Catalogue

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Veillez à bien noircir les cases.

Codez votre numéro d'étudiant ci-contre ⟶
et écrivez votre nom et prénom ci-dessous :

Nom et prénom :

. . . .

Attention à ne pas vous tromper, toute erreur invalide la copie !

AMALA – CC 1 – 27 mars 2019

Règlement – L'épreuve dure 1 heure. **Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.** Il n'est admis de consulter aucun document.

Question [`AMALA-A-cours-1`] Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ de rang égal à 1 et dont la trace est nulle.

- ☐ $\mathbf{A}$ est semblable à la matrice nulle.
- ■ Le déterminant de $\mathbf{A}$ est nul.
- ☐ Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $p_{\mathbf{A}}(x) = x(x-1)$.
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question [`AMALA-A-cours-2`] Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_5(\mathbb{C})$ dont l'ensemble des valeurs propres est $\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}} = \{1, 2, 5\}$.

- ■ $\mathbf{A}$ est inversible.
- ☐ $\mathbf{A}$ est de rang 1.
- ☐ $\mathbf{A}$ est de trace nulle.
- ☐ Le déterminant de $\mathbf{A}$ est nul.

Question [`AMALA-A-cours-3`] Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ définie par $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

- ☐ La matrice $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable.
- ■ -4 est valeur propre de la matrice $\mathbf{A}$.
- ☐ La matrice $\mathbf{A}$ admet quatre valeurs propres distinctes.
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte*

Catalogue

Question [AMALA-A-cours-4] Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

- ☐ 2 est valeur propre de $\mathbf{A}$ et $\dim(E_2) = 2$.
- ■ 2 est valeur propre de $\mathbf{A}$ et $\dim(E_2) = 1$.
- ☐ 3 est valeur propre de $\mathbf{A}$ et $\dim(E_2) = 2$.
- ☐ La matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable.

Question [AMALA-A-calculatoires-1] Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ définie par $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 12 & 16 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
On note $p_{\mathbf{A}}(x)$ son polynôme caractéristique et $m_{\mathbf{A}}(x)$ son polynôme minimal.

- ☐ $p_{\mathbf{A}}(x) = (x-2)(x+2)$ et $m_{\mathbf{A}}(x) = (x-2)^2(x+2)^2$.
- ■ $p_{\mathbf{A}}(x) = (x-2)^2(x+2)^2$ et $m_{\mathbf{A}}(x) = (x-2)(x+2)$.
- ☐ $p_{\mathbf{A}}(x) = (x-2)(x+2)$ et $m_{\mathbf{A}}(x) = (x-2)(x+2)$.
- ☐ $p_{\mathbf{A}}(x) = (x-2)^2(x+2)^2$ et $m_{\mathbf{A}}(x) = (x-2)^2(x+2)^2$.

Question [AMALA-A-calculatoires-2] Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ définie par $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Soit $m_{\mathbf{A}}$ son polynôme minimal.

- ☐ $m_{\mathbf{A}}(x) = x(x-1)$.
- ■ $m_{\mathbf{A}}(x) = (x+1)(x-1)^3$.
- ☐ $m_{\mathbf{A}}(x) = (x+1)(x-1)$.
- ☐ $m_{\mathbf{A}}(x) = (x+1)^3(x-1)$.

Question [AMALA-A-calculatoires-3] Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$...

- ☐ $\mathbf{A}$ est diagonalisable et trigonalisable.
- ☐ $\mathbf{A}$ est diagonalisable mais pas trigonalisable.
- ■ $\mathbf{A}$ est trigonalisable mais pas diagonalisable.
- ☐ $\mathbf{A}$ n'est ni diagonalisable ni trigonalisable.

Question [AMALA-A-calculatoires-4] Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- ☐ Le rang de $\mathbf{A}$ est 1.
- ☐ $\mathbf{A}$ est trigonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
- ☐ Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $p_{\mathbf{A}}(x) = -(x+1)(x-2)(x-3)$.
- ■ $\mathbf{A}^2$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

Question [`AMALA-A-calculatoires-5`] Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ définie par $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

☐ $\mathbf{A}$ est diagonalisable.

☐ 1 est valeur propre de $\mathbf{A}$ et $\dim(E_1) = 2$.

