CHAPITRE
6

Valeurs propres et vecteurs propres

Sommaire

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les notions de valeur propre et de vecteur propre d'une matrice et de présenter des méthodes permettant de déterminer ces valeurs propres, notamment via le calcul avec le polynôme caractéristique de la matrice.

§ 1 Préliminaires

Nous avons vu dans le chapitre 5 que la notion de valeur propre d'une matrice intervient dans le découplage d'un système d'équation. En particulier, les vecteurs propres interviennent pour décrire le changement de variable permettant d'obtenir un système découplé. Nous avons illustré la problématique du découplage avec les systèmes d'équations différentielles linéaires et les systèmes d'équations récurrentes. Avant de définir formellement dans la section suivante les notions de valeur propre et de vecteur propre d'une matrice, nous considérons un nouvel exemple d'illustration avec le problème de migration de population suivant.

6.1.1. Migration de population. — On étudie la répartition de la population entre deux zones géographiques d'un même pays, disons entre une région nord et une région sud. Chaque année, un mouvement de population entre ces deux zones s'opère de la façon suivante :

- 80% de la population des régions du nord part vivre dans les régions du sud,
- 70% de la population des régions du sud rejoint les régions nords.

On suppose que la population totale du pays reste constante d'une année à l'autre, ainsi 20% des habitants des régions du nords restent dans le nord et 30% des habitants des régions du sud restent dans le sud. Le mouvement de population est schématisé par la figure 6.1

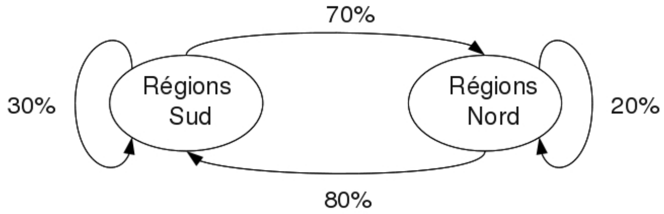

FIGURE 6.1 – Mouvement de population entre deux zones géographiques

Étant donné une répartition initiale, l'année $k = 0$, de la population entre les deux zones, quelle sera la répartition de population la k-ième année ? Est-ce qu'au bout d'un certain temps, toute la population va se retrouver en zone sud, ou bien le nombre d'habitants va-t-il se stabiliser dans chaque zone ?

6.1.2. Modélisation du problème. — Notons n_k le nombre d'habitants des régions du nord la k-ième année et s_k le nombre d'habitants des régions du sud la k-ième année. L'évolution des deux populations est régie par le système d'équations couplées suivant

$$\left| \begin{array}{l} n_{k+1} = 0.2 n_k + 0.7 s_k \\ s_{k+1} = 0.8 n_k + 0.3 s_k \end{array} \right.$$

qui s'écrit matriciellement sous la forme :

$$\begin{bmatrix} n_{k+1} \\ s_{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} n_k \\ s_k \end{bmatrix},$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.3 \end{bmatrix}$$

et où le vecteur $\mathbf{p}(k) = \begin{bmatrix} n_k \\ s_k \end{bmatrix}$ exprime la répartition de la population au nord et au sud l'année k. Par exemple, si l'année $k = 0$, on a un million d'habitants au nord et dix mille habitants au sud, *i.e.*, $\mathbf{p}(0) = \begin{bmatrix} 10^6 \\ 10^4 \end{bmatrix}$, alors l'année suivante, à $k = 1$, il y aura

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(1) = \begin{bmatrix} n_1 \\ s_1 \end{bmatrix} &= \mathbf{A} \begin{bmatrix} 10^6 \\ 10^4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 207000 \\ 803000 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pour connaître la population dans chacune des régions la k-ième année, on peut appliquer la formule suivante, obtenue par récurrence sur le nombre d'années k :

$$\begin{bmatrix} n_k \\ s_k \end{bmatrix} = \mathbf{A}^k \begin{bmatrix} n_0 \\ s_0 \end{bmatrix}.$$

