CHAPITRE
9

Décomposition spectrale des matrices

Sommaire

1	**Préliminaires**	1
2	**Les espaces spectraux**	3
3	**Exercices**	10
4	**Décomposition spectrale géométrique**	13
5	**Décomposition spectrale algébrique**	16
6	**Calcul de la décomposition spectrale algébrique**	21

§ 1 Préliminaires

9.1.1. Diagonalisation par blocs.— Dans les chapitres précédents, nous avons vu qu'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas toujours diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Nous allons montrer dans ce chapitre que si le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{A}$ est scindé, alors il est toujours possible de la « *diagonaliser par blocs* » dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, autrement dit, que la matrice $\mathbf{A}$ est semblable à une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{B}_p \end{bmatrix},$$

où les $\mathbf{B}_i$ sont des blocs carrés.

D'après le théorème de caractérisation des matrices diagonalisables, théorème 7.4.1, diagonaliser une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ revient à trouver une décomposition de l'espace $\mathbb{K}^n$ en une somme directe

$$\mathbb{K}^n = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$$

de sous-espaces propres associés aux valeurs propres de $\mathbf{A}$, *i.e.*, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $E_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)$. Diagonaliser une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par blocs consiste à trouver une décomposition de l'espace $\mathbb{K}^n$ en une somme directe

$$\mathbb{K}^n = N_1 \oplus \ldots \oplus N_p,$$

de sous-espaces vectoriels N_i de $\mathbb{K}^n$ stables par $\mathbf{A}$, *i.e.*, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$,

$$\mathbf{x} \in N_i \quad \text{implique} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \in N_i.$$

On montre que ceci est équivalent à dire que la matrice $\mathbf{A}$ est semblable à une matrice diagonale par blocs, c'est-à-dire de la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{B}_p \end{bmatrix},$$

où, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\mathbf{B}_i$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$, avec $n_i = \dim(N_{\lambda_i})$.

9.1.2. Matrices strictement triangulaire.— On appelle matrice *strictement triangulaire* supérieure (resp. inférieure) une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) dont les coefficients diagonaux sont tous nuls.

9.1.3 Proposition.— Toute matrice strictement triangulaire est nilpotente.

Preuve. Soit $\mathbf{T}$ une matrice strictement triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Sa diagonale étant nulle, le spectre de $\mathbf{T}$ est réduit à $\{0\}$. Ainsi, le polynôme caractéristique de $\mathbf{T}$ est

$$p_{\mathbf{T}} = (-1)^n x^n.$$

Le polynôme minimal de $\mathbf{T}$ est donc de la forme x^k, avec $1 \leq k \leq n$. Autrement dit, $\mathbf{T}$ est nilpotente. $\square$

Nous avons de nombreuses caractérisations des matrices nilpotentes :

9.1.4 Proposition.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- **i)** la matrice $\mathbf{A}$ est nilpotente,
- **ii)** le polynôme minimal de $\mathbf{A}$ est de la forme x^r, avec $r > 0$,
- **iii)** le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $(-1)^n x^n$,
- **iv)** la puissance n-ième de $\mathbf{A}$ est nulle,
- **v)** le spectre de $\mathbf{A}$ est réduit à $\{0\}$,
- **vi)** la matrice $\mathbf{A}$ est semblable à une matrice strictement triangulaire,
- **vii)** $\mathrm{trace}(\mathbf{A}^k) = 0$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Preuve. Si $\mathbf{A}$ est nilpotente, il existe un entier q tel que le polynôme x^q soit annulateur de $\mathbf{A}$, par suite, le polynôme minimal de $\mathbf{A}$ est de la forme x^r, où r est l'indice de nilpotence de la matrice $\mathbf{A}$. Ainsi **i)** implique **ii)**. Par ailleurs, **ii)** implique **iii)**, **iii)** implique **iv)** et **iv)** implique **v)** sont immédiates. Supposons que le spectre de $\mathbf{A}$ soit réduit à $\{0\}$, *i.e.*, 0 est la seule valeur propre de $\mathbf{A}$. La matrice $\mathbf{A}$ est trigonalisable et semblable à une matrice strictement triangulaire supérieure $\mathbf{T}$, *i.e.*

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{P},$$

avec $\mathbf{P}$ inversible. D'où **v)** implique **vi)**. L'implication **vi)** implique **i)** est donnée par la proposition 9.1.3. L'équivalence de **vii)** avec les autres propriétés est une conséquence immédiate de la proposition 7.1.9. $\square$

