- Devoir à rendre le 12 février 2008 -

Autour de Perron, Frobenius et Markov

Rappels et notations

On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ à m lignes et n colonnes. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Dans la suite, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On désigne par $\mathbf{A}_i^j$, le coefficient de la i-ième ligne et j-ième colonne d'une matrice $\mathbf{A}$. La matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée $\mathbf{1}_n$. On note $\mathbf{E}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux 1 et $\mathbf{e}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On note $\mathbf{A}^\top$ la matrice transposée de $\mathbf{A}$. Si $\mathbf{x}$ est un vecteur colonne, on notera $\mathbf{x}^\top$ le vecteur ligne correspondant.

Le module d'un vecteur $\mathbf{x} = (x_i)$ de $\mathbb{C}^n$ est le vecteur $|\mathbf{x}| = (|x_i|)$, dont les composantes sont les modules des composantes de $\mathbf{x}$. Le module d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ est la matrice $|\mathbf{A}| = (|\mathbf{A}_i^j|)$. L'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est muni de la norme $||\mathbf{x}||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. La norme associée sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est $||\mathbf{A}||_1 = \sup\limits_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{||\mathbf{A}\mathbf{x}||_1}{||\mathbf{x}||_1}$.

On note $\mathrm{Sp}(\mathbf{A})$ l'ensemble des valeurs propres complexes d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, appelé **spectre** de $\mathbf{A}$. Une valeur propre λ de $\mathbf{A}$ est dite **dominante** si, pour tout $\lambda' \in \mathrm{Sp}(\mathbf{A}) - \{\lambda\}$, on a $|\lambda| > [\lambda'|$. Elle est dite **simple** lorsqu'elle est racine simple du polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$. En particulier, si λ est une valeur propre simple, la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel Ker $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}_n)$ est 1. Le **rayon spectral** de $\mathbf{A}$, noté $\rho(\mathbf{A})$, est le plus grand des modules des valeurs propres de $\mathbf{A}$:

$$\rho(\mathbf{A}) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathbf{A})\}.$$

Une matrice $\mathbf{N}$ est dite **nilpotente**, s'il existe un entier r tel que $\mathbf{N}^r = 0$. Le plus petit entier r tel que $\mathbf{N}^r = 0$ et $\mathbf{N}^{r-1} \neq 0$ est l'**indice de nilpotence** de $\mathbf{N}$. Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les polynômes caractéristique et minimal dans $\mathbb{C}[X]$ sont respectivement

$$P_{\mathbf{A}} = (-1)^n (X-\lambda_1)^{h_1} \ldots (X-\lambda_p)^{h_p}, \qquad m_{\mathbf{A}} = (X-\lambda_1)^{k_1} \ldots (X-\lambda_p)^{k_p},$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$. On a $h_1 + \ldots + h_p = n$ et $1 \leqslant k_i \leqslant h_i$, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$. On note $\mathbf{\Pi}_i$, $i \in \{1, \ldots, p\}$, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la projection sur le sous-espace caractéristique $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{1}_n)^{h_i}$ parallèlement au sous-espace $\mathrm{Im}(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{1}_n)^{k_i}$. La matrice $\mathbf{\Pi}_i$ est appelée **projecteur spectral** associé à la valeur propre λ_i. Les projecteurs $\mathbf{\Pi}_i$ satisfont

$$\mathbf{1}_n = \mathbf{\Pi}_1 + \ldots + \mathbf{\Pi}_p, \qquad \mathbf{\Pi}_i^2 = \mathbf{\Pi}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{\Pi}_i\mathbf{\Pi}_j = \mathbf{0} \ \text{ si } i \neq j.$$

Pour tout i, la matrice $\mathbf{N}_i = (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)\mathbf{\Pi}_i$ est nilpotente d'indice de nilpotence k_i. La matrice $\mathbf{A}$ se décompose en $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N}$, avec

$$\mathbf{D} = \lambda_1 \mathbf{\Pi}_1 + \ldots + \lambda_p \mathbf{\Pi}_p, \quad \text{et} \quad \mathbf{N} = \mathbf{N}_1 \mathbf{\Pi}_1 + \ldots + \mathbf{N}_p \mathbf{\Pi}_p.$$

La matrice $\mathbf{D}$ est diagonalisable et la matrice $\mathbf{N}$ est nilpotente. De plus les matrices $\mathbf{D}$ et $\mathbf{N}$ commutent : $\mathbf{DN} = \mathbf{ND}$.

Une matrice $\mathbf{P}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **stochastique** si, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathbf{P}_i^j \geqslant 0$ et, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

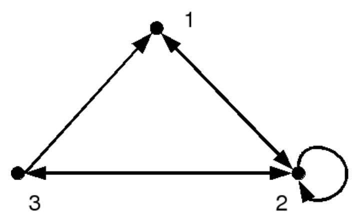
$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_i^j = 1.$$

En d'autres termes, $\mathbf{P}$ est stochastique si tous ses coefficients sont positifs et si $\mathbf{Pe} = \mathbf{e}$.

