Université Claude Bernard Lyon 1

Licence “Mathématiques et informatique”

Première année

UE Math I-ALGEBRE

Année 2009-2010

CHAPITRE 4

1 Exemples de groupes, sous-groupes, et morphismes

Exercice 1 1. Montrer que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe.

2. Montrer que $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.
3. $(\{2k, k \in \mathbb{Z}\}, +)$ et $(\{2k+1, k \in \mathbb{Z}\}, +)$ sont-ils des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$?

Exercice 2 Soit $\star$ la loi de composition définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \star y = x + y - xy$$

1. $\mathbb{R}$, muni de cette loi est-il un groupe commutatif ? (Montrer que $a = 1$ n'est pas un élément régulier de $(\mathbb{R}, \star)$)
2. Calculer $\underbrace{x \star x \star \ldots \star x}_{n}$ pour $n \geq 1$
3. $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \star)$ est-il un groupe commutatif?

Exercice 3 Soit $E =]-1, +1[$ et la loi de composition $\star$ définie sur E par :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ x \star y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

1. Montrer que $(E, \star)$ est un groupe commutatif.
2. Montrer que $f : (\mathbb{R}, +) \to (E, \star)$ définie par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 4 Soit E un ensemble fini à n éléments et soit $S(E) = S_n$ l'ensemble des bijections de E dans E.

1. Si on note $\circ$ l'opération de composition, vérifier que $(S(E), \circ)$ est un groupe. Quel est le cardinal de S_n?

2. Les éléments de S_n sont appelés des permutations. On note

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

la permutation de S_3 qui envoie 1 sur 2, 2 sur 1, et 3 sur 3, et de façon générale

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n$$

Soient p_1 et p_2 deux permutations de S_5 définies par :

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \; p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer $p_1 \circ p_2$, $p_2 \circ p_1$, et l'inverse de p_1.

Exercice 5 Soit ε l'application de S_n dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

1. Dire pourquoi ε est bien définie et déterminer son image (on pourra montrer que $(\varepsilon(\sigma))^2 = 1$).

2. Montrer que ε est un morphisme de S_n vers un groupe que l'on précisera.

Exercice 6 1. Déterminer par leur table tous les groupes à 2, à 3 et à 4 éléments.

2. Ecrire la table d'addition des groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n = 2, 3, 4$ et la table d'addition du groupe produit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Que peut-on en conclure?

3. Ecrire la table de la loi $\circ$ des isométries d'un triangle équilateral ABC.

4. Ecrire la table de la loi $\circ$ des permutations d'un ensemble à 3 éléments.

2 Propriétés des groupes, sous-groupes, et morphismes

Exercice 7 Si H_1 et H_2 sont deux sous-groupes d'un même groupe G, montrer que $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe de G.

Exercice 8 Soient $(G, \star)$ et $(G', \star')$ deux groupes et soit f un morphisme de groupes de $(G, \star)$ dans $(G', \star')$.

1. Si e est l'élément neutre de G et e' est l'élément neutre de G', montrer que $f(e) = e'$.

2. Montrer que pour tout x de G, $f(x)^{-1} = f\left(x^{-1}\right)$.

3. Montrer que l'image $f(K)$ de tout sous-groupe $K < G$ est un sous-groupe de G'. Que peut-on dire de l'image réciproque $f^{-1}(K') \subset G$ d'un sous-groupe $K' < G'$?

4. On appelle noyau de f et on note $\ker(f)$ l'ensemble $\{g \in G,\ f(g) = e'\}$. Montrer que $(\ker(f), \star)$ est un sous- groupe distingué de G.

5. Montrer que f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{e\}$.

Exercice 9 Montrer que si G est un groupe, la partie

$$Z_G := \{g \in G,\ gh = hg\ \forall h \in G\}$$

est un sous-groupe de G. Est-il distingué? Ce sous-groupe est appelé le *centre* du groupe G.

Exercice 10 Soit G un groupe tel que $\forall g \in G,\ g^2 = e$ où e est le neutre de G. Montrer que G est commutatif.

Rappel 1 Si G est un groupe fini et H est un sous-groupe de G, alors le cardinal de H divise celui de G. En particulier, l'ordre d'un élément de G divise le cardinal de G.

Exercice 11 En reprenant la table de composition du groupe de permutations S_3, déterminer tous ses sous-groupes. Montrer qu'ils sont tous cycliques (i.e. engendrés par un seul élément).

Exercice 12 On note C_n le sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dont les éléments sont les racines $n-$ièmes de l'unité

$$\left\{\exp\left(\frac{2\pi ik}{n}\right),\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\right\}$$

1. Montrer que tous les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$, sont de la forme précédente (On pourra montrer qu'un sous-groupe de cardinal n est contenu dans C_n, puis conclure par cardinalité).

2. Montrer que $C_d \subseteq C_n$ si et seulement si d divise n.

3. Déduire des deux questions précédentes que le sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ engendré par $\exp\left(\frac{2\Pi i}{n}\right)$ et $\exp\left(\frac{2\Pi i}{m}\right)$ est C_d, où d est le ppcm de m et de n.

Exercice 13 Soit G un groupe dont le cardinal p est un nombre premier.

1. Montrer que G est cyclique donc commutatif.

2. Montrer qu'il existe un isomorphisme de G dans C_p, où C_p est défini comme dans l'exercice qui précède.

3 Anneaux, corps

Exercice 14
1. Vérifier que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif unitaire mais que ce n'est pas un corps.
2. Vérifier que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ est un corps.

Exercice 15
1. Faire la liste des éléments inversibles (pour $\times$) de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ lorsque $n = 5$ et $n = 6$.
2. Trouver l'inverse multiplicatif de 6 dans l'anneau $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$.

Exercice 16 Soit X un ensemble. Montrer que $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ est un anneau.

Exercice 17
1. Montrer que $\mathcal{A} = \left(\left\{a + ib\sqrt{5},\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\}, +, \cdot\right)$ est un anneau commutatif unitaire.
2. Quels sont les éléments inversibles de $\mathcal{A}$ pour l'opération $\cdot$?
3. L'anneau $\mathcal{A}$ est-il un corps?

Exercice 18
1. Montrer que $\mathcal{B} = (\mathbb{C}^2, +, \star)$ est un anneau, où $(a, b) \star (a', b') = (aa' - \overline{b}b', ba' + \overline{a}b')$.
2. Montrer que tout élément non nul de $\mathcal{B}$ est inversible (pour $\star$).
3. $\mathcal{B}$ est-il un corps?