CHAPITRE
7

Trigonalisation et diagonalisation des matrices

Sommaire

Nous abordons dans ce chapitre les problèmes de trigonalisation et diagonalisation des matrices. Nous montrons que toute matrice à coefficients complexes est trigonalisable, c'est-à-dire semblable à une matrice triangulaire supérieure. On présente quelques conséquences théoriques importantes de ce résultat.

Le problème de la diagonalisation est plus épineux. Une matrice n'est pas en général diagonalisable, c'est-à-dire semblable à une matrice diagonale. Dans ce chapitre, on s'intéressera aux obstructions au caractère diagonalisable. En particulier, nous donnerons une caractérisation de nature géométrique des matrices diagonalisables.

Nous présentons deux applications immédiates de la diagonalisation des matrices avec le calcul des puissances d'une matrice diagonalisable et la résolution des systèmes différentiels linéaires définis par une matrice diagonalisable. Nous reviendrons sur ces deux applications dans les prochains chapitres, notamment dans le cas où ils mettent en jeu des matrices non diagonalisables.

§ 1 Trigonalisation des matrices

7.1.1. Définition.— Une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *trigonalisable* dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $\mathbf{A}$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. C'est-à-dire, s'il existe une matrice inversible $\mathbf{P}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbf{T}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ telles que

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{T}\mathbf{P}^{-1}. \tag{7.1}$$

On notera que toute matrice triangulaire supérieure étant semblable à une matrice triangulaire inférieure, une matrice est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, elle est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

7.1.2 Exercice.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit λ une valeur propre de $\mathbf{A}$. Montrer que la matrice $\mathbf{A}$ est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{B} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{B}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

7.1.3. Caractérisation des matrices trigonalisables.— Le résultat suivant fournit une caractérisation des matrices trigonalisables.

7.1.4 Théorème (Théorème de trigonalisation).— Une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, son polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}}$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

Preuve. La condition est nécessaire. Si $\mathbf{A}$ est une matrice trigonalisable, par définition, elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure :

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{T}$ est scindé :

$$p_{\mathbf{T}} = (-1)^n(x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n).$$

D'après la proposition 6.3.3, deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Ainsi, $p_{\mathbf{A}} = p_{\mathbf{T}}$ et par suite le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

La condition est suffisante. On procède par récurrence sur n. Toute matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ est trigonalisable. On suppose que tout matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, dont le polynôme caractéristique est scindé, est trigonalisable, montrons que cela est vrai pour toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telle que le polynôme $p_{\mathbf{A}}$ soit scindé sur $\mathbb{K}$. Le polynôme $p_{\mathbf{A}}$ admet donc au moins une racine λ dans $\mathbb{K}$. Considérons un vecteur propre $\mathbf{e}$ dans $\mathbb{K}^n$ associé à la valeur propre λ. Complétons le vecteur $\mathbf{e}$ en une base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ de $\mathbb{K}^n$. Soit $u_{\mathbf{A}}$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ associé à la matrice $\mathbf{A}$, *i.e.*, l'endomorphisme défini, pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de $\mathbb{K}^n$, par $u_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$. On a

$$u_{\mathbf{A}}(\mathbf{e}) = \mathbf{A}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e},$$

par suite, la matrice de l'endomorphisme $u_{\mathbf{A}}$ exprimé dans la base $\mathcal{B}$ est

$$[u_{\mathbf{A}}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{B} & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{B}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. La matrice $\mathbf{A}$ étant semblable à la matrice $[u_{\mathbf{A}}]_{\mathcal{B}}$, il existe une matrice inversible $\mathbf{P}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{B} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

De plus, d'après 6.3.8, le polynôme caractéristique du bloc $\mathbf{B}$ divise le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{A}$, il est donc scindé comme ce dernier. Par hypothèse de récurrence, la matrice $\mathbf{B}$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure, il existe une matrice inversible $\mathbf{Q}$ dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, telle que $\mathbf{t}' = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}$ soit triangulaire supérieure. En multipliant par blocs, on a :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{Q} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{Q} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{T}' & \\ 0 & & & \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En posant

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{Q} & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

la dernière égalité s'écrit

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{Q} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

Ainsi, $\mathbf{A}$ est semblable à une triangulaire supérieure. □

7.1.5. Trigonalisation sur $\mathbb{C}$. — Voici une première conséquence importante du théorème de trigonalisation. D'après le théorème de D'Alembert-Gauss, théorème 1.5.22, tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[x]$ est scindé sur $\mathbb{C}$. Par suite, on a

7.1.6 Proposition.— Toute matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Notons que toute matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut toujours se trigonaliser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En effet, si le polynôme caratéristique de $\mathbf{A}$ est scindé sur $\mathbb{R}$, $\mathbf{A}$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Sinon, le polynôme $p_{\mathbf{A}}$ est toujours scindé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe alors une matrice inversible $\mathbf{P}$ et une matrice triangulaire $\mathbf{T}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathbf{A} = \mathbf{PTP}^{-1}$.

