Catalogue

Veillez à bien noircir les cases.

Codez votre numéro d'étudiant ci-contre $\longrightarrow$
et écrivez votre nom et prénom ci-dessous :

Nom et prénom :
....

Attention à ne pas vous tromper, toute erreur invalide la copie !

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

AMALA – CC 3 – 10 avril 2019

Règlement – L'épreuve dure 45 minutes. Les calculatrices sont interdites et les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Il n'est admis de consulter aucun document. Une question marquée d'un ♣ peut admettre une ou plusieurs bonnes réponses.

Question [`Exercices-AMALA-Bezout-1`] Soit $A(x-1)^2 + B(x-4) = 1$ une identité de Bézout entre $(x-1)^2$ et $(x-4)$. Alors,

☐ $A = \dfrac{1}{9}$ et $B = \dfrac{x+2}{9}$.

☐ $A = \dfrac{x+2}{9}$ et $B = \dfrac{1}{9}$.

■ $A = \dfrac{1}{9}$ et $B = -\dfrac{x+2}{9}$.

☐ $A = -\dfrac{1}{9}$ et $B = \dfrac{x+2}{9}$.

Question [`Exercices-AMALA-Bezout-2`] Soit $A(x+2)^2 + B(x-3) = 1$ une identité Bézout entre $(x+2)^2$ et $(x-3)$. Alors,

☐ $A = \dfrac{1}{25}$ et $B = \dfrac{x+7}{25}$.

■ $A = \dfrac{1}{25}$ et $B = -\dfrac{x+7}{25}$.

☐ $A = \dfrac{x+7}{25}$ et $B = \dfrac{1}{25}$.

☐ $A = \dfrac{1}{25}$ et $B = \dfrac{x-7}{25}$.

Question [`Exercices-AMALA-Bezout-3`] Soit $\dfrac{x^2+1}{x^3+x^2-2x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x+2}$. Alors,

☐ $A = \dfrac{1}{2}$ et $B = \dfrac{2}{3}$ et $C = \dfrac{5}{6}$.

■ $A = -\dfrac{1}{2}$ et $B = \dfrac{2}{3}$ et $C = \dfrac{5}{6}$.

☐ $A = \dfrac{1}{2}$ et $B = \dfrac{2}{3}$ et $C = -\dfrac{5}{6}$.

☐ $A = \dfrac{1}{2}$ et $B = -\dfrac{2}{3}$ et $C = \dfrac{5}{6}$.

CATALOGUE

Question [`Exercices-AMALA-Bezout-4`] Soit $\dfrac{x+1}{x^3+4x^2+x-6} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{x+3}$. Alors,

- [ ] $A = \dfrac{1}{6}$ et $B = -\dfrac{1}{3}$ et $C = \dfrac{1}{2}$.
- [x] $A = \dfrac{1}{6}$ et $B = \dfrac{1}{3}$ et $C = -\dfrac{1}{2}$.
- [ ] $A = -\dfrac{1}{6}$ et $B = -\dfrac{1}{3}$ et $C = -\dfrac{1}{2}$.
- [ ] $A = \dfrac{1}{6}$ et $B = -\dfrac{1}{3}$ et $C = -\dfrac{1}{2}$.

Question [`AMALA-A-Fibonacci-11`] On considère le problème de Fibonacci : « *Un homme possède un couple de lapins dans un lieu clos et souhaite savoir combien il aura de couples au bout d'un an si par nature chaque couple de lapins donne naissance à partir de deux mois de vie à un nouveau couple de lapins tous les mois* ». En notant x_k le nombre de couples de lapins le k-ième mois, le nombre de couples de lapins satisfait la relation de récurrence suivante :

- [x] $x_{k+1} = x_k + x_{k-1}$.
- [ ] $x_{k+1} = x_k + 2x_{k-1}$.
- [ ] $x_{k+1} = 2x_k + x_{k-1}$.
- [ ] $x_{k+1} = 2x_k + 2x_{k-1}$.

Question [`AMALA-A-Ker-1`] Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

- [ ] Le rang de $\mathbf{A} - \mathbf{1}_3$ est 1 et $\mathrm{Ker}(A - \mathbf{1}_3) \subsetneq \mathrm{Ker}(A - \mathbf{1}_3)^2$.
- [ ] Le rang de $\mathbf{A} - \mathbf{1}_3$ est 2 et $\mathrm{Ker}(A - \mathbf{1}_3) \subsetneq \mathrm{Ker}(A - \mathbf{1}_3)^2$.
- [x] Le rang de $\mathbf{A} - \mathbf{1}_3$ est 1 et $\mathrm{Ker}(A - 4\mathbf{1}_3) \oplus \mathrm{Ker}(A - \mathbf{1}_3) = \mathbb{R}^3$
- [ ] Le rang de $\mathbf{A} - \mathbf{1}_3$ est 2 et $\mathrm{Ker}(A - 4\mathbf{1}_3) \oplus \mathrm{Ker}(A - \mathbf{1}_3)^2 = \mathbb{R}^3$

Question [`AMALA-A-Ker-2`] Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

- [ ] $\mathrm{Ker}(A - 3\mathbf{1}_3) \oplus \mathrm{Ker}(A - 2\mathbf{1}_3) = \mathbb{R}^3$.
- [x] $\mathrm{Ker}(A - 3\mathbf{1}_3)^2 \oplus \mathrm{Ker}(A - 2\mathbf{1}_3) = \mathbb{R}^3$
- [ ] $\mathrm{Ker}(A - 3\mathbf{1}_3) \oplus \mathrm{Ker}(A - 2\mathbf{1}_3)^2 = \mathbb{R}^3$
- [ ] La matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable.