Voici les valeurs du vecteur $\mathbf{p}(k)$ pour quelques valeurs de k :

$$\begin{gathered} \mathbf{p}(1) = \begin{bmatrix} 207000 \\ 803000 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}(2) = \begin{bmatrix} 603500 \\ 406500 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}(3) = \begin{bmatrix} 405250 \\ 604750 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{p}(4) = \begin{bmatrix} 504375 \\ 505625 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}(5) = \begin{bmatrix} 454812.5 \\ 555187.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}(6) = \begin{bmatrix} 479593.75 \\ 530406.25 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{p}(7) = \begin{bmatrix} 467203.12 \\ 542796.87 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}(8) = \begin{bmatrix} 473398.43 \\ 536601.56 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}(30) = \begin{bmatrix} 471333.33 \\ 538666.66 \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{6.1}$$

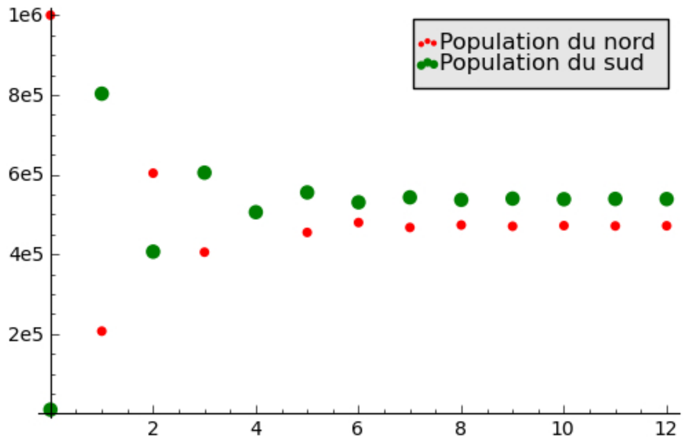

FIGURE 6.2 – Évolution de la population entre le nord et le sud les 12 premières années

Nous allons montrer que le calcul des puissances k-ième successives de la matrice $\mathbf{A}$ peut se faire à l'aide d'un simple calcul de valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$. Cette approche permet d'éviter les multiplications de la matrice $\mathbf{A}$ par elle-même, cette opération étant coûteuse en nombre d'opérations. Cette approche va nous permettre aussi de mieux comprendre l'évolution du système, ici de l'évolution de la population dans chaque zone géographique, en fonction du vecteur de répartition initial $\mathbf{p}(0)$.

6.1.3. Calcul des valeurs propres. — Nous allons donner dans ce chapitre une méthode de calcul des valeurs propres pour une matrice : les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ sont les solutions λ de l'équation suivante :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}_2) = 0.$$

Soit

$$\begin{vmatrix} 0.2-\lambda & 0.7 \\ 0.8 & 0.3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 0.5\lambda - 0.5 = (\lambda-1)(\lambda+0.5) = 0.$$

La matrice $\mathbf{A}$ possède ainsi deux valeurs propres, $\lambda = 1$ et $\lambda = -0.5$, qui sont les racines du polynôme $\lambda^2 - 0.5\lambda - 0.5$.

Si λ est valeur propre, comme $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}_2) = 0$, la matrice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}_2$ admet un noyau non trivial. Autrement dit, il existe des vecteurs $\mathbf{x}$ solutions de l'équation suivante

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Ces vecteurs sont dans la même direction que $\mathbf{A}\mathbf{x}$, on les appelles *vecteurs propres* associés à la valeur propre λ. La valeur propre indique si les vecteurs propres sont laissés inchangés, s'ils sont étirés, réduits ou encore inversés. Dans notre exemple, les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda = 1$ reste inchangés, ils vérifient $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Ceux associés à la valeur propre $\lambda = -0.5$ sont réduits et inversés : $\mathbf{A}\mathbf{x} = -0.5\mathbf{x}$.

6.1.4. Les sous-espaces propres. — Lorsque l'on calcule les puissances de la matrice $\mathbf{A}$, les valeurs propres sont élevées à la puissance, alors que les vecteurs propres restent inchangés. En effet, pour tout vecteur propre $\mathbf{x}$ associé à la valeur propre -0.5, on a

$$\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = -0.5\mathbf{A}\mathbf{x} = (-0.5)^2\mathbf{x},$$

ainsi, pour tout entier k,

$$\mathbf{A}^k\mathbf{x} = (-0.5)^k\mathbf{x}.$$

Pour un vecteur propre $\mathbf{x}$ associé à la valeur propre 1, on a $\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \mathbf{x}$, pour tout entier k.