7.1.7. Exemple.— La matrice suivante de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

admet pour polynôme caractéristique

$$p_{\mathbf{A}} = (x^2+1)^2.$$

Ce polynôme n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[x]$, la matrice $\mathbf{A}$ n'est donc pas trigonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Cependant, il est scindé dans $\mathbb{C}[x]$:

$$p_{\mathbf{A}} = (x-i)^2(x+i)^2.$$

La matrice est trigonalisable. Posons

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -i & 0 & i & i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -i & 0 & i \end{bmatrix}.$$

Le premier et troisième vecteur colonne de la matrice $\mathbf{P}$ sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres i et $-i$ respectivement. Les deux autres vecteurs colonnes complètent ces vecteurs en une base de trigonalisation. On a

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}, \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 1 & -i & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{bmatrix}.$$

7.1.8. Somme et produit des valeurs propres.— Le théorème de trigonalisation nous permet de relier des invariants d'une matrice, tels que sa trace et son déterminant, à ses valeurs propres.

Si une matrice $\mathbf{A}$ est trigonalisable, semblable à une matrice triangulaire supérieure $\mathbf{T}$, alors les valeurs propres de $\mathbf{A}$ étant les racines du polynôme $p_{\mathbf{A}}$, sont aussi les coefficients de la diagonale de la matrice $\mathbf{T}$.

Étant donnée une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$:

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_n).$$

La matrice $\mathbf{A}$ est semblable à une matrice triangulaire $\mathbf{T}$, *i.e.*, il existe une matrice inversible $\mathbf{P}$ telle que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Étant semblables, les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{T}$ ont même trace et même déterminant, on en déduit que la trace (resp. le déterminant) de $\mathbf{A}$ est égale à la somme (resp. le produit) des valeurs propres, comptées avec leur ordre de multiplicité. Précisément, on a

7.1.9 Proposition.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n(x-\lambda_1)^{n_1}\ldots(x-\lambda_p)^{n_p},$$

où n_i désigne l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i dans le polynôme caractéristique. Alors,

i) $\operatorname{trace}(\mathbf{A}) = n_1\lambda_1 + \ldots + n_p\lambda_p$,

ii) $\det(\mathbf{A}) = \lambda_1^{n_1}\ldots\lambda_p^{n_p}$.

Plus généralement, pour tout entier $k \geq 1$, on a

iii) $\operatorname{trace}(\mathbf{A}^k) = n_1\lambda_1^k + \ldots + n_p\lambda_p^k$,

iv) $\det(\mathbf{A}^k) = \lambda_1^{k.n_1}\ldots\lambda_p^{k.n_p}$.

7.1.10. Exemples.— Dans l'exemple 6.3.5, on a montré que la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, possède deux valeurs propres $-i$ et i ; la somme de ces valeurs propres est égale à la trace de $\mathbf{A}$ et leur produit est le déterminant de $\mathbf{A}$.

Dans l'exemple 6.3.6, on a montré que le spectre de la matrice de la rotation du plan vectoriel

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

est $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathbf{R}_\theta) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$. La proposition précédente, nous permet de retrouver les relations trigonométriques bien connues :

$$\operatorname{trace}(\mathbf{R}_\theta) = 2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta},$$

$$\det \mathbf{R}_\theta = 1 = e^{i\theta}e^{-i\theta}.$$

7.1.11 Exercice.— Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si, et seulement si, elle n'admet pas de valeur propre nulle.

