

CHAPITRE 3

1 Nombres complexes

Exercice 1 1. Calculer les racines carrées des nombres complexes

$$a) z_1 = 7 + 24i, \quad b) z_2 = 9 + 40i, \quad c) z_3 = 1 + i.$$

2. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes:

$$a) z^2 = -2\sqrt{3} + 2i, \quad b) z^2 = 3 - 4i$$

Exercice 2 Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes

1. $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0,$

2. $2z^2 + (5 + i)z + 2 + 2i = 0,$

3. $z^2 - (3 + 4i)z + 7i - 1 = 0.$

Exercice 3 Montrer que tout nombre complexe $z \neq 1$ de module 1 s'écrit sous la forme $\frac{x+i}{x-i}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 Calculer le module et un argument de $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.

Exercice 5 Résoudre de deux façons différentes l'équation

$$z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$$

En déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{8}$ et de $\sin \frac{\pi}{8}$.

Exercice 6 1. Déterminer la forme trigonométrique de $(1 + i)^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
(Utiliser la formule de Moivre.)

2. En déduire une expression simple de $(1 + i)^n + (1 - i)^n$.

Exercice 7 1. Calculer $\cos 3\theta$ (resp. $\sin 3\theta$) en fonction de $\cos \theta$ (resp. de $\sin \theta$.)

2. En utilisant la formule du binôme de Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad a, b \in \mathbb{C},$$

exprimer $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

[$\cos n\theta$ s'exprime suivant un polynôme en $\cos \theta$ tandis que $\sin n\theta$ est le produit de $\sin \theta$ par un polynôme en $\cos \theta$.]

Exercice 8 Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $\theta \in \mathbf{R}$. Calculer

$$U_n = \sum_{k=0}^{k=n} \cos(k\theta), \quad V_n = \sum_{k=0}^{k=n} \sin(k\theta).$$

Exercice 9 Pour rappel: - Soient $z \in \mathbf{C}^*$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Il existe exactement n nombres complexes w vérifiant $w^n = z$.

Ces nombres sont appelés les n racines n -ième de z .

1. Représenter dans le plan complexe \mathbf{C} les 6 racines 6-ième de 1 et les 4 racines 4-ième de -1 .

2. Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer les $n - 1$ racines du polynôme complexe $1 + z + \dots + z^{n-1}$.

Exercice 10 Soit $s = \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5}$ et $p = \cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5}$.

Montrer que $s = -\frac{1}{2}$, $p = -\frac{1}{4}$ et dès lors que s et p sont racines de $x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = 0$

Exercice 11 Résoudre dans \mathbf{C} les équations suivantes:

1. $z^5 - z = 0$,

2. $27(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0$,

3. $\bar{z}^7 = \frac{1}{z^2}$,

4. $z^6 - (3 + 2i)z^3 + 2 + 2i = 0$.

Exercice 12 Sachant qu'elle admet une racine réelle, résoudre dans \mathbf{C} l'équation suivante:

$$x^3 + (1 - 3i)x^2 - (6 - i)x + 10i = 0.$$

Exercice 13 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que

1. $|1 - z| \leq \frac{1}{2}$,

2. $\operatorname{Re}(1 - z) \leq \frac{1}{2}$,

3. $\operatorname{Re}(iz) \leq \frac{1}{2}$,

4. $|1 - \frac{1}{z}|^2 = 2$,

5. $|\frac{z-3}{z+3}| = 2$, $f) \quad |\frac{z-3}{z+3}| < 2$.

Exercice 14 Montrer que

$$\forall z, w \in \mathbf{C}, |z + w| \leq |z| + |w|.$$

- En déduire que

$$\forall z, w \in \mathbf{C}, ||z| - |w|| \leq |z + w|.$$

Exercice 15 Soient $z, w \in \mathbf{C}$. Etablir la relation

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

et donner une interprétation géométrique de cette égalité.

Exercice 16 Soit $c \in \mathbf{C}$ avec $|c| < 1$.

1. Montrer que $|z + c| \leq |1 + \bar{c}z|$ si et seulement si $|z| \leq 1$.

Soient $D = \{z \in \mathbf{C}, |z| \leq 1\}$ le disque unité et $C = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$ le cercle unité.

2. Montrer que l'application

$$f : D \longrightarrow D : z \mapsto \frac{z + c}{1 + \bar{c}z},$$

est une bijection pour laquelle $f(C) = C$.