Par suite, en décomposant les vecteurs dans une base de vecteurs propres, on pourra alors calculer les puissances de $\mathbf{A}$ simplement en calculant les puissances des valeurs propres.

L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre -0.5 est défini par

$$E_{-0.5} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = -0.5\mathbf{x}\}.$$

Donc $E_{-0.5}$ est formé des vecteurs $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ dont les composantes satisfont le système d'équations suivant :

$$\left| \begin{array}{l} -0.5x_1 = 0.2x_1 + 0.7x_2 \\ -0.5x_2 = 0.8x_1 + 0.3x_2 \end{array} \right.$$

Ainsi, $E_{-0.5}$ est l'espace vectoriel de dimension 1 engendré par le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. De la même façon, on montre que l'espace vectoriel formé des vecteurs propres associés à la valeur propre 1, défini par

$$E_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}\}.$$

est engendré par le vecteur $\begin{bmatrix} 0.875 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ces deux vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^2$. En particulier, étant donné le vecteur initial $\begin{bmatrix} n_0 \\ s_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^6 \\ 10^4 \end{bmatrix}$, il existe deux réels uniques β_1 et β_2 tels que

$$\begin{bmatrix} n_0 \\ s_0 \end{bmatrix} = \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 0.875 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De cette équation, on déduit les deux réels β_1 et β_2, on a

$$\beta_1 = \frac{1646.10^3}{3} \quad \text{et} \quad \beta_2 = \frac{1616.10^3}{3}.$$

On peut alors exprimer le vecteur $\begin{bmatrix} n_k \\ s_k \end{bmatrix}$, on a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n_k \\ s_k \end{bmatrix} &= \mathbf{A}^k \begin{bmatrix} n_0 \\ s_0 \end{bmatrix} \\ &= \beta_1 \mathbf{A}^k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta_2 \mathbf{A}^k \begin{bmatrix} 0.875 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \beta_1 (-0.5)^k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 0.875 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{bmatrix} n_k \\ s_k \end{bmatrix} = \frac{1646.10^3}{3}(-0.5)^k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1616.10^3}{3} \begin{bmatrix} 0.875 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On a ainsi résolu le problème du calcul de la répartition de la population la k-ième année sans avoir à faire le produit de la matrice $\mathbf{A}$ par elle-même k-fois. Si k tend vers l'infini, on a de façon immédiate que

$$\lim_{k \to +\infty} \begin{bmatrix} n_k \\ s_k \end{bmatrix} = \frac{1616.10^3}{3} \begin{bmatrix} 0.875 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 471333,33 \\ 538666,66 \end{bmatrix}$$

Nous retrouvons les valeurs numériques obtenues en (6.1).

§ 2 Valeurs propres et espaces propres

6.2.1. Définitions.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Un scalaire λ dans $\mathbb{K}$ est appelé *valeur propre* de $\mathbf{A}$, si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

i) $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}_n) \neq \{0\}$,

ii) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}_n) = 0$,

iii) il existe un vecteur non nul $\mathbf{x}$ de $\mathbb{K}^n$, solution de l'équation

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}.$$

L'équivalence des assertions **i)**, **ii)** est immédiate. L'assertion **iii)** est une simple reformulation de **i)**

Un vecteur $\mathbf{x}$ vérifiant l'assertion **iii)** est appelé *vecteur propre* de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre λ. Le sous ensemble de $\mathbb{K}$ formé des valeurs propres de $\mathbf{A}$ est appelé le *spectre* sur $\mathbb{K}$ de la matrice $\mathbf{A}$ et sera noté dans la suite $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A})$, ou $\mathrm{Sp}(\mathbf{A})$ s'il n'y a pas de confusion possible avec le corps de base.

6.2.2. Exemple.— Considérons la matrice suivante de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors, on a

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ainsi le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre 1. Par ailleurs, on a

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre -1.

