Université Claude Bernard Lyon 1

Licence "Mathématiques et informatique"

Première année

UE Math I-ALGEBRE

Année 2009-2010

CHAPITRE 2

(Première partie)

1 Réunion, intersection, différence, produit cartésien d'ensembles

Exercice 1 Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$.

Exercice 2 Soient $A = [1, 3]$ et $B =]2, 4]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.

Exercice 3
1. Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties suivantes : $A_1 =]-\infty, 0]$, $A_2 =]-\infty, 0[$, $A_3 =]0, +\infty[$, $A_4 = [0, +\infty[$, $A_5 =]1, 2[$ et $A_6 = [1, 2[$.
2. Soient $A =]-\infty, 1[\cup[2, +\infty[$, $B =]-\infty, 1[$ et $C = [2, +\infty[$. Comparer les ensembles suivants : $C_{\mathbb{R}}A$ et $C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C$.

Exercice 4 Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Montrer que :

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Exercice 5 Soient E un emsemble et A et B deux parties de E. On suppose que

$$A \cap B \neq \emptyset,\ A \cup B \neq E,\ A \not\subseteq B \text{ et } B \not\subseteq A.$$

On pose

$$A_1 = A \cap B,\ A_2 = A \cap C_E B,\ A_3 = B \cap C_E A \text{ et } A_4 = C_E(A \cup B).$$

1. Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont non vides.

2. Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont deux à deux disjoints.

3. Montrer que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = E$.

Exercice 6 Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E.

1. Que pensez-vous de l'implication
$$((A \cup B) \not\subset C) \Longrightarrow (A \not\subset C \text{ ou } B \not\subset C)\,?$$
Justifiez (on pourra utiliser la contraposée).

2. On suppose que l'on a les deux inclusions suivantes : $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer l'inclusion $B \subset C$.

Exercice 7 Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Démontrer les égalités suivantes :

1. $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$.

2. $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$.

Si $A \subset B$, montrer que $C_E B \subset C_E A$.

Exercice 8 Soit E un ensemble et F et G deux parties de E. Démontrer que :

1. $F \subset G \Longleftrightarrow F \cup G = G$.

2. $F \subset G \Longleftrightarrow F \cap C_E G = \emptyset$.

2 Applications injectives, surjectives, bijectives

Exercice 9 Dire (en justifiant) pour chacune des applications suivantes si elles sont injectives, surjectives, bijectives :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2, \quad f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2, \quad f : [0,1] \to [0,2] : x \mapsto x^2$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + x^3, \quad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + x^3, \quad k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + x^4$$

Exercice 10 Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array}$$

et soit

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & E\left(\frac{n}{2}\right) \end{array}$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Les fonctions f et g sont-elles injectives, surjectives ? Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 11 Pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on désigne par I_n l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

1. On suppose $n \geq 2$. Combien y-a-t-il d'applications injectives $f : I_2 \to I_n$?
2. A quelle condition portant sur les entiers m et n peut-on définir une application $f : I_m \to I_n$ qui soit injective, surjective, bijective?

Exercice 12 Soient E, F, G trois ensembles et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
3. Que peut-on conclure sur $g \circ f$ si f et g sont bijectives?
4. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
5. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
6. Si à présent $f : E \to F$ et $g : F \to E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :
   (a) $g \circ f = Id_E$.
   (b) $f \circ g = Id_F$.
   (c) $f \circ f = Id_E$.

Exercice 13 Soit f une application de E vers F avec $\text{Card}(E) = \text{Card}(F) = n$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. f est surjective.
3. f est bijective.

Exercice 14 Soient X et Y deux ensembles non vides et f une application de X dans Y. Une application s, de Y dans X, telle que $f \circ s = Id_Y$ s'appelle une **section** de f.

1. Montrer que si f possède une section alors f est surjective.
2. Montrer que toute section de f est injective.

Une application r, de Y dans X, telle que $r \circ f = Id_X$ s'appelle une **rétraction** de f.

3. Montrer que si f possède une rétraction alors f est injective.
4. Montrer que si f est injective alors f possède une rétraction.
5. Montrer que toute rétraction de f est surjective.
6. En déduire que si f possède à la fois une section s et une rétraction r, alors f est bijective et on a $r = s(= f^{-1}$ par conséquent).

Exercice 15 Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de l'ensemble E. Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective $f : E \to P(E)$. *(Considérer la partie $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$.)*

3 Image d'une application et image réciproque

Exercice 16 Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Soient A et B deux parties de E. Montrer que

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Donner un exemple où cette dernière inclusion est stricte. Montrer alors que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E et pour toute partie B de E, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 17

1. Soit f l'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui même définie par
$$f(1) = 4\,,\ f(2) = 1\,,\ f(3) = 2\,,\ f(4) = 2\,.$$
Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{2\}$; $A = \{1, 2\}$; $A = \{3\}$
2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{1\}$; $A = [-1, 2]$.

Exercice 18

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$. Déterminer $f([0, 1] \times [0, 1])$, $f^{-1}([-1, 1])$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \mapsto cos(\pi x)$ Déterminer $f(\mathbb{N}), f(2\mathbb{N})$, $f^{-1}(\{\pm 1\})$.

Exercice 19 Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Soient A' et B' deux parties quelconques de F, non vides. Montrer que

1. $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$.
2. $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.

Exercice 20 Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F.

1. Montrer, que pour toute partie A de E, on a $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer, que pour toute partie B de F, on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E on a $A = f^{-1}(f(A))$.
4. Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F on a $f(f^{-1}(B)) = B$.