§ 2 Les espaces spectraux

9.2.1. Premier exemple : le cas d'une matrice diagonalisable.— Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $p_{\mathbf{A}} = -(x-4)(x-1)^2$ et son polynôme minimal est $m_{\mathbf{A}} = (x-4)(x-1)$. La matrice $\mathbf{A}$ est alors diagonalisable. Il existe donc une décomposition de l'espace $\mathbb{R}^3$ en somme directe de sous-espaces propres :

$$\mathbb{R}^3 = E_4 \oplus E_1.$$

La valeur propre 4 étant de multiplicité algébrique 1, on a $\dim(E_4) = 1$. On en déduit que $\dim(E_1) = 2$.

Déterminons les projections de l'espace $\mathbb{R}^3$ sur les sous-espaces propres E_4 et E_1. Nous noterons

$$\pi_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow E_4$$

la projection de $\mathbb{R}^3$ sur le sous-espace E_4 parallèlement au sous-espace E_1 et

$$\pi_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow E_1$$

la projection de $\mathbb{R}^3$ sur E_1 parallèlement à E_4. Ces deux projections sont entièrement caractérisées par les relations suivantes :

$$\begin{gathered} \pi_4^2 = \pi_4, \quad \pi_1^2 = \pi_1, \quad \pi_4\pi_1 = \pi_1\pi_4 = 0, \quad \text{et} \quad \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = \pi_4 + \pi_1, \\ \mathrm{Im}(\pi_4) = E_4, \quad \mathrm{Ker}(\pi_4) = E_1, \quad \mathrm{Im}(\pi_1) = E_1, \quad \mathrm{Ker}(\pi_1) = E_4 \end{gathered} \tag{9.1}$$

On notera Π_1 et Π_4 les matrices des projections π_1 et π_4 exprimées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Nous allons voir que l'on peut exprimer ces deux matrices en fonction de la matrice $\mathbf{A}$.

Les polynômes $x-4$ et $x-1$ sont premiers entre eux. D'après l'identité de Bézout, cf. théorème 1.5.13, il existe deux polynôme h_1 et h_2 de $\mathbb{R}[x]$ vérifiant l'équation suivante

$$(x-4)h_1 + (x-1)h_2 = 1.$$

Un calcul élémentaire nous permet de déterminer les polynômes h_1 et h_2, on a :

$$(x-4)(-\frac{1}{3}) + (x-1)(\frac{1}{3}) = 1. \tag{9.2}$$

Montrons que
$$\Pi_4 = \frac{1}{3}(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3) \quad \text{et} \quad \Pi_1 = -\frac{1}{3}(\mathbf{A} - 4\mathbf{1}_3).$$
Supposons Π_4 et Π_1 ainsi définis et montrons qu'ils satisfont les relations 9.1. De l'équation 9.2, on déduit que
$$\Pi_4 + \Pi_1 = \mathbf{1}_3. \tag{9.3}$$
Montrons que
$$\mathrm{Ker}(\Pi_4) = E_1 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(\Pi_4) = E_4.$$
Comme $\Pi_4 = \frac{1}{3}(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3)$, la première égalité est immédiate. Pour la seconde égalité, supposons $\mathbf{y} \in \mathrm{Im}(\Pi_4)$, il existe alors un vecteur $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que
$$\mathbf{y} = \Pi_4(\mathbf{x}) = \Pi_4(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3)(\mathbf{x}).$$
Par ailleurs,
$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{1}_3)\frac{1}{3}(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3)(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}m_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$
Par suite, $(\mathbf{A} - 4\mathbf{1}_3)(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, d'où $\mathbf{y} \in E_4$.

Inversement, si $\mathbf{y} \in E_4$, d'après (9.3) on a $\mathbf{y} = \Pi_4(\mathbf{y}) + \Pi_1(\mathbf{y})$. Or
$$\Pi_1(\mathbf{y}) = -\frac{1}{3}(\mathbf{A} - 4\mathbf{1}_3)(\mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$
Donc $\mathbf{y} = \Pi_4(\mathbf{y})$, par suite $\mathbf{y} \in \mathrm{Im}(\Pi_4)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(\Pi_4) = E_4$.

