Alors

$$(\mathbf{G}^k)^i_j = \sum_{l=1}^{n} (\mathbf{G}^{k-1})^l_j \mathbf{G}^i_l.$$

□

5.4.4. Exemple. — Un conducteur de train réalise chaque jour un trajet reliant l'une des trois villes de la figure 5.3. Chaque jour, il ne peut faire qu'un des trajets indiqués. En deux jours, il ne pourra donc faire que les quatre trajets suivants au départ de Lyon :

$$\text{Lyon} \to \text{Paris} \to \text{Genève}$$

$$\text{Lyon} \to \text{Genève} \to \text{Paris}$$

$$\text{Lyon} \to \text{Genève} \to \text{Lyon}$$

$$\text{Lyon} \to \text{Paris} \to \text{Lyon}$$

Les itinéraires possibles forment les chemins d'un graphe dont les sommets sont les villes. La matrice de ce graphe est

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi

$$[u]_{\mathcal{C}\mathrm{an}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors que, étant donnée une base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ du plan Π, la famille $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$; dans cette base, on a

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ce qui montre que l'endomorphisme u est diagonalisable. On observera que

$$\mathbb{R}^3 = \Pi \oplus \Delta = \mathrm{Vect}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) \oplus \mathrm{Vect}(\mathbf{e}),$$

et que

i) pour tout $\mathbf{x} \in \Pi$, $u(\mathbf{x}) = \mathbf{x} = 1.\mathbf{x}$,

ii) pour tout $\mathbf{x} \in \Delta$, $u(\mathbf{x}) = 0 = 0.\mathbf{x}$.

On dit dans ce cas qu'il existe deux directions *globalement invariantes* et que u admet pour *valeurs propres* 1 et 0. Nous montrerons que tout endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ admettant deux valeurs propres disctinctes est diagonalisable.

5.3.5. Exemple. — Soit r_θ la rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle θ et de centre l'origine. La matrice de r_θ dans la base canonique est

$$[r_\theta]_{\mathcal{C}\mathrm{an}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Si $\theta \neq k\pi$, alors il n'existe pas de direction globalement invariante et r_θ ne possède pas de valeurs propres. Dans ce cas, il est impossible de trouver une base de diagonalisation, ainsi l'endomorphisme r_θ n'est pas diagonalisable.

§ 4 Marches sur un graphe et diagonalisation

5.4.1. Graphes orientés. — Un *graphe (orienté fini)* $\mathcal{G}$ est la donnée d'un ensemble fini de *sommets* $\mathcal{S}$, d'un ensemble fini d'*arcs* $\mathcal{A}$, de deux applications

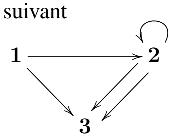
$$s : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{S}, \quad t : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{S}$$

appelées respectivement *source* et *but*. Un arc de source p et de but q est noté graphiquement de la façon suivante

$$p \longrightarrow q.$$

5.4.2. Matrices d'adjacence. — Soit $\mathcal{G}$ un graphe à n sommets. On suppose que les sommets sont numérotés de 1 à n. On associe au graphe G, une matrice $\mathbf{G}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{G}^i_j$ est le nombre d'arcs de source j et de but i dans $\mathcal{G}$. Cette matrice est appelée la *matrice d'adjacence* du graphe $\mathcal{G}$.

Par exemple, la matrice du graphe suivant



de la matrice $\mathbf{A}$ associés respectivement aux « *valeurs propres* » 3 et 1 de la matrice $\mathbf{A}$. C'est-à-dire que l'on a

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{A}$ est semblable à une matrice diagonale :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

La première matrice dans le second membre de l'égalité est l'inverse de la matrice de changement de base

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

formée de deux vecteurs propres associés aux deux valeurs propres.

Nous retiendrons que « découpler » un système revient à le « diagonaliser ». On a construit deux matrices de changement de bases $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ telles que