7.1.12. Exemple.— Dans l'exemple 7.3.4, nous avons montré que la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

admet pour valeur propre 0, d'ordre de multiplicité géométrique $n-2$, par suite le polynôme caractéristique s'écrit sous la forme

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n x^{n-2}(x^2 + \alpha x + \beta).$$

Déterminons les autres valeurs propres de $\mathbf{A}$. Supposons que

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n x^{n-2}(x - \lambda_1)(x - \lambda_2).$$

D'après la proposition 7.1.9, λ_1 et λ_2 satisfont les relations

$$\left|\begin{array}{l} \mathrm{trace}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \mathrm{trace}(\mathbf{A}^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \end{array}\right.$$

avec

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{bmatrix}.$$

Ainsi, $\mathrm{trace}(\mathbf{A}) = 1$ et $\mathrm{trace}(\mathbf{A}^2) = 2n-1$, par suite, λ_1 et λ_2 satisfont les deux relations

$$\left|\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2n-1 \end{array}\right.$$

Comme $(\lambda_1 + \lambda_2)^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2$, le système précédent se réduit à

$$\left|\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1\lambda_2 = 1-n \end{array}\right.$$

Donc λ_1 et λ_2 sont solutions de l'équation

$$\lambda^2 - \lambda + (1-n) = 0.$$

D'où

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{4n-3}}{2}.$$

Le spectre de $\mathbf{A}$ est donc

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \left\{0, \frac{1-\sqrt{4n-3}}{2}, \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}\right\}.$$

Les sous-espaces propres sont définis par

$$E_0 = \mathrm{Vect}(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots \quad, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}),$$

$$E_{\lambda_1} = \mathrm{Vect}(\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}), \qquad E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}(\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}).$$

Pour ces deux derniers, on calcule en effet

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \lambda_i + n - 1 \end{bmatrix},$$

avec $\lambda_i^2 = \lambda_i + n - 1$, pour $i = 1, 2$.

7.1.13 Exercice.— Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres des matrices suivantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

7.1.14. Exemple.— Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{bmatrix}.$$

On remarque que

$$\mathbf{A} - (n-1)\mathbf{1}_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

On a donc $\mathrm{rg}((\mathbf{A} - (n-1)\mathbf{1}_n)) = 1$. D'après le la formule du rang, théorème 2.4.14, on a $\dim(E_{n-1}) = n - 1$. Donc $n - 1$ est valeur propre de $\mathbf{A}$, avec $\mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(n-1) \geq n - 1$. Pour déterminer l'autre éventuelle valeur propre λ, on calcule

$$\mathrm{trace}(\mathbf{A}) = n^2 = \lambda + (n-1)(n-1).$$

Par suite $\lambda = 2n - 1$. On a donc $\mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(2n-1) \geq 1$. On en déduit donc que $\mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(n-1) = \mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(n-1) = n - 1$ et que $\mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(2n-1) = \mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(2n-1) = 1$.

Dans cet exemple, on a

$$\mathbb{K}^n = E_{n-1} \oplus E_{2n-1},$$

on dit dans ce cas que la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable.

§ 2 Diagonalisation des matrices

7.2.1. Matrices diagonalisables. — Une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *diagonalisable* dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si elle est semblable à une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. C'est-à-dire, s'il existe une matrice inversible $\mathbf{P}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale $\mathbf{d}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ telles que

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}. \tag{7.2}$$

Les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ de la décomposition (7.2) étant semblables, d'après la proposition 6.3.3, elles ont le même polynôme caractéristique. Il s'ensuit que la diagonale de la matrice $\mathbf{D}$ est formée des valeurs propres de $\mathbf{A}$.

7.2.2 Exercice. — Montrer que la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

7.2.3 Exercice. — Soit $\mathbf{A}$ la matrice définie par blocs :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sont deux matrices carrés de $\mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{K})$ respectivement. Montrer que si $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sont diagonalisables, alors $\mathbf{A}$ est diagonalisable.

7.2.4 Proposition. — Une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de $\mathbf{A}$.

Preuve. Supposons qu'il existe une base $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ de $\mathbb{K}^n$ composée de vecteurs propres de $\mathbf{A}$. Considérons la matrice $\mathbf{P}$ dont les colonnes sont formées par les éléments de cette base :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}.$$

Les vecteurs $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ formant une base de $\mathbb{K}^n$, la matrice $\mathbf{P}$ est inversible et on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{AP} &= \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_1 & \mathbf{A}\mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1\mathbf{x}_1 & \lambda_2\mathbf{x}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbf{AP} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{7.3}$$

Par suite, la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable.