De la même façon, on montre que
$$\mathrm{Ker}(\Pi_1) = E_4 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(\Pi_1) = E_1.$$
Les relations $\Pi_4\Pi_1 = \Pi_1\Pi_4 = \mathbf{0}$ se déduisent immédiatement du fait que
$$\Pi_4\Pi_1 = \left(\frac{1}{3}(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3)\right)\left(-\frac{1}{3}(\mathbf{A} - 4\mathbf{1}_3)\right) = -\frac{1}{9}m_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$
Les relations $\Pi_4^2 = \Pi_4$, $\Pi_1^2 = \Pi_1$ sont une conséquence immédiate des relations (9.3) et $\Pi_4\Pi_1 = \Pi_1\Pi_4 = \mathbf{0}$.

En multipliant les deux membres de la relation (9.3) à gauche par la matrice $\mathbf{A}$, on obtient la décomposition suivante de la matrice $\mathbf{A}$:
$$\mathbf{A} = \mathbf{A}\Pi_4 + \mathbf{A}\Pi_1.$$
Comme pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de E_4, on a $\mathbf{A}\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$ et $\Pi_4\mathbf{x} = \mathbf{x}$, on en déduit que
$$\mathbf{A}\Pi_4 = 4\Pi_4.$$
Par ailleurs, on a de façon similaire $\mathbf{A}\Pi_1 = \Pi_1$. Ainsi,
$$\mathbf{A} = 4\Pi_4 + \Pi_1. \tag{9.4}$$
La décomposition (9.4) de la matrice $\mathbf{A}$ est appelée la *décomposition spectrale* de $\mathbf{A}$. On montrera dans la suite que cette décomposition de la matrice $\mathbf{A}$ est très utile pour avoir des expressions simples de puissances de $\mathbf{A}$. En particulier, pour tout entier k, on montrera que
$$\mathbf{A}^k = 4^k\Pi_4 + \Pi_1.$$

Les matrices des projecteurs π_1 et π_4 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont

$$\Pi_4 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \Pi_1 = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

On notera que $\mathrm{rg}(\Pi_4) = 1 = \mathrm{trace}(\Pi_4)$ et que $\mathrm{rg}(\Pi_1) = 2 = \mathrm{trace}(\Pi_2)$.

9.2.2. Deuxième exemple : le cas d'une matrice non diagonalisable. — Considèrons la matrice suivante de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $p_{\mathbf{A}} = (x-2)^3(x-3)$, son polynôme minimal est $m_{\mathbf{A}} = (x-2)^2(x-3)$. La matrice $\mathbf{A}$ n'est donc pas diagonalisable.

En appliquant le lemme des noyaux, théorème 8.3.5, au polynôme minimal, on obtient la décomposition :

$$\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_4)^2 \oplus E_3,$$

où E_3 est le sous-espace propre associé à la valeur propre 3. Notons

$$N_2 = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_4)^2.$$

La dimension de E_3 est majorée par la multiplicité algébrique de la valeur propre 3. On a donc $\dim(E_3) = 1$ et par suite $\dim(N_2) = 3$.

Déterminons la matrice de la projection π_2 de $\mathbb{R}^4$ sur N_2 parallèlement à E_3 et celle de la projection π_3 de $\mathbb{R}^4$ sur E_3 parallèlement à N_2, exprimées dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Les polynômes $(x-2)^2$ et $x-3$ sont premiers entre eux ; on établit une relation de Bézout :

$$(x-2)^2 + (x-3)(-x+1) = 1.$$

Posons

$$\Pi_2 = (\mathbf{A} - 3\mathbf{1}_4)(-\mathbf{A} + \mathbf{1}_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Pi_3 = (\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_4)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi définis, Π_2 et Π_3 satisfont :

$$\Pi_2^2 = \Pi_2, \quad \Pi_3^2 = \Pi_3, \quad \Pi_2\Pi_3 = \Pi_3\Pi_2 = 0, \quad \mathbf{1}_4 = \Pi_2 + \Pi_3.$$

De plus, on a

$$\mathrm{Im}(\Pi_2) = N_2, \quad \mathrm{Ker}(\Pi_2) = E_3, \quad \mathrm{Im}(\Pi_3) = E_3, \quad \mathrm{Ker}(\Pi_3) = N_2.$$

Ainsi, les matrices Π_2 et Π_3 sont bien celles des projections sur les sous-espaces N_2 et E_3 respectivement.