6.2.3. Sous-espaces propres.—

6.2.4 Proposition.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit λ une valeur propre de $\mathbf{A}$. L'ensemble des vecteurs propres associés à λ

$$E_\lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. De plus, le sous-espace E_λ est stable par $\mathbf{A}$, *i.e.*, le vecteur $\mathbf{A}\mathbf{x}$ appartient à E_λ, pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de E_λ.

Preuve. On vérifie que l'ensemble E_λ contient le vecteur nul et que si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont deux vecteurs de E_λ et α et β deux scalaires, alors

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) &= \alpha\mathbf{A}\mathbf{x}+\beta\mathbf{A}\mathbf{y},\\ &= \alpha\lambda\mathbf{x}+\beta\lambda\mathbf{y},\\ &= \lambda(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}).\end{aligned}$$

Montrons la stabilité du sous-espace E_λ par $\mathbf{A}$. Si $\mathbf{x} \in E_\lambda$, on a

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{A}\mathbf{x},$$

donc $\mathbf{A}\mathbf{x} \in E_\lambda$. $\square$

6.2.5. Définition.— L'espace E_λ est appelé le *sous-espace propre* de la matrice $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre λ.

6.2.6. Remarque.— Pour la preuve de la proposition 6.2.4, on peut remarquer aussi que $E_\lambda = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}_n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, en tant que noyau d'une matrice. En particulier, une matrice $\mathbf{A}$ admet 0 comme valeur propres si, et seulement si, elle est non inversible. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est alors $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$.

6.2.7. Exemple.— Nous avons montré que la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

admet pour valeur propres -1 et 1. Les sous-espaces propres associés sont

$$E_{-1} = \mathrm{Vect}(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}), \qquad E_1 = \mathrm{Vect}(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}).$$

6.2.8. Somme de sous-espaces propres.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2. Les sous-espaces propres E_{λ_1} et E_{λ_2} sont alors en somme directe. En effet, si $\mathbf{x}$ est un vecteur propre de $\mathbf{A}$ associé aux deux valeurs propres λ_1 et λ_2. On a

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_2\mathbf{x}.$$

D'où

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Comme les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont supposées distinctes, on en déduit que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. On a donc

$$E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\mathbf{0}\}.$$

C'est ainsi que E_{λ_1} et E_{λ_2} sont en somme directe. Plus généralement on a :

6.2.9 Proposition.— Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, distinctes deux à deux. Les sous-espaces propres E_{λ_1} , ... , E_{λ_p} sont en somme directe.

Preuve. On procède par récurrence sur le nombre p de valeurs propres distinctes. Si $p = 1$, il n'y a rien à démontrer. Supposons que les sous-espaces $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ soient en somme directe. D'après 2.3.9, c'est équivalent à

$$E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\mathbf{0}\}, \quad (E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2}) \cap E_{\lambda_3} = \{\mathbf{0}\}, \quad \ldots \quad , (E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_{p-1}}) \cap E_{\lambda_p} = \{\mathbf{0}\}.$$

Pour montrer que les sous-espaces $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}, E_{\lambda_{p+1}}$ sont en somme directe, il suffit de montrer que

$$(E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_p}) \cap E_{\lambda_{p+1}} = \{\mathbf{0}\}.$$

Soit $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_p$ un vecteur de $(E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_p}) \cap E_{\lambda_{p+1}}$, où $\mathbf{x}_k \in E_{\lambda_k}$, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$. Comme $\mathbf{A}\mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k$, on a

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_p \mathbf{x}_p.$$

Par ailleurs, $\mathbf{x}$ est un vecteur propre associé à λ_{p+1}, d'où

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_{p+1}\mathbf{x} = \lambda_{p+1}\mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_{p+1}\mathbf{x}_p.$$

Par suite,

$$\mathbf{0} = (\lambda_1 - \lambda_{p+1)}\mathbf{x}_1 + \cdots + (\lambda_p - \lambda_{p+1})\mathbf{x}_p.$$

