Université Claude Bernard Lyon 1 - automne 2009

Licence Sciences, Technologies, Santé - mention mathématiques

UE Math III Algèbre - MAT2002L

Planche d'exercices VI

- Structure des endomorphismes nilpotents - Réduite de Jordan -

Exercice 1.* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et soit u un endomorphisme non nul de E tel que $u^2 = 0$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$.
2. Construire une base B de E dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sont les matrices

$$\begin{pmatrix} -a & b \\ c & a \end{pmatrix},$$

de determinant nul.

Exercice 2.* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'un endomorphisme u non nul de rang r tel que $u^2 = 0$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} u$ est un sous-espace de $\operatorname{Ker} u$. En déduire qu'il existe une base

$$(u(e_1), \dots, u(e_r), v_{r+1}, \dots v_{n-r})$$

de $\operatorname{Ker} u$ où $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\operatorname{Im} u$.

2. Montrer que la famille

$$B = (u(e_1), e_1, u(e_2), e_2, \dots, u(e_r), e_r, v_{r+1}, \dots, v_{n-r})$$

forme une base de E.

3. Écrire la matrice de u dans la base B.

Exercice 3.*

1. Déterminer toutes les réduites de Jordan possibles pour un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^4$.
2. Construire deux matrices non semblables de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ nilpotentes, ayant le même polynôme minimal.

Exercice 4.* Montrer qu'une matrice sous la forme de Jordan est diagonalisable si et seulement si elle est sous forme diagonale.

Exercice 5.*

1. Montrer que deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont semblables si et seulement si elles ont le même polynôme minimal.
2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui possèdent le même polynôme caractéristique

$$P = (X - \lambda_1)^{h_1} \dots (X - \lambda_p)^{h_p}$$

et le même polynôme minimal. Montrer que si, pour tout i, $h_i \leqslant 3$, alors les matrices A et B sont semblables.

Exercice 6.★ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé.

1. Montrer que si u n'est pas diagonalisable alors sa réduite de Jordan est formée d'un seul bloc

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

2. On suppose que u n'est pas diagonalisable. Montrer que tout couple de vecteurs (e_1, e_2) tel que $e_1 = (u - \lambda \mathrm{id}_E)(e_2)$ est non nul forme une base de Jordan de u.

3. Déterminer une réduite de Jordan ainsi qu'une matrice de passage pour les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7.★ Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n dont la réduite de Jordan est formée d'un seul bloc

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Soit $v = u - \lambda \mathrm{id}_E$.

Montrer que si $B = (e_1, \ldots, e_n)$ est une famille de vecteurs de E tels que

$$e_n \in E \backslash \mathrm{Ker}\, v^{n-1},\ e_{n-1} = v(e_n),\ \ldots, e_2 = v(e_3), e_1 = v(e_2),$$

alors B est une base de E dans laquelle la matrice de u est $J(\lambda)$.

Exercice 8.★ Déterminer une réduite de Jordan ainsi qu'une matrice de passage pour les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Déterminer une réduite de Jordan ainsi qu'une matrice de passage pour les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 6 & 6 & 2 & 6 \\ -7 & -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Soit

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

un bloc de Jordan de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ d'ordre $k \geqslant 1$.

1. Montrer que $J_k(\lambda)$ est semblable à sa transposée.

2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En considérant la réduite de Jordan de A, montrer que A est semblable à sa transposée.

Exercice 11. (Session 2, juin 2007).

1. Déterminer la réduite de Jordan dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ de la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

où a est un réel non nul.

2. Dans cette partie, $A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ où a est un réel non nul.

2.1. Montrer que $A = B^3 + B^2 + B$, où $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2.2. Déterminer la réduite de Jordan de B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

2.3. En déduire la réduite de Jordan de A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

3. Déduire de ce qui précéde la réduite de Jordan dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ de la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & a & a \\ b & b & a \end{bmatrix},$$

où a et b sont des réels non nul distincts.

Exercice 12. (Session 2, janvier 2007)

Dans cet exercice, E désigne un espace vectoriel réel de dimension 3.

1. Soit u un endomorphisme nilpotent de E, i.e., il existe un entier p tel que $u^p = 0$.

1.1. Montrer que le polynôme caractéristique de u est $P_u(X) = -X^3$.

1.2 Donner toutes les réduites de Jordan possibles pour u, à l'ordre des blocs près.

1.3 On suppose que le polynôme minimal de u est $m_u(X) = X^3$. Montrer qu'il existe un vecteur non nul x de E tel que $B = (x, u(x), u^2(x))$ est une base de E.

1.4 Écrire la matrice de u dans la base B.

2. Soit u un endomorphisme de E dont la réduite de Jordan est formée d'un seul bloc

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

2.1 Montrer que l'endomorphisme $v = u - \lambda \mathrm{id}_E$ est nilpotent.

2.2 Construire une base de E dans laquelle la matrice de u est $J(\lambda)$.

3. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

3.1 Calculer le polynôme caractéristique de u. Montrer que le polynôme minimal de u est $m_u(X) = (X + 2)^3$.

3.2 Déterminer une réduite de Jordan de u.

3.3. Construire une base de Jordan de u.