Posons

$$\mathbf{D} = 2\Pi_2 + 3\Pi_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ et $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N}$. Ainsi, $\mathbf{A}$ s'écrit comme la somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente. Nous montrons dans ce chapitre que cette décomposition est unique.

9.2.3. Sous-espace spectral. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé :

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n(x-\lambda_1)^{n_1}\ldots(x-\lambda_p)^{n_p},$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$ et $n_1 + \ldots + n_p = n$. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{1}_n)^{n_i}$ de $\mathbb{K}^n$ est appelé le *sous-espace spectral* de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre λ_i. On le notera N_{λ_i}.

9.2.4 Proposition. — Soient $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de $\mathbf{A}$. Le sous-espace propre E_λ est un sous-espace vectoriel du sous-espace spectral N_λ.

Preuve. Cela découle immédiatement du fait que pour toute matrice carrée $\mathbf{A}$, on a la suite d'inclusions de sous-espaces

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) \subset \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^2) \subset \ldots \subset \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^k) \subset \ldots$$

□

9.2.5 Théorème. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé avec

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n(x-\lambda_1)^{n_1}\ldots(x-\lambda_p)^{n_p},$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, $n_1 + \ldots + n_p = n$. Alors, les sous-espaces spectraux de $\mathbf{A}$ satisfont, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, les assertions suivantes :

- **i)** $\mathbb{K}^n = N_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus N_{\lambda_p}$,
- **ii)** N_{λ_i} est stable par $\mathbf{A}$,
- **iii)** $\dim(N_{\lambda_i}) = n_i$.

L'assertion **i)** découle du théorème de Cayley-Hamilton 8.5.1. Le polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}}$ est annulateur de la matrice $\mathbf{A}$. La décomposition **i)** est une conséquence immédiate du lemme de décomposition en noyaux, appliquée à la factorisation du polynôme $p_{\mathbf{A}}$ en facteurs irréductibles.

Montrons **ii)**. Soit $\mathbf{x}$ un vecteur de N_{λ_i}. Alors $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{1}_n)^{n_i}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, donc

$$\mathbf{A}(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{1}_n)^{n_i}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{1}_n)^{n_i}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

d'où $\mathbf{A}\mathbf{x} \in N_{\lambda_i}$.

Nous admettrons la preuve de l'assertion **iii)**.

9.2.6. Projecteurs spectraux. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé :

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n(x-\lambda_1)^{n_1}\ldots(x-\lambda_p)^{n_p},$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, $n_1 + \ldots + n_p = n$. D'après le théorème 9.2.5, on a une décomposition

$$\mathbb{K}^n = N_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus N_{\lambda_p}.$$

9.2.7. Définition. — La projection π_{λ_i} sur le sous-espace spectral N_{λ_i} parallèlement au sous-espace $\underset{\substack{j=1\\ i\neq j}}{\overset{p}{\oplus}} N_{\lambda_j}$ est appelé *projecteur spectral associé à la valeur propre* λ_i. On notera Π_{λ_i} la matrice du projecteur spectral π_{λ_i} dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

9.2.8 Proposition. — Les projecteur spectraux $\Pi_{\lambda_1}, \ldots, \Pi_{\lambda_p}$ sont des polynômes en la matrice $\mathbf{A}$.

Preuve. Soit $i \in [\![1, p]\!]$. Notons

$$g_i = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} (x - \lambda_j)^{n_j}.$$

Si $i \neq j$, le polynôme $g = g_i g_j = (-1)^n p_{\mathbf{A}}$ est annulateur de la matrice $\mathbf{A}$. Les polynômes $g_1, \ldots, g_p$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. D'après le théorème de Bézout, il existe des polynômes h_1, ..., h_p de $\mathbb{K}[x]$ tels que

$$g_1h_1 + \ldots + g_ph_p = 1.$$

Par suite,

$$g_1(\mathbf{A})h_1(\mathbf{A}) + \ldots + g_p(\mathbf{A})h_p(\mathbf{A}) = \mathbf{1}_n. \tag{9.5}$$