Inversement, si $\mathbf{A}$ est diagonalisable, il existe une matrice inversible $\mathbf{P}$ telle que $\mathbf{P}$ satisfait l'égalité (7.3). Pour les mêmes raisons, les vecteurs colonnes de $\mathbf{P}$ forment une base de vecteurs propres de $\mathbb{K}^n$. $\square$

7.2.5. Une condition suffisante de diagonalisation.— Toutes les matrices ne sont pas diagonalisables, nous l'avons vu en particulier avec l'exemple 6.3.6 des rotations. La matrice $\mathbf{R}_\theta$ qui représente la rotation d'angle θ du plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si $\theta \neq 0$ modulo π, car alors $\mathbf{R}_\theta$ ne possède pas de valeur propre réelle.

Cet exemple illustre le caractére non diagonalisable d'une matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, car elle n'admet pas de valeur propre réelle. La matrice suivante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

admet 0 comme valeur propre et n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En effet, si elle était diagonalisable, alors son unique valeur propre étant 0, car son polynôme caractéristique est $p_\mathbf{A} = x^2$, la matrice $\mathbf{A}$ serait semblable à une matrice nulle. Or toute matrice semblable à une matrice nulle est nulle. Ceci n'étant pas le cas de $\mathbf{A}$ la matrice $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable.

7.2.6 Exercice.— Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}?$$

7.2.7 Proposition (Condition suffisante de diagonalisation).— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et possède toutes ses racines simples, alors $\mathbf{A}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve. Supposons que le polynôme caractéristique $p_\mathbf{A}$ soit scindé à racines simples :

$$p_\mathbf{A} = (-1)^n(x - \lambda_1)\ldots(x - \lambda_n),$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, λ_i étant valeur propre de $\mathbf{A}$, il existe un vecteur propre $\mathbf{x}_i$ de $\mathbf{A}$ associé. D'aprés la proposition 6.2.9, les sous-espaces propres de $\mathbf{A}$ formant une somme directe, la famille $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ est libre. Elle possède n éléments, c'est donc une base de $\mathbb{K}^n$. $\square$

On en déduit le résultat suivant :

7.2.8 Corollaire.— Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui admet n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

7.2.9. Remarques. — Attention, la réciproque du corollaire 7.2.8 est fausse en général. Par exemple, la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

est diagonalisable, alors qu'elle n'admet que deux valeurs propres distinctes, son spectre est $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \{1, 4\}$.

De la même façon, la proposition 7.2.7 est une condition suffisante de diagonalisation, mais elle n'est pas nécessaire. Par exemple, la matrice identité $\mathbf{1}_n$ est diagonalisable, son polynôme caractéristique est $p_{\mathbf{1}_n} = (-1)^n(x-1)^n$; son unique valeur propre 1 est d'ordre de multiplicité n.

7.2.10. Exemple. — On considère la matrice réelle $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & bc^2 \\ b & a \end{bmatrix}$, avec b, c non nul. Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est

$$p_{\mathbf{A}} = (a-x)^2 - b^2c^2 = ((a-bc)-x)((a+bc)-x).$$

Par suite $\lambda_1 = a - bc$ et $\lambda_2 = a + bc$ sont deux valeurs propres, distinctes par hypothèses sur b et c. On en déduit que $\mathbf{A}$ est diagonalisable.

Déterminons les sous-espaces propres E_{λ_1} et E_{λ_2}. On a $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in E_{\lambda_1}$ si, et seulement si,

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Autrement dit, x et y satisfont

$$\left| \begin{array}{l} ax + bc^2y = ax - bcx \\ bx + ay = ay - bcy \end{array} \right. ,$$

Donc $x = -cy$. On déduit que

$$E_{\lambda_1} = \mathrm{Vect}\begin{bmatrix} -c \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De la même façon, on montre que

$$E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}\begin{bmatrix} c \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{bmatrix} a-bc & 0 \\ 0 & a+bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & c \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a & bc^2 \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c & c \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7.2.11. Exemple. — Une autre illustration du caractère non nécessaire de la condition de la proposition 7.2.7 est donnée par la matrice suivante :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

vue dans l'exemple 5.4.4. Nous avons montré que $\mathbf{G}$ est diagonalisable, semblable à la matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

alors que son polynôme caractéristique $p_{\mathbf{G}} = (x+1)^2(2-x)$ n'est pas à racines simples.

§ 3 Une obstruction au caractère diagonalisable

Dans cette partie, nous présentons une caractérisation de nature géométrique des matrices diagonalisables. Nous verrons dans le chapitre suivant une caractérisation algébrique de la diagonalisation avec le polynôme minimal.