Les sous-espaces $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ étant en somme directe, $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{E_{\lambda_1}} + \cdots + \mathbf{0}_{E_{\lambda_p}}$ est la seule décomposition de $\mathbf{0}$. D'où, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$,

$$(\lambda_k - \lambda_{k+1})\mathbf{x}_k = \mathbf{0}_{E_{\lambda_k}},$$

Comme les valeurs propres λ_i sont deux à deux distinctes, tous les vecteurs $\mathbf{x}_k$ sont nuls, par suite le vecteur $\mathbf{x}$ est nul. Ainsi, le sous-espace $(E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_p}) \cap E_{\lambda_{p+1}}$ est trivial et les sous-espaces $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}, E_{\lambda_{p+1}}$ forment une somme directe. $\square$

De ce résultat, on déduit que si une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet n valeurs propres disctinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alors

$$\mathbb{K}^n = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_n}.$$

6.2.10. Exemple.— Considérons la matrice suivante de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{A}$ est de rang 1, du théorème du rang, on déduit que son noyau $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$, qui est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0, est de dimension 1. On remarque que $E_0 = \mathrm{Vect}(\mathbf{e}_1)$ avec $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. On remarque aussi que le vecteur $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est vecteur propre de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre 2, car $\mathbf{A}\mathbf{e}_2 = 2\mathbf{e}_2$. Le sous-espace propre E_2 est de dimension 1 et engendré par le vecteur $\mathbf{e}_2$. Les vecteur $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ forment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\mathbb{R}^2 = E_0 \oplus E_2.$$

Considérons la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{P}_{\mathcal{C}\mathrm{an}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elle admet pour inverse la matrice

$$\mathbf{P}_{\mathcal{C}\mathrm{an}}^{\mathcal{B}\ -1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On vérifie alors que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_{\mathcal{C}\mathrm{an}}^{\mathcal{B}\ -1}\mathbf{A}\mathbf{P}_{\mathcal{C}\mathrm{an}}^{\mathcal{B}}.$$

6.2.11 Exercice.— Déterminer les valeurs propres et espaces propres des matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\textbf{a)}\ \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{b)}\ \begin{bmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{c)}\ \begin{bmatrix} 0&1&1\\0&0&1\\0&0&0 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{d)}\ \begin{bmatrix} 0&1&1\\0&1&1\\0&0&0 \end{bmatrix},$$

$$\textbf{e)}\ \begin{bmatrix} 1&1&1\\0&0&1\\0&0&1 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{f)}\ \begin{bmatrix} 1&1&1\\0&1&1\\0&0&1 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{g)}\ \begin{bmatrix} 1&1&1\\1&1&1\\0&1&1 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{h)}\ \begin{bmatrix} 1&1&1\\1&1&1\\1&1&1 \end{bmatrix}.$$

§ 3 Calcul des valeurs propres

6.3.1. Définition.— Le *polynôme caractéristique* d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le polynôme de $\mathbb{K}[x]$ défini par

$$p_{\mathbf{A}} = \det(\mathbf{A} - x\mathbf{1}_n).$$

6.3.2. Exemples.— Le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ est

$$p_{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

Le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ est

$$p_{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 - 1 = -x(2-x).$$

6.3.3 Proposition.— Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Preuve. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices semblables. Il existe donc une matrice inversible $\mathbf{P}$ telle que $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$. Montrons que $p_{\mathbf{A}} = p_{\mathbf{B}}$. Il découle de la propriété du déterminant que :

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}} &= \det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} - x\mathbf{1}_n) \\ &= \det(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A} - x\mathbf{1}_n)\mathbf{P}) \\ &= (\det\mathbf{P})^{-1}\det(\mathbf{A} - x\mathbf{1}_n)\det\mathbf{P}. \end{aligned}$$

Ainsi $p_{\mathbf{A}} = p_{\mathbf{B}}$. □

Par définition, un scalaire λ est valeur propre d'une matrice $\mathbf{A}$ si le déterminant de la matrice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}_n$ est nul. On a donc

6.3.4 Proposition. — Un scalaire λ est valeur propre d'une matrice $\mathbf{A}$ si, et seulement si, λ est racine de son polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}}$.