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, posons

$$\Pi_{\lambda_i} = g_i(\mathbf{A})h_i(\mathbf{A}).$$

De la relation (9.5), on déduit que

$$\mathbf{1}_n = \Pi_{\lambda_1} + \ldots + \Pi_{\lambda_p}. \tag{9.6}$$

D'autre part, si $j \neq i$, le polynôme $g_j g_i = g$ est annulateur de $\mathbf{A}$, donc :

$$\begin{aligned}\Pi_{\lambda_i} \circ \Pi_{\lambda_j} &= g_i(\mathbf{A})h_i(\mathbf{A})g_j(\mathbf{A})h_j(\mathbf{A})\\ &= g_i(\mathbf{A})g_j(\mathbf{A})h_i(\mathbf{A})h_j(\mathbf{A})\\ &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Il nous reste à montrer que

$$\operatorname{Im}(\Pi_{\lambda_i}) = N_{\lambda_i}, \qquad \operatorname{Ker}(\Pi_{\lambda_i}) = \bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} N_{\lambda_j}.$$

Montrons la première égalité. Soit $\mathbf{y} = \Pi_{\lambda_i}\mathbf{x} \in \operatorname{Im}(\Pi_{\lambda_i})$, on a $\mathbf{y} = g_i(\mathbf{A})h_i(\mathbf{A})\mathbf{x}$ et

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{1}_n)^{n_i}\mathbf{y} &= (x - \lambda_i)^{n_i}(\mathbf{A})g_i(\mathbf{A})h_i(\mathbf{A})\mathbf{x}\\ &= g_i(\mathbf{A})g(\mathbf{A})\mathbf{x}\\ &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Donc $\mathbf{y} \in N_{\lambda_i}$ et $\operatorname{Im}(\pi_{\lambda_i}) \subseteq N_{\lambda_i}$.

Inversement, soit $\mathbf{x} \in N_{\lambda_i}$. On a $\mathbf{x} = \Pi_{\lambda_1}\mathbf{x} + \ldots + \Pi_{\lambda_p}\mathbf{x}$. Par ailleurs, si $i \neq j$ le polynôme $(x - \lambda_i)^{n_i}$ divise g_j. On a alors

$$\Pi_{\lambda_j}\mathbf{x} = g_j(\mathbf{A})h_j(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}, \qquad \text{si } i \neq j.$$

Donc $\mathbf{x} = \Pi_{\lambda_i}\mathbf{x} \in \mathrm{Im}(\Pi_{\lambda_i})$ et $N_{\lambda_i} \subseteq \mathrm{Im}(\Pi_{\lambda_i})$.

Montrons la seconde égalité. Si $i \neq j$, le polynôme $(x-\lambda_j)^{n_j}$ divise g_i, donc pour tout $\mathbf{x} \in N_{\lambda_j}$, on a $\Pi_i\mathbf{x} = g_i(\mathbf{A})h_i(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Donc $N_{\lambda_j} \subseteq \mathrm{Ker}(\Pi_{\lambda_i})$ si $i \neq j$. Par suite

$$\bigoplus_{j\neq i} N_{\lambda_j} \subseteq \mathrm{Ker}(\Pi_{\lambda_i}).$$

Inversement, soit $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(\Pi_{\lambda_i})$. Comme $\mathbf{x} = \Pi_{\lambda_1}\mathbf{x} + \ldots + \mathbf{0} + \ldots + \Pi_{\lambda_p}\mathbf{x}$, on a $\mathbf{x} \in \bigoplus_{j\neq i} N_{\lambda_j}$. On montre ainsi la proposition. □

9.2.9 Théorème (Décomposition spectrale algébrique). — Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}}$ est scindé sur $\mathbb{K}$. Soient λ_1, ..., λ_p les valeurs propres de $\mathbf{A}$. Il existe une décomposition

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N},$$

où $\mathbf{D}$ est une matrice diagonalisable et $\mathbf{N}$ est une matrice nilpotente qui commutent, *i.e.*, $\mathbf{DN} = \mathbf{ND}$.

De plus, les matrices $\mathbf{D}$ et $\mathbf{N}$ sont des polynômes en $\mathbf{A}$ et la matrice $\mathbf{D}$ est donnée par

$$\mathbf{D} = \lambda_1\Pi_{\lambda_1} + \ldots + \lambda_p\Pi_{\lambda_p},$$

où $\Pi_{\lambda_1}, \ldots, \pi_{\lambda_p}$ désignent les projecteurs spectraux de la matrice $\mathbf{A}$.

La preuve de ce théorème est admise. La fin de cette section présente une méthode permettant de calculer la décomposition du theorème 9.2.9.