D'après la proposition 6.2.9, les sous-espaces propres d'une matrice $\mathbf{A}$ sont en somme directe. Il est possible que cette somme ne ≪ remplisse ≫ pas l'espace $\mathbb{K}^n$ tout entier, *i.e.*, que la somme directe $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$ soit un sous-espace vectoriel strict de $\mathbb{K}^n$. C'est en particulier le cas lorsque l'on a $\dim(E_{\lambda_1}) + \cdots + \dim(E_{\lambda_p}) < n$. L'objectif de cette section est de montrer que ceci constitue une obstruction à la diagonalisation de $\mathbf{A}$.

7.3.1. Exemple.— Considérons la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

On calcule son polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}} = -(x-2)^2(x-3)$ et, par ailleurs, on a

$$\mathbf{A} - 3\mathbf{1}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} - 2\mathbf{1}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il est immédiat que

$$\mathrm{rg}(\mathbf{A} - 3\mathbf{1}_3) = \mathrm{rg}(\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_3) = 2.$$

D'après la formule du rang, théorème 2.4.14, on en déduit que $\dim(E_3) = 1$ et $\dim(E_2) = 1$. Ainsi, la matrice $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable, car la somme directe de tous les sous-espaces propres $E_2 \oplus E_3$ est de dimension 2. Il ne peut donc pas exister de base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de $\mathbf{A}$.

7.3.2. Multiplicité des valeurs propres.— Soient $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de $\mathbf{A}$. L'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme $p_{\mathbf{A}}$ est appelé *multiplicité algébrique* de λ, on la note $\mathrm{mult}^{\mathbf{A}}_{\mathrm{alg}}(\lambda)$, ou $\mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda)$ s'il n'y a pas de confusion possible.

La dimension du sous-espace propre E_λ est appelé la *multiplicité géométrique* de λ, on la note $\mathrm{mult}^{\mathbf{A}}_{\mathrm{geo}}(\lambda)$, ou $\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda)$ s'il n'y a pas de confusion possible. Autrement dit

$$\mathrm{mult}^{\mathbf{A}}_{\mathrm{geo}}(\lambda) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}_n)).$$

7.3.3 Proposition.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour toute valeur propre λ de $\mathbf{A}$, on a l'inégalité suivante

$$\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda) \leq \mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda).$$

Preuve. Soit λ une racine de $p_{\mathbf{A}}$ d'ordre de multiplicité h. D'après le théorème de trigonalisation 7.1.4, la matrice $\mathbf{A}$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure $\mathbf{T}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{T}_1$ est une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_h(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à λ et où la matrice $\mathbf{T}_2$ est triangulaire supérieure n'ademettant pas le coefficient λ sur sa diagonale. On a

$$\mathrm{rg}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}_n) = \mathrm{rg}\begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 - \lambda \mathbf{1}_h & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 - \lambda \mathbf{1}_{n-h} \end{bmatrix}$$

Par suite, on a

$$\mathrm{rg}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}_n) \geq \mathrm{rg}(\mathbf{T}_2 - \lambda \mathbf{1}_{n-h}) = n - h.$$

La dernière égalité provient du fait que $\mathbf{T}_2 - \lambda \mathbf{1}_{n-h}$ est inversible, car λ n'est pas sur la diagonale de $\mathbf{T}_2$, elle est donc de déterminant non nul. On en déduit que

$$h = \mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda) \geq n - \mathrm{rg}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}_n).$$

Or, d'après le théorème du rang, on a $n = \mathrm{rg}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}_n) + \mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda)$. Ainsi

$$\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda) \leq \mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda).$$

□

7.3.4. Exemple.— Considérons la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geq 3$, suivante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{A}$ est de rang 2, par conséquence, par la formule du rang, théorème 2.4.14, la dimension du sous-espace propre $E_0 = \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ est $\dim E_0 = n - 2$. Ainsi, d'après la proposition 7.3.3, la multiplicité algébrique de la valeur propre 0 satisfait

$$n - 2 \leq \mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(0).$$

Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ se factorise sous la forme

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n x^{n-2}(x^2 + \alpha x + \beta)$$

où α et β sont deux réels. Nous avons vu en 7.1.12 que le calcul des traces des matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^2$ permet de déterminer les deux réels α et β ; on obtient ainsi toutes les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$.