$$\mathbf{D} = \mathbf{QAP},$$

ou de façon équivalente

$$\mathbf{A} = \mathbf{PDQ},$$

car $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ sont inverses l'une de l'autre. Ainsi, le calcul des puissances de $\mathbf{A}$ se réduit à celui des puissances de $\mathbf{D}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{x}(0) \arrow[r, rightsquigarrow, "\mathbf{A}"] \arrow[d, "\mathbf{Q}"'] & \mathbf{x}(1) \arrow[r, rightsquigarrow, "\mathbf{A}"] & \mathbf{x}(2) \arrow[r, rightsquigarrow, "\mathbf{A}"] & \cdots \arrow[r, rightsquigarrow, "\mathbf{A}"] & \mathbf{x}(k-1) \arrow[r, rightsquigarrow, "\mathbf{A}"] & \mathbf{x}(k) \\
\mathbf{y}(0) \arrow[r, "\mathbf{D}"'] & \mathbf{y}(1) \arrow[u, "\mathbf{P}"'] \arrow[r, "\mathbf{D}"'] & \mathbf{y}(2) \arrow[u, "\mathbf{P}"'] \arrow[r, "\mathbf{D}"'] & \cdots \arrow[r, "\mathbf{D}"'] & \mathbf{y}(k-1) \arrow[u, "\mathbf{P}"'] \arrow[r, "\mathbf{D}"'] & \mathbf{y}(k) \arrow[u, "\mathbf{P}"']
\end{tikzcd}$$

Plus généralement, nous montrerons dans ce cours que lorsque l'on peut trouver n valeurs propres différentes d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut résoudre un système couplé

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1)$$

en considérant un système découplé

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{D}\mathbf{y}(k-1).$$

§ 3 La diagonalisation des matrices et des endomorphismes

5.3.1. Problème de diagonalisation des matrices. — De nombreux problèmes comme celui du découplage conduisent au problème suivant :

Donnée : $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Question : Trouver une matrice inversible $\mathbf{P}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telle que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ soit diagonale.

Nous verrons qu'il existe de nombreuses autres situtations dans lesquelles ce problème intervient.

5.3.2. Problème de diagonalisation des endomorphismes.— On peut donner une autre formulation de ce problème. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Donnée : u un endomorphisme de E représenté par une matrice $[u]_{\mathcal{B}}$ dans une base $\mathcal{B}$ de E.
Question : Trouver une base $\mathcal{B}'$ de E, telle que la matrice $[u]_{\mathcal{B}'}$ soit diagonale.

Deux matrices semblables représentant le même endomorphisme dans des bases différentes, la version matricielle de ce problème correspond au problème 5.3.1 : si $\mathbf{P}$ désigne la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, on a la relation :

$$[u]_{\mathcal{B}'} = \mathbf{P}^{-1}[u]_{\mathcal{B}}\mathbf{P}.$$

Lorsque la matrice $[u]_{\mathcal{B}'}$ est une matrice diagonale, *i.e.*, de la forme :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

on dit que l'endomorphisme u est *diagonalisable*. Les vecteurs $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ de la base $\mathcal{B}'$ ont une propriété remarquable, ils satisfont, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$u(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i.$$

Nous verrons que ce problème n'admet pas toujours de solution : un endomorphisme n'est pas toujours diagonalisable. Cependant, nous verrons qu'il est toujours possible de trouver un changement de base tel que la matrice s'exprime dans cette base comme une matrice diagonale par blocs.

5.3.3. Une reformulation géométrique.— On peut donner une autre formulation du problème de diagonalisation d'un endomorphisme. Soit u un endomorphisme de E, diagonaliser u revient à trouver une décomposition de E en une somme directe

$$E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_p$$

de sous-espaces vectoriels telle que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$,

i) E_i est stable par u, *i.e.*, $u(E_i)$ est un sous-espace de E_i,

ii) la restriction $u_{|E_i}$ de l'endomorphisme u à E_i est une homothétie, c'est-à-dire, qu'il existe un scalaire λ_i tel que

$$u(\mathbf{x}) = \lambda_i \mathbf{x},$$

pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de E_i.

En choisissant une base $\mathcal{B}_i$ pour chaque sous-espace E_i, la réunion $\mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_p$ de ces bases forme alors une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{bmatrix} & & & 0 \\ & \begin{bmatrix} \lambda_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \end{bmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \begin{bmatrix} \lambda_p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

où chaque bloc

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

est la matrice de la restriction de l'endomorphisme u au sous-espace E_i, exprimé dans la base $\mathcal{B}_i$.

5.3.4. Exemple.— Soient Π le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 0$ et Δ la droite d'équation $x = y = z$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui projette tout vecteur $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^3$ sur le plan Π parallèlement à la droite Δ.

Notons $\mathcal{C}\mathrm{an} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Soit $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ un vecteur directeur de Δ. L'endomorphisme u est caractérisé par

$$u(\mathbf{x}) + \lambda\mathbf{e} = \mathbf{x}, \quad u(\mathbf{x}) \in \Pi, \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Donc si $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}\mathrm{an}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, on a

$$[u]_{\mathcal{C}\mathrm{an}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - \lambda \\ x_2 - \lambda \\ x_3 - \lambda \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [u]_{\mathcal{C}\mathrm{an}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \Pi.$$

Soit encore

$$[u]_{\mathcal{C}\mathrm{an}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - x_3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$