6.3.5. Exemple. — Le polynôme caractéristique d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ peut ne pas avoir de racines dans le corps $\mathbb{K}$. Par exemple, le polynôme caractéristique de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

est $p_{\mathbf{A}} = x^2 + 1$, qui n'a pas de racines réelles, par suite $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathbf{A}) = \emptyset$. Dans le chapitre suivant, nous verrons qu'alors la matrice $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mais est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. En effet, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathbf{A}) = \{-i, i\}$ et les sous-espaces propres de $\mathbf{A}$ dans $\mathbb{C}^2$ sont

$$E_i = \mathrm{Vect}(\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}) \quad \text{et} \quad E_{-i} = \mathrm{Vect}(\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}).$$

6.3.6. Exemple. — L'exemple précédent correspond à la matrice de la rotation du plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ d'angle $\pi/2$. Plus généralement, considérons la matrice

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

de la rotation d'angle $\theta \neq 0 \mod (\pi)$ représentée dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Le polynôme caractéristique $p_{\mathbf{R}_\theta} = x^2 - 2\cos\theta x + 1$ est de discriminant $-4\sin^2\theta$ non nul, car $\theta \neq 0 \mod (\pi)$. Il ne possède donc pas de racine réelle, donc la matrice $\mathbf{R}_\theta$ ne possède pas de valeur propre réelle. Géométriquement, cela s'interprète en disant qu'il n'existe pas de droite globalement invariante par la rotation d'angle θ, lorsque $\theta \neq 0 \mod (\pi)$.

Si l'on se place sur le corps $\mathbb{C}$, *i.e.*, on regarde la matrice $\mathbf{R}_\theta$ comme une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Alors, le polynôme $p_{\mathbf{R}_\theta}$ se factorise dans $\mathbb{C}[x]$ sous la forme

$$p_{\mathbf{R}_\theta} = (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta}).$$

Dans $\mathbb{C}$, la matrcie $\mathbf{R}_\theta$ admet 2 valeurs propres :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathbf{R}_\theta) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}.$$

6.3.7 Exercice. — Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres des matrices suivantes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10 & -7 \\ 14 & 11 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 16 & 8 \\ 4 & 14 & 8 \\ -8 & -32 & -18 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6.3.8 Proposition.— Soit une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

définie par blocs, où les blocs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{C}$ sont carrés. Alors les polynôme caractéristiques de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{C}$ divisent le polynôme caractéristique de $\mathbf{T}$.

Preuve. Si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on a

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{T}} &= \det(\mathbf{T} - x\mathbf{1}_n) \\ &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{A} - x\mathbf{1}_p & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} - x\mathbf{1}_{n-p} \end{bmatrix}, \\ &= \det(\mathbf{A} - x\mathbf{1}_p)\det(\mathbf{C} - x\mathbf{1}_{n-p}) \\ &= p_{\mathbf{A}} p_{\mathbf{C}}. \end{aligned}$$

Ainsi, les polynômes $p_{\mathbf{A}}$ et $p_{\mathbf{C}}$ divisent $p_{\mathbf{T}}$. $\square$

6.3.9 Exercice.— Soit $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$ une matrice définie par blocs, où les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{C}$ sont carrées. Montrer que

$$\operatorname{Spec}(\mathbf{T}) = \operatorname{Spec}(\mathbf{A}) \cup \operatorname{Spec}(\mathbf{C}).$$

§ 4 Le cas des endomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ formé des endomorphismes de E est isomorphe au $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Étant donnée une base $\mathcal{B}$ de E, un isomorphisme est donné par l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u &\longmapsto [u]_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Par suite, les notions de valeur propre et de vecteur propre se définissent pour les endomorphismes de la même façon que pour les matrices.

6.4.1. Valeurs propres et vecteurs propres d'endomorphismes.— Soit u un endomorphisme de E. Un scalaire λ dans $\mathbb{K}$ est appelé *valeur propre* de u si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

i) l'application $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ est non injective,

ii) $\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$,

iii) $\det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$,

iv) il existe un vecteur non nul $\widetilde{\mathbf{x}}$ de E tel que $u(\widetilde{\mathbf{x}}) = \lambda \widetilde{\mathbf{x}}$,

v) λ est valeur propre de la matrice $[u]_{\mathcal{B}}$ de u, exprimé dans une base $\mathcal{B}$ de E.