§ 4 Caractérisation des matrices diagonalisables

7.4.1 Théorème (Caractérisation des matrices diagonalisables).— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\mathbf{A}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

ii) le polynôme $p_{\mathbf{A}}$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et, pour toute valeur propre λ de $\mathbf{A}$,

$$\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda) = \mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda),$$

iii) il existe des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de $\mathbf{A}$, telles que

$$\mathbb{K}^n = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}.$$

Preuve. Montrons que **i)** implique **ii)**. Supposons que $\mathbf{A}$ soit diagonalisable. Alors $\mathbf{A}$ est semblable à une matrice diagonale dont la diagonale est formée des valeurs propres de $\mathbf{A}$. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ces valeurs propres. On a

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n (x - \lambda_1)^{n_1} \ldots (x - \lambda_p)^{n_p},$$

où $n_i = \mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda_i)$ est la multiplicité algébrique de la valeur propre λ_i, c'est-à-dire, le nombre de fois que λ_i apparaît sur la diagonale.

Montrons que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda_i) = \mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda_i)$. D'après la proposition 7.2.4, il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de $\mathbf{A}$. Il existe n_i vecteurs $\mathbf{x}$ de la base $\mathcal{B}$ vérifiant $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{x}$, c'est-à-dire, n_i vecteurs linéairement indépendants dans le sous-espace propre E_{λ_i}. Par suite,

$$\mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda_i) = n_i \leq \dim(E_{\lambda_i}) = \mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda_i).$$

Or, d'après la proposition 7.3.3, on a $\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda_i) \leq \mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda_i)$. On obtient ainsi l'égalité $\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda_i) = \mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda_i)$.

Montrons que **ii)** implique **iii)**. Soit $\mathbf{A}$ une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé, soit

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n (x - \lambda_1)^{n_1} (x - \lambda_2)^{n_2} \ldots (x - \lambda_p)^{n_p},$$

et tel que pour tout i,

$$n_i = \mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda_i) = \mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda_i).$$

D'après la proposition 6.2.9, les sous-espaces propres sont en somme directe. Soit F le sous-espace de $\mathbb{K}^n$ défini par

$$F = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \ \ldots \ \oplus E_{\lambda_p}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\dim(F) &= \dim(E_{\lambda_1}) + \ldots + \dim(E_{\lambda_p}) \\
&= n_1 + \ldots + n_p \\
&= \deg(p_{\mathbf{A}}) = n.
\end{aligned}$$

Ainsi le sous-espace F de $\mathbb{K}^n$ est de dimension n, par suite $F = \mathbb{K}^n$. Ce qui montre l'assertion **iii)**.

Montrons que **iii)** implique **i)**. Supposons que $\mathbf{A}$ admette des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ telles que

$$\mathbb{K}^n = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}.$$

Considérons, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\mathcal{B}_i$ une base de E_{λ_i}, alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ forme une base de vecteurs propres de $\mathbb{K}^n$. De la proposition 7.2.4, on déduit alors que $\mathbf{A}$ est diagonalisable. $\square$

7.4.2. Remarque.— On peut résumer ce résultat, en disant qu'une matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique s'écrit

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n(x-\lambda_1)^{\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda_1)} \ldots (x-\lambda_p)^{\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda_p)},$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

En particulier, on retrouve la proposition 7.2.7. Si $\mathbf{A}$ n'admet que des racines simples, alors, pour tout i,

$$1 \leq \mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda_i) \leq \mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda_i) = 1.$$

Par suite, $\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda_i) = \mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda_i) = 1$ et $\mathbf{A}$ est diagonalisable.

7.4.3. Exemple.— Nous avons vu dans l'exemple 6.3.6 que la matrice $\mathbf{R}_\theta$ de la rotation du plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Cependant elle possède deux valeurs propres complexes distinctes : $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. La matrice $\mathbf{R}_\theta$ est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$, on a

$$E_{i\theta} = \mathrm{Vect}(\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}), \qquad E_{-i\theta} = \mathrm{Vect}(\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}).$$

D'où, en posant $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & -i \end{bmatrix}$, la matrice de changement de la base canonique à la base formée des vecteurs propres $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$, on a

$$\begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \mathbf{P},$$

où l'inverse de la matrice $\mathbf{P}$ est

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}.$$

7.4.4 Exercice.— Nous avons vu dans l'exercice 7.2.3, qu'une matrice $\mathbf{A}$ par blocs :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sont deux matrices carrées diagonalisables de $\mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{K})$ respectivement, est diagonalisable. L'objectif de cet exercice est de montrer que la réciproque est vraie.

1. Montrer que $p_{\mathbf{A}} = p_{\mathbf{B}}.p_{\mathbf{C}}$.

2. Montrer que, pour toute valeur propre λ de $\mathbf{A}$, on a

$$\mathrm{mult}^{\mathbf{A}}_{\mathrm{geo}}(\lambda) = \mathrm{mult}^{\mathbf{B}}_{\mathrm{geo}}(\lambda) + \mathrm{mult}^{\mathbf{C}}_{\mathrm{geo}}(\lambda).$$

3. Montrer que si $\mathbf{B}$ ou $\mathbf{C}$ n'est pas diagonalisable, alors il existe une valeur propre λ de $\mathbf{A}$ telle que

$$\mathrm{mult}^{\mathbf{A}}_{\mathrm{geo}}(\lambda) < \mathrm{mult}^{\mathbf{A}}_{\mathrm{alg}}(\lambda).$$

4. En déduire, que si $\mathbf{A}$ est diagonalisable, alors $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sont diagonalisables.

§ 5 Matrices diagonalisables : premières applications

Nous présentons ici une première application de la diagonalisation des matrices avec le calcul des puissances des matrices et la résolution de systèmes d'équations différentielles linéaires. Nous reviendrons plus longuement sur ces applications dans les prochains chapitres, en particulier, nous traiterons aussi le cas des matrices non diagonalisables.

7.5.1. Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.— Une première application classique de la diagonalisation est le calcul des puissance d'une matrice. Soit $\mathbf{A}$ une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe une matrice diagonale

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{bmatrix}$$

et une matrice inversible $\mathbf{P}$ telles que : $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$. Alors $\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}$, pour tout entier naturel k, d'où

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p^k \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$

7.5.2. Exemple.— Les puissances successives de la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ sont

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2^{k+1} - 3^k & 2^{k+1} - 2.3^k \\ -2^k + 3^k & -2^k + 2.3^k \end{bmatrix}$$

avec

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

7.5.3. Résolution des systèmes différentiels linéaires.— Une autre application classique de la diagonalisation d'une matrice est la résolution des systèmes différentiels linéaires. On se propose de résoudre les systèmes différentiels linéaires de la forme :

$$\left| \begin{array}{ll} \dfrac{dx_1(t)}{dt} & = a_1^1 x_1(t) + \cdots + a_1^n x_n(t) \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} & = a_n^1 x_1(t) + \cdots + a_n^n x_n(t) \end{array} \right.$$

où les a_i^j sont des réels et les x_i des fonctions réelles à valeurs réelles. Un tel système différentiel prend la forme matricielle suivante :

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \tag{7.4}$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

et où $\dfrac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$ désigne la dérivé du vecteur $\mathbf{x}(t)$.

Supposons que la matrice $\mathbf{A}$ soit diagonalisable (nous aborderons le cas des systèmes différentiels avec $\mathbf{A}$ non diagonalisable plus tard dans le cours), il existe une matrice $\mathbf{D}$ diagonale et $\mathbf{P}$ inversible telles que

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}.$$

La matrice $\mathbf{P}$ désigne un changement de base de $\mathbb{R}^n$: si $\mathbf{x}(t)$ est le vecteur colonne exprimant un vecteur $\mathbf{x}(t)$ dans la base initiale et $\mathbf{y}(t)$ celui exprimant $\mathbf{x}(t)$ dans la nouvelle base. On fait le changement de variable $\mathbf{y}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t)$. D'où

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{P}^{-1}\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt},$$

donc

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y}(t) = \mathbf{D}\mathbf{y}(t).$$

Le système est donc équivalent au système :

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{D}\mathbf{y}(t),$$

qui est facile à intégrer, car $\mathbf{D}$ est diagonale. En effet, si

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{bmatrix}$$

les solutions de cette équation sont les vecteurs $\mathbf{y}(t)$ dont la i-ième composante est

$$y_i(t) = e^{\lambda_i t} y_i(0).$$

Il suffit alors de calculer $\mathbf{x}(t)$ en calculant $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{y}(t)$.