Question [`AMALA-A-Ker-3`] Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est $(x-1)(x-2)^2$.

- [ ] $\mathrm{Ker}(A - \mathbf{1}_4) \oplus \mathrm{Ker}(A - 2\mathbf{1}_4) = \mathbb{R}^4$.
- [x] $\mathrm{Ker}(A - \mathbf{1}_4) \oplus \mathrm{Ker}(A - 2\mathbf{1}_4)^2 = \mathbb{R}^4$.
- [ ] $\mathrm{Ker}(A - \mathbf{1}_4)^2 \oplus \mathrm{Ker}(A - 2\mathbf{1}_4) = \mathbb{R}^4$.
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question [`AMALA-A-Ker-4`] Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est $x(x+1)(x+2)^2$.

- [ ] $\mathrm{Ker}(A + 2\mathbf{1}_4)^2 \subsetneq \mathrm{Ker}(A + 2\mathbf{1}_4)^3$.
- [ ] $\mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A + \mathbf{1}_4) = \mathbb{R}^4$.
- [ ] $\mathrm{Ker}(A + 2\mathbf{1}_4)$ peut être $\{0\}$.
- [x] $\mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A + \mathbf{1}_4) \oplus \mathrm{Ker}(A + 2\mathbf{1}_4)^2 = \mathbb{R}^4$.

Question [`AMALA-A-Fibonacci-21`] Soit $\mathbf{C}$ la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Les valeurs propres de la matrice $\mathbf{C}$ sont

- [x] $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- [ ] $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
- [ ] $\lambda_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- [ ] $\lambda_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Question [`AMALA-A-projecteurs-1`] ♣ Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ définie par $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

- [x] La matrice $\mathbf{A}$ admet deux projecteurs spectraux.
- [ ] La dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 1 est 2.
- [x] Le rang du projecteur spectral associé à la valeur propre 1 est 2.
- [ ] Le rang du projecteur spectral associé à la valeur propre 1 est 1.

Question [`AMALA-A-projecteurs-2`] ♣ Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ qui est semblable à la matrice $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- [ ] La matrice $\mathbf{A}$ est inversible.
- [ ] Les projecteurs spectraux de $\mathbf{A}$ sont $\mathbf{B}$ et $\mathbf{1}_3 - \mathbf{B}$.
- [x] Les projecteurs spectraux de $\mathbf{A}$ sont $\mathbf{A}$ et $\mathbf{1}_3 - \mathbf{A}$.
- [x] La matrice $\mathbf{A}$ annule le polynôme $f(x) = x^2 - x$.

Question [`AMALA-A-projecteurs-4`] ♣ Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- [x] Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $p_{\mathbf{A}}(x) = x(x-2)$.
- [x] Les projecteurs spectraux de $\mathbf{A}$ sont $\Pi_0 = -\frac{1}{2}\mathbf{A} + 1_2$ et $\Pi_2 = \frac{1}{2}\mathbf{A}$.
- [ ] Les projecteurs spectraux de $\mathbf{A}$ sont $\Pi_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ et $\Pi_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.
- [ ] On a : $\mathbf{A} = 2\Pi_2$ et $\mathbf{1}_2 = \Pi_0 + \Pi_2$ où $\Pi_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ et $\Pi_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Question [`AMALA-A-Fibonacci-31`] Soit $\mathbf{C}$ la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ admettant deux valeurs propres distinctes α et β. Les projecteurs spectraux de $\mathbf{C}$ sont

- [x] $\Pi_\alpha = \frac{1}{\alpha-\beta}(\mathbf{C}-\beta\mathbf{1}_2)$ et $\Pi_\beta = \frac{1}{\beta-\alpha}(\mathbf{C}-\alpha\mathbf{1}_2)$.
- [ ] $\Pi_\alpha = \frac{1}{\alpha+\beta}(\mathbf{C}+\beta\mathbf{1}_2)$ et $\Pi_\beta = \frac{1}{\beta+\alpha}(\mathbf{C}+\alpha\mathbf{1}_2)$.
- [ ] $\Pi_\alpha = \frac{1}{\alpha+\beta}(\mathbf{C}-\beta\mathbf{1}_2)$ et $\Pi_\beta = \frac{1}{\beta+\alpha}(\mathbf{C}-\alpha\mathbf{1}_2)$.
- [ ] $\Pi_\alpha = \frac{1}{\alpha}(\mathbf{C}-\beta\mathbf{1}_2)$ et $\Pi_\beta = \frac{1}{\beta}(\mathbf{C}-\alpha\mathbf{1}_2)$.