Les équivalences des assertions **i)**, **ii)** et **iii)** sont données par la proposition 2.4.16. L'assertion **iv)** est une simple reformulation de l'assertion **ii)**. Montrons que, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, λ est valeur propre de la matrice $[u]_{\mathcal{B}}$ si, et seulement si, λ est valeur propre de l'endomorphisme u. Supposons pour cela que la relation $[u]_{\mathcal{B}}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ est satisfaite pour un scalaire λ de $\mathbb{K}$ et un vecteur $\mathbf{x}$ de $\mathbb{K}^n$. En notant $\widetilde{\mathbf{x}}$ le vecteur de l'espace vectoriel E tel que $\mathbf{x} = [\widetilde{\mathbf{x}}]_{\mathcal{B}}$, on a alors $u(\widetilde{\mathbf{x}}) = \lambda\widetilde{\mathbf{x}}$. Ce qui montre l'équivalence des assertions **iv)** et **v)**.

Un vecteur $\mathbf{x}$ vérifiant l'assertion **iv)** est appelé *vecteur propre* de u associé à la valeur propre λ. L'ensemble des valeurs propres de u est appelé le *spectre* de u et sera noté dans la suite $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$, ou $\mathrm{Sp(u)}$ s'il n'y a pas de confusion possible avec le corps de base.

6.4.2. Exemple. — Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &\longmapsto \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Alors, la matrice de l'endomorphisme u exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$[u]_{\mathcal{C}\mathrm{an}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de l'endomorphisme u sont les valeurs propres de la matrices $[u]_{\mathcal{C}\mathrm{an}}$, soit $\mathrm{Sp(u)} = \{-1, 1\}$.

6.4.3. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme. — D'après la proposition 6.3.3, deux matrices semblables admettent le même polynôme caractéristique. Par suite, pour un endomorphisme u de E, le polynôme caractéristique de la matrice $[u]_{\mathcal{B}}$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$. Autrement dit, si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E, les polynômes caractéristiques des matrices $[u]_{\mathcal{B}}$ et $[u]_{\mathcal{B}'}$ sont égaux. On appele *polynôme caractéristique* de u, noté p_u, le polynôme caractéristique d'une matrice de u exprimé dans une base de E.

On a l'analogue de la proposition 6.3.4. En effet, par définition, un scalaire λ est valeur propre de u si $\det(u - \lambda\mathrm{Id}_E) = 0$. Par suite, on a

6.4.4 Proposition. — Un scalaire λ est valeur propre d'un endomorphisme u si, et seulement si, λ est racine de son polynôme caractéristique p_u.

Le résultat suivant relie le polynôme caractéristique de la restriction d'un endomorphisme à un sous-espace stable au polynôme caractéristique de l'endomorphisme.

6.4.5 Proposition. — Soient F un sous-espace vectoriel non nul de E stable par u et $u_{|F}$ la restriction de u à F. Alors le polynôme $p_{u_{|F}}$ divise le polynôme p_u.

Preuve. Le sous-espace F est stable par u, donc la restriction $u_{|F}$ de u à F est un endomorphisme de F. Considérons une base $\mathcal{B}' = (e_1, \ldots, e_p)$ de F. On la complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. La matrice de l'endomorphisme u, exprimée dans la base $\mathcal{B}$, se décompose par blocs de la façon suivante :

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [u_{|F}]_{\mathcal{B}'} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

par suite, d'après la proposition 6.3.8, le polynôme $p_{u_{|F}}$ divise le polynôme p_u. $\square$

6.4.6 Exercice.— Soient $\mathbf{P} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ et $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices fixées. Soit

$$u : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

une application définie par

$$u(\mathbf{A}) = \mathbf{PAQ}.$$

1. Montrer que l'application u est linéaire.
2. Montrer que $\mathrm{trace}(u) = \mathrm{trace}(\mathbf{P})\mathrm{trace}(\mathbf{Q})$.