7.5.4. Exemple.— Soit à résoudre le système différentiel suivant :

$$\left| \begin{array}{ll} \dfrac{dx(t)}{dt} & = x(t) - y(t), \\ \dfrac{dy(t)}{dt} & = 2x(t) + 4y(t) \end{array} \right. \tag{7.5}$$

où $x, y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions réelles. On pose

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Le système $\dfrac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{D}\mathbf{y}(t)$, avec $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ s'écrit sous la forme :

$$\left| \begin{array}{ll} \dfrac{du(t)}{dt} & = 2u(t) \\ \dfrac{dv(t)}{dt} & = 3v(t) \end{array} \right.$$

Ces deux équations ont pour solution

$$\left| \begin{array}{l} u(t) = \beta_1 e^{2t} \\ v(t) = \beta_2 e^{3t} \end{array} \right.$$

où β_1 et β_2 sont deux constantes réelles. On en déduit que le système (7.5) admet pour solution

$$\left| \begin{array}{l} x(t) = \beta_1 e^{2t} + \beta_2 e^{3t} \\ y(t) = -\beta_1 e^{2t} - 2\beta_2 e^{3t} \end{array} \right.$$

7.5.5 Exercice.— On considère la matrice suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geq 2$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{bmatrix}$$

1. La matrice $\mathbf{A}$ est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que $n-1$ est une valeur propre de $\mathbf{A}$.
3. Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre $n-1$.
4. Quel est l'ordre de multiplicité de la valeur propre $n-1$?
5. Calculer la trace de la matrice $\mathbf{A}$. En déduire la valeur de toutes les valeurs propres de $\mathbf{A}$.
6. Résoudre le système différentiel suivant

$$\left| \begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= 3x(t) + y(t) + z(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= x(t) + 3y(t) + z(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= x(t) + y(t) + 3z(t) \end{aligned} \right.$$

où $x, y, z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont trois fonctions dérivables vérifiant $x(0) = 1$, $y(0) = z(0) = 0$.

§ 6 Exercices

7.6.1 Exercice.— Montrer que la matrice suivante n'est pas diagonalisable :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

7.6.2 Exercice.— Les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, voir 3.1.3, sont-elles diagonalisables ?

7.6.3 Exercice.— Diagonaliser ou trigonaliser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, en donnant la matrice de passage, les matrices suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

7.6.4 Exercice.— Discuter en fonction de a, b et c la possibilité de diagonaliser les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

7.6.5 Exercice.— Soit θ un réel. On considère la matrice de rotation

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

1. Calculer dans $\mathbb{C}$ les valeurs propres de A.
2. Discuter en fonction de θ la possibilité de diagonaliser A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

7.6.6 Exercice.— Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si λ est une valeur propre complexe de $\mathbf{A}$, alors $\overline{\lambda}$ est aussi valeur propre de $\mathbf{A}$, de même ordre de multiplicité.
2. Montrer que si $\mathbf{v}$ est un vecteur propre associé à λ, alors $\overline{\mathbf{v}}$ est un vecteur propre associé à $\overline{\lambda}$.
3. Diagonaliser en donnant une matrice de passage la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Calculer $\mathbf{A}^k$, pour tout entier naturel k.

7.6.7 Exercice.— Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En diagonalisant $\mathbf{A}$, trouver une solution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ à l'équation $\mathbf{X}^2 = \mathbf{A}$.

7.6.8 Exercice.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang un.

1. Montrer que la trace de $\mathbf{A}$ est une valeur propre de $\mathbf{A}$.
2. En déduire que $\mathbf{A}$ est diagonalisable si, et seulement si, sa trace est non nulle.

7.6.9 Exercice.— On considère la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

1. Quelle est la somme des valeurs propres de $\mathbf{A}$?
2. Quel est le produit des valeurs propres de $\mathbf{A}$?
3. Montrer que, si son déterminant n'est pas nul, $\mathbf{A}$ est diagonalisable.
4. Montrer que, si son déterminant est nul, $\mathbf{A}$ n'est diagonalisable que si elle est nulle.
5. Montrer que $\mathbf{A}$ est diagonalisable sauf si elle est de rang un.
6. En supposant que la matrice $\mathbf{A}$ est réelle ; à quelle condition est-elle diagonalisable par un changement de base réel ?

7.6.10 Exercice.— On considère la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathbf{A}$ est diagonalisable et diagonaliser $\mathbf{A}$.
2. Soit $\mathbf{N}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{M}$ la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ défini par blocs :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & -\mathbf{N} \\ 2\mathbf{N} & 4\mathbf{N} \end{bmatrix}.$$

Montrer que la matrice $\mathbf{M}$ est diagonalisable si, et seulement si, la matrice $\mathbf{N}$ est diagonalisable.