☐ 0 est valeur propre de $\mathbf{A}$ et $\dim(E_0) = 2$.

☐ Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $p_{\mathbf{A}}(x) = x^2(1-x)^2$.

■ Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $p_{\mathbf{A}}(x) = (x-1)^3(x+1)$.

Question [`AMALA-A-calculatoires-6`] Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 12 & 16 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

☐ $\mathbf{A}$ n'est pas inversible.

☐ -2 est valeur propre de $\mathbf{A}$ et $\dim(E_{-2}) = 1$.

■ 2 est valeur propre de $\mathbf{A}$ et $\dim(E_2) = 2$.

☐ 0 est valeur propre de $\mathbf{A}$ et $\dim(E_0) = 1$.

Question [`AMALA-A-simple-1`] Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_{17}(\mathbb{C})$. On note $p_{\mathbf{A}}$ son polynôme caractéristique et $m_{\mathbf{A}}$ son polynôme minimal.

☐ Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$ et $m_{\mathbf{A}}(\lambda) \neq 0$.

☐ Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $p_{\mathbf{A}}(\lambda) \neq 0$ et $m_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$.

■ Si λ est une valeur propre de $\mathbf{A}$, alors $m_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$.

☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question [`AMALA-A-simple-2`] Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_5(\mathbb{C})$ et soit $f(x)$ le polynôme

$$f(x) = (x-7)(x+3)(x-1).$$

On suppose que $f(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - 7\mathbf{1}_n)(\mathbf{A} + 3\mathbf{1}_n)(\mathbf{A} - \mathbf{1}_n)$ est la matrice nulle.

☐ On est sûr que le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $p_{\mathbf{A}}(x) = -f(x)$.

☐ On est sûr que le polynôme minimal de $\mathbf{A}$ est $m_{\mathbf{A}}(x) = f(x)$.

☐ Il est possible que le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ soit $p_{\mathbf{A}}(x) = -f(x)$.

■ Il est possible que le polynôme minimal de $\mathbf{A}$ soit $m_{\mathbf{A}}(x) = f(x)$.

☐ Les renseignements donnés suffisent pour calculer $m_{\mathbf{A}}$.

☐ Les renseignements donnés suffisent pour calculer $p_{\mathbf{A}}$.

Catalogue

Question [`AMALA-A-simple-3`] Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ de rang égal à 1 et dont la trace est 1.

- [ ] $\mathbf{A}$ n'est pas trigonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.
- [x] 1 est valeur propre de $\mathbf{A}$ et $\dim E_1 = 1$.
- [ ] $\mathbf{A}$ est semblable à la matrice nulle.
- [ ] Le polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}}(x)$ de $\mathbf{A}$ est divisible par x^3.

Question [`AMALA-A-simple-4`] Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est $-x(x^2+1)$.

- [ ] $\mathbf{A}$ est rang 3
- [ ] 0 est une valeur propre de $\mathbf{A}$ et $\dim E_0 = 2$.
- [ ] Le déterminant de $\mathbf{A}$ est non nul.
- [x] $\mathbf{A}$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

Question [`AMALA-A-simple-5`] Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ dont l'ensemble des valeurs propres est $\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}} = \{1, -2, 3\}$ et soit B la matrice de $\mathscr{M}_5(\mathbb{C})$ définie par blocs par

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|cc} A & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{0}} \\ \hline \mathbf{0} & \begin{matrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{matrix} \end{array}\right].$$

- [ ] $\mathbf{A}$ est de trace nulle.
- [ ] $\mathbf{B}$ est de trace nulle.
- [ ] $\mathbf{A}$ n'est pas inversible.
- [x] $\mathbf{B}$ n'est pas inversible.

Question [`AMALA-A-simple-6`] Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ de rang égal à 2 et dont l'ensemble des valeurs propres est $\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}} = \{0, 1, 3\}$.

- [ ] 0 est valeur propre de $\mathbf{A}$ et $\dim(E_0) = 1$.
- [ ] $\mathbf{A}$ est inversible.
- [x] $\mathbf{A}$ est diagonalisable.
- [ ] Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $p_{\mathbf{A}}(x) = -x(1-x)(3-x)$.