§ 5 Exercices

6.5.1 Exercice.— Construire des exemples de matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que

1. λ valeur propre de $\mathbf{A}$ et β valeur propre de $\mathbf{B}$ n'implique pas $\lambda + \beta$ valeur propre de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.
2. λ valeur propre de $\mathbf{A}$ et β valeur propre de $\mathbf{B}$ n'implique pas $\lambda\beta$ valeur propre de $\mathbf{AB}$.

6.5.2 Exercice.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soient λ une valeur propre de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{x}$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ. On suppose que k est un entier naturel non nul.

1. Montrer que λ^k est une valeur propre de $\mathbf{A}^k$ et que $\mathbf{x}$ est aussi vecteur propre pour la valeur propre λ^k.
2. Soit $q(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_p x^p$ un polynôme de $\mathbb{K}[x]$. Montrer que $q(\lambda)$ est une valeur propre de la matrice suivante

$$q(\mathbf{A}) = a_0 \mathbf{1}_n + a_1 \mathbf{A} + a_2 \mathbf{A}^2 + \ldots + a_p \mathbf{A}^p$$

et que $\mathbf{x}$ est un vecteur propre associé.

6.5.3 Exercice.— Montrer que la trace d'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nulle.

6.5.4 Exercice.— Soient $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ des vecteurs propres d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, associées à une même valeur propre λ. Montrer que toute combinaison linéaire non nulle des vecteurs $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ est un vecteur propre de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre λ.

6.5.5 Exercice.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de spectre $\mathrm{spec}(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$. On considère une valeur propre λ_k de $\mathbf{A}$ et un vecteur propre $\mathbf{x}$ associé.

1. Soit λ un scalaire qui n'est pas valeur propre de $\mathbf{A}$. Montrer que

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}_n)^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda_k - \lambda}\mathbf{x}.$$

2. Soit $\mathbf{y}$ un vecteur de $\mathbb{K}^n$, montrer que les valeurs propres de $\mathbf{A} + \mathbf{x}\mathbf{y}^\top$ coïncident avec celles de $\mathbf{A}$ sauf pour la valeur propre λ_k qui est remplacée par $\lambda_k + \mathbf{y}^\top\mathbf{x}$.

3. Soit μ un scalaire. Comment construire un vecteur $\mathbf{y}$ afin que les valeurs propres de $\mathbf{A}+\mathbf{x}\mathbf{y}^\top$ et $\mathbf{A}$ coïncident sauf pour la valeur propre λ_k qui est remplacée par μ.

6.5.6 Exercice.— Soient $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ deux matrices.

1. Montrer que pour tout scalaire λ,

$$\lambda^m \det(\lambda \mathbf{1}_n - \mathbf{BA}) = \lambda^n \det(\lambda \mathbf{1}_m - \mathbf{AB}).$$

2. Montrer que si $m = n$, alors les matrices $\mathbf{AB}$ et $\mathbf{BA}$ ont le même polynôme caractéristique.

3. On suppose que $m \neq n$. Montrer que les polynômes caractéristiques de $\mathbf{AB}$ et $\mathbf{BA}$ ne peuvent pas être égaux. Que peut-on dire des spectres de $\mathbf{AB}$ et $\mathbf{BA}$?

6.5.7 Exercice.— Soient $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices. Montrer que si $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, alors $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ ont un vecteur propre commun.

6.5.8 Exercice.— Calculer les valeurs propres de la matrice suivante de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$\begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}$$

6.5.9 Exercice.— On considère les trois matrices réelles suivantes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c & 1 \\ d & 1 & 1 & d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & a & d \\ b & e & -1 \\ c & 1 & f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & b & -1 \\ -1 & 1 & c \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer les quadruplets $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, pour lesquels la matrice $\mathbf{A}$ admet $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ pour vecteur propre.

2. Déterminer les réels a, b, c, d, e, f, pour lesquels la matrice $\mathbf{B}$ admet $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ pour vecteurs propres.

3. Déterminer les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, pour lesquels la matrice $\mathbf{C}$ admet 1, a et b comme valeurs propres.