Un **graphe** (orienté fini) $\mathcal{G}$ est la donnée d'un ensemble fini S de **sommets**, d'un ensemble fini A d'*arêtes* et de deux applications $s, t : A \longrightarrow S$ qui à toute arête associe respectivement sa **source** et son **but**. Un chemin de longueur $k \geqslant 1$ du sommet s au sommet t est une suite $(e_1, \ldots, e_k)$ d'arêtes telles que $s(e_1) = s$, $t(e_i) = s(e_{i+1})$, pour tout $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ et $t(e_k) = t$. Un graphe est dit **fortement connexe** si pour tout couple de sommets (s, t), avec $s \neq t$, il existe un chemin de source s et but t.

A toute matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on associe son **graphe d'ajacence** qui est le graphe orienté $\mathcal{G}_{\mathbf{A}}$ à n sommets numérotés 1, 2 $\ldots, n$ ayant une arête de source i et but j si $\mathbf{A}_i^j \neq 0$.

A tout graphe $\mathcal{G}$ on peut associer une matrice stochastique $\mathbf{P}$ telle que $\mathbf{P}_i^j = \frac{n_{i,j}}{n_i}$ où $n_{i,j}$ est le nombre d'arêtes de source i et but j et n_i le nombre total d'arêtes de source i. La figure suivante représente un graphe et sa matrice stochastique associée :



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Partie I : puissances de matrices

Soit $\mathbf{P}$ la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix},$$

où a et b sont non nuls.

1. On suppose que $a + b \neq 0$.

a) Déterminer les valeurs propres de la matrice $\mathbf{P}$.

b) La matrice $\mathbf{P}$ est-elle diagonalisable ?

c) Montrer que

$$\mathbf{P} = \mathbf{\Pi}_1 + (1 - a - b)\mathbf{\Pi}_2,$$

où $\mathbf{\Pi}_1$ et $\mathbf{\Pi}_2$ sont des projecteurs spectraux de $\mathbf{P}$.

d) Calculer les matrices $\mathbf{\Pi}_1$ et $\mathbf{\Pi}_2$.

e) Calculer $\mathbf{P}^k$, pour tout entier $k \geqslant 1$. Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathbf{P}^k = \mathbf{\Pi}_1$.

2. On suppose que $a + b = 0$.

a) La matrice $\mathbf{P}$ est-elle diagonalisable ?

b) Calculer $\mathbf{P}^k$, pour tout entier $k \geqslant 1$. Que peut-on en conclure sur la limite de $\mathbf{P}^k$ lorsque k tend vers $+\infty$? [*On pourra considérer le polynôme minimal de* $\mathbf{P}$ *et procéder par récurrence*]

3. Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les polynômes caractéristique et minimal dans $\mathbb{C}[X]$ sont respectivement

$$P_{\mathbf{A}} = (-1)^n (X - \lambda_1)^{h_1} \dots (X - \lambda_p)^{h_p}, \qquad m_{\mathbf{A}} = (X - \lambda_1)^{k_1} \dots (X - \lambda_p)^{k_p}.$$

a) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\mathbf{A}^k = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{k_i - 1} \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^j \mathbf{\Pi}_i.$$

b) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifie $|\lambda| < 1$, alors pour tout entier j, on a $\lim\limits_{k \to +\infty} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} = 0$.

c) En déduire que si $\rho(\mathbf{A}) < 1$, alors $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathbf{A}^k = 0$.

d) Montrer que si $\rho(\mathbf{A}) = 1$ et que 1 est une seule valeur propre simple dominante de $\mathbf{A}$, alors $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{\Pi}_1$, où $\mathbf{\Pi}_1$ est le projecteur spectral associé à la valeur propre 1.

Partie II : matrices strictement positives

Dans cette partie, nous faisons l'analyse spectrale des matrices dont tous les coefficients sont strictements positifs.

Un vecteur $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$ est dit **positif** (resp. **strictement positif**) si toutes ses coordonnées sont positives (resp. strictement positives) ; on note $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ (resp. $\mathbf{x} > \mathbf{0}$). De la même façon, une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est dite **positive** (resp. **strictement positive**) si tous ses coefficients le sont ; on note $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{0}$ (resp. $\mathbf{A} > \mathbf{0}$). On a la relation d'ordre sur les vecteurs de $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{x}$ si $\mathbf{y} - \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$. De la même façon, on définit une relation d'ordre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{B}$ si $\mathbf{A} - \mathbf{B} \geqslant \mathbf{0}$.

1. Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\mathbf{A}$ est positive si et seulement si $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ implique $\mathbf{Ax} \geqslant \mathbf{0}$.

b) Montrer que $\mathbf{A}$ est strictement positive si et seulement si $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ et $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ implique $\mathbf{Ax} > \mathbf{0}$.

c) Montrer que, pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$, on a l'inégalité $|\