Catalogue

Veillez à bien noircir les cases.

Codez votre numéro d'étudiant ci-contre $\longrightarrow$
et écrivez votre nom et prénom ci-dessous :

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Nom et prénom :

. . . .

Attention à ne pas vous tromper, toute erreur invalide la copie !

AMALA – CC 2 – 03 avril 2019

Règlement – L'épreuve dure 1 heure. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Il n'est admis de consulter aucun document.

Une question marquée d'un ♣ peut admettre une ou plusieurs réponses.

Question [AMALA-A-CM1] ♣ Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- [ ] La matrice $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable.
- [x] La matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable.
- [x] 1 est valeur propre de la matrice $\mathbf{A}$.
- [x] La matrice $\mathbf{A}$ admet deux valeurs propres distinctes.
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question [AMALA-A-CM2] Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

- [x] Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $p_{\mathbf{A}}(x) = -(x-1)^3$
- [ ] Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $p_{\mathbf{A}}(x) = -x(x-1)^2$
- [ ] Le polynôme minimal de $\mathbf{A}$ est $m_{\mathbf{A}}(x) = x - 1$
- [ ] La matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable.

Question [AMALA-A-CM3] ♣ Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

- [x] Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $p_{\mathbf{A}}(x) = -(x-1)(x-2)^2$
- [ ] Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $p_{\mathbf{A}}(x) = -x(x-1)^2$
- [x] Le polynôme minimal de $\mathbf{A}$ est $m_{\mathbf{A}}(x) = (x-1)(x-2)^2$
- [ ] La matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable.
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question [AMALA-A-TD2] ♣ Considérons les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ suivantes : $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$

- ■ Il existe une matrice $\mathbf{P}$ inversible telle que $\mathbf{A}_2 = \mathbf{P}\mathbf{A}_1\mathbf{P}^{-1}$.
- ■ Il existe une matrice $\mathbf{Q}$ inversible telle que $\mathbf{A}_3 = \mathbf{Q}\mathbf{A}_1\mathbf{Q}^{-1}$.
- ■ Il existe une matrice $\mathbf{R}$ inversible telle que $\mathbf{A}_3 = \mathbf{R}\mathbf{A}_2\mathbf{R}^{-1}$.
- ■ Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}_2$ est $x^2 + 1$.
- □ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question [AMALA-A-TD3] ♣ Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ telle que les valeurs propres sont $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} = \{1, 11, 111\}$.

- ■ La trace de A est un entier pair.
- □ Le rang de A est 3.
- □ Le determinant de A est nul.
- ■ A est trigonalisable.
- □ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question [AMALA-A-TD4] Existe il une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ avec la propriété suivante ? Cochez les cases s'il en existe au moins une.

- □ Son polynôme caractéristique est $x(2x^2+1)$.
- □ L'ensemble des valeurs propres sont $\{1, i\}$.
- □ Il n'existe pas une valeur propre réelle.
- ■ Sa trace est nulle et son déterminant est non-nul.

Question [AMALA-A-TD5] ♣ Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

- □ La matrice A est inversible.
- □ Le rang de $A + 4\mathbf{1}_4$ est 3.
- ■ -4 est une valeur propre est $\dim E_4 = 3$.
- ■ Le polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}}(x)$ de $\mathbf{A}$ est divisible par $x(x+4)$.
- □ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question [AMALA-A-TD6] Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_6(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est $x^2(x+1)^2(x+2)^2$.

- □ La trace de A est 6
- □ La matrice $\mathbf{A}$ est inversible.
- □ Le rang de $\mathbf{A}$ est 6.
- ■ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question [AMALA-A-TD7] Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathscr{M}_5(\mathbb{R})$ définie par $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- ☐ Le rang de A est 5.
- ■ 0 est une valeur propre et $\dim E_0 = 4$.
- ☐ 5 est une valeur propre et $\dim E_5 = 4$.
- ☐ A est inversible.

Question [AMALA-A-TD8] ♣ Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui ont le même polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}} = p_{\mathbf{B}}$.

- ☐ Si $\mathbf{A}$ est diagonalisable, alors $\mathbf{B}$ est diagonalisable.
- ■ Si $\mathbf{A}$ est trigonalisable, alors $\mathbf{B}$ est trigonalisable.
- ■ Si $\mathbf{A}$ est inversible, alors $\mathbf{B}$ est inversible.
- ☐ Le rang de $\mathbf{A}$ est égal au rang de $\mathbf{B}$.
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question [AMALA-A-TD9] ♣ Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que 2 et 3 sont des valeurs propres de $\mathbf{A}$ et que la multiplicité géométrique de 3 est 1.

- ■ On est sûr que $\mathbf{A}$ est trigonalisable.
- ■ Si 2 et 3 sont les seules valeurs propres, on est sûr que $\mathbf{A}$ est trigonalisable.
- ☐ Si 2 et 3 sont les seules valeurs propres, on est sûr que $\mathbf{A}$ est diagonalisable.
- ☐ Si 2 et 3 ne sont pas les seules valeurs propres, on est sûr que $\mathbf{A}$ est inversible.
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question [AMALA-A-TD11] ♣ Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $p_{\mathbf{A}}(x) = x^2$ où $p_{\mathbf{A}}$ désigne le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$. Soit m_A le polynôme minimal de $\mathbf{A}$.

- ☐ Si $m_{\mathbf{A}}(x) = x$, alors le rang de $\mathbf{A}$ est égale à 2.
- ☐ Si $m_{\mathbf{A}} = p_{\mathbf{A}}$, alors le rang de $\mathbf{A}$est égale à 2.
- ☐ Si $m_{\mathbf{A}}(x) = x$, alors le rang de $\mathbf{A}$ est égale à 1.
- ■ Si $m_{\mathbf{A}} = p_{\mathbf{A}}$, alors le rang de $\mathbf{A}$ est égale à 1.
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question [AMALA-A-inverse1] Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geq 2$, vérifiant

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_n)(\mathbf{A} - 3\mathbf{1}_n) = \mathbf{0}.$$

- ☐ La matrice $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable.
- ■ La matrice $\mathbf{A}$ est inversible et son inverse est $\mathbf{A}^{-1} = \frac{-1}{6}(\mathbf{A} - 5\mathbf{1}_n)$.
- ☐ La matrice $\mathbf{A}$ est inversible et son inverse est $\mathbf{A}^{-1} = \frac{-1}{5}(\mathbf{A} - 6\mathbf{1}_n)$.
- ☐ La matrice $\mathbf{A}$ n'est pas inversible

Catalogue

Question [`AMALA-A-inverse2`] Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geq 2$, vérifiant

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{1}_n)(\mathbf{A} - 5\mathbf{1}_n) = \mathbf{0}.$$

- [ ] La matrice $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable.
- [x] La matrice $\mathbf{A}$ est inversible et son inverse est $\mathbf{A}^{-1} = \frac{-1}{20}(\mathbf{A} - 9\mathbf{1}_n)$.
- [ ] La matrice $\mathbf{A}$ est inversible et son inverse est $\mathbf{A}^{-1} = \frac{-1}{9}(\mathbf{A} - 20\mathbf{1}_n)$.
- [ ] La matrice $\mathbf{A}$ n'est pas inversible

Question [`AMALA-A-inverse3`] Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geq 2$, vérifiant

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{1}_n)(\mathbf{A} - 5\mathbf{1}_n) = \mathbf{0}.$$

- [ ] La matrice $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable.
- [x] La matrice $\mathbf{A}$ est inversible et son inverse est $\mathbf{A}^{-1} = \frac{-1}{15}(\mathbf{A} - 8\mathbf{1}_n)$.
- [ ] La matrice $\mathbf{A}$ est inversible et son inverse est $\mathbf{A}^{-1} = \frac{-1}{8}(\mathbf{A} - 15\mathbf{1}_n)$.
- [ ] La matrice $\mathbf{A}$ n'est pas inversible