9.2.10. Calcul de la décomposition spectrale algébrique. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de spectre $\mathrm{spec}(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$. Étant donné un polynôme annulateur

$$g = (x-\lambda_1)^{n_1} \ldots (x-\lambda_p)^{n_p}$$

de $\mathbf{A}$, déterminons les projecteurs spectraux $\Pi_{\lambda_1}, \ldots, \Pi_{\lambda_p}$ de la matrice $\mathbf{A}$. En pratique, on prendra pour g le polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}}$, ou bien le polynôme minimal $m_{\mathbf{A}}$.

Étape 1 : On décompose la fraction rationnelle $\dfrac{1}{g}$ en éléments simples dans le corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(x)$:

$$\frac{1}{g} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{i,j}}{(x-\lambda_i)^j}.$$

Étape 2 : On pose ensuite

$$h_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j}(x-\lambda_i)^{n_i-j} \quad \text{et} \quad g_i = \frac{1}{(x-\lambda_i)^{n_i}}g = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}(x-\lambda_j)^{n_j}.$$

On a alors
$$\frac{1}{g} = \frac{h_1}{(x-\lambda_1)^{n_1}} + \ldots + \frac{h_p}{(x-\lambda_p)^{n_p}}.$$
Par suite,
$$1 = g_1 h_1 + \ldots + g_p h_p.$$
Étape 3 : On pose alors , pour tout $i \in [\![1,p]\!]$,
$$\Pi_{\lambda_i} = g_i(\mathbf{A})h_i(\mathbf{A}).$$

On vérifie, qu'ainsi définis, pour tout i, Π_{λ_i} est la matrice du projecteur spectral π_{λ_i} de $\mathbb{K}^n$ sur le sous-espace spectral N_{λ_i} exprimée dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

9.2.11. Exemple.— On considère la matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est $p_{\mathbf{A}} = -(x-1)(x-2)^2$. Le polynôme $(x-1)(x-2)$ n'est pas annulateur de $\mathbf{A}$, donc le polynôme minimal de $\mathbf{A}$ est $m_{\mathbf{A}} = (x-1)(x-2)^2$ et $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable.

Déterminons les projecteurs sur les espaces spectraux associés à la décomposition :
$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3) \oplus \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_3)^2.$$
On considère le polynôme annulateur $g = (x-1)(x-2)^2$. On a :
$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} &= \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2},\\ &= \frac{1}{x-1} + \frac{-x+3}{(x-2)^2}.\end{aligned}$$
En posant
$$h_1 = 1,\ g_1 = (x-2)^2,\ h_2 = -x+3,\ g_2 = x-1,$$
on a
$$1 = g_1 h_1 + g_2 h_2.$$
La projection $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow N_1$ sur l'espace spectral $N_1 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3)$ parallèlement à $N_2 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_3)^2$ a pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^3$:
$$\Pi_1 = g_1(\mathbf{A})h_1(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_3)^2.$$
La projection $\pi_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow N_2$ sur N_2 parallèlement à N_1 a pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^3$:
$$\Pi_2 = g_2(\mathbf{A})h_2(\mathbf{A}) = (-\mathbf{A} + 3\mathbf{1}_3)(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3).$$
Notons que l'on aurait pu aussi obtenir Π_2 par la relation :
$$\Pi_2 = \mathbf{1}_3 - \Pi_1,$$
soit
$$\Pi_2 = \mathbf{1}_3 - (\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_3)^2 = -\mathbf{A}^2 + 4\mathbf{A} - 3\mathbf{1}_3.$$

On a donc

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Pi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On obtient

$$\mathbf{D} = \Pi_1 + 2\Pi_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{D}$$

d'où

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{D}$ est diagonalisable (on peut vérifier que son polynôme minimal est $(x-2)(x-1)$) et la matrice $\mathbf{N}$ est nilpotente, on a $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$.

9.2.12. Exemple.— Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

On calcule le polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}} = -(x-1)(x+3)^2$ et le polynôme minimal $m_{\mathbf{A}} = (x-1)(x+3)$. Ce dernier étant scindé et n'ayant que des racines simples, la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable et il existe une décomposition :

$$\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_{-3}.$$

Notons, Π_1 et Π_{-3} les matrices des projecteurs spectraux $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow E_1$ et $\pi_{-3} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow E_{-3}$ exprimées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Les matrices Π_1 et Π_{-3} vérifient les deux relations :

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{1}_3 = \Pi_1 + \Pi_{-3} \\ \mathbf{A} = \Pi_1 - 3\Pi_{-3} \end{array} \right.$$

qui s'écrivent sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_{-3} \end{bmatrix}$$

D'où

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

On en déduit :

$$\Pi_1 = \frac{1}{4}\mathbf{A} + \frac{3}{4}\mathbf{1}_3, \qquad \Pi_{-3} = -\frac{1}{4}\mathbf{A} + \frac{1}{4}\mathbf{1}_3. \tag{9.7}$$

§ 3 Exercices

Rappels sur l'identité de Bézout.— Rappelons que des polynômes $f_1, \ldots, f_s$ de $\mathbb{K}[x]$ sont premiers entre eux dans leur ensemble, si les seuls polynômes qui divisent simultanément les polynômes $f_1, \ldots, f_s$ sont de degré nul. Le théorème de Bézout, cf. théorème 1.5.13, montre que les polynômes $f_1, \ldots, f_s$ de $\mathbb{K}[x]$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si, et seulement si, il existe des polynômes $u_1, \ldots, u_s$ de $\mathbb{K}[x]$, vérifiant l'identité de Bézout :

$$f_1h_1 + \cdots + f_sh_s = 1.$$

9.3.1 Exercice. — Trouver une relation de Bézout entre les polynômes f_1 et f_2, avec

1. $f_1 = x^2 + 2x - 1, \quad f_2 = x + 2,$
2. $f_1 = x^4 + 2x^3 - x, \quad f_2 = x^3 + 5,$
3. $f_1 = x^2 + 2x - 1, \quad f_2 = x + 2.$
4. $f_1 = x - 1, \quad f_2 = x + 2,$
5. $f_1 = x + 1, \quad f_2 = x^2 - 2x + 1,$
6. $f_1 = x^4 - 1, \quad f_2 = x^3 + 2.$

9.3.2 Exercice. — En calculant une identité de Bézout, décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(x)$ les fractions suivantes

1. $\dfrac{10x^3}{(x^2+1)(x^2-4)},$
2. $\dfrac{x^3-1}{(x-1)(x-2)(x-3)},$
3. $\dfrac{x^2}{(x^2+x+1)^2},$
4. $\dfrac{(x^2+4)^2}{(x^2+1)(x^2-2)^2}.$

9.3.3 Exercice. — Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ donnée par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de $\mathbf{A}$.
2. Montrer que la matrice $\mathbf{A}$ est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{T}_1$ et $\mathbf{T}_2$ sont deux matrices triangulaires supérieures.
3. Exhiber la matrice de passage.

9.3.4 Exercice. — Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer en fonction de $\mathbf{A}$ les projecteurs spectraux de $\mathbf{A}$.
2. Exprimer, pour tout entier $k \geq 0$, la matrice $\mathbf{A}^k$ en fonction de $\mathbf{A}$.
3. Calculer la matrice de $\mathbf{A}^k$.
4. Répondre aux mêmes questions avec les matrices suivantes :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

9.3.5 Exercice. — On considère la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ suivante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a^2 & a^2 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & a^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de la matrice $\mathbf{A} - (1-a)\mathbf{1}_4$. En déduire que $1-a$ est valeur propre de la matrice $\mathbf{A}$.
2. Si $a = 0$, la matrice $\mathbf{A}$ est-elle diagonalisable ?

Dans la suite de l'exercice, on suppose que le réel a est non nul.

3. Déterminer toutes les valeurs propres de $\mathbf{A}$. La matrice $\mathbf{A}$ est-elle diagonalisable ?
4. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de $\mathbf{A}$.
5. Exprimer en fonction de $\mathbf{A}$ les projecteurs spectraux de $\mathbf{A}$.

9.3.6 Exercice. — On considère la matrice suivante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de $\mathbf{A}$.
2. Déterminer les sous-espaces propres de la matrice $\mathbf{A}$.
3. Calculer les projecteurs spectraux de la matrice $\mathbf{A}$.
4. Déterminer une matrice diagonalisable $\mathbf{D}$ et une matrice nilpotente $\mathbf{N}$ telles que $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N}$.

9.3.7 Exercice. — Même exercice avec les matrices suivantes

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -4 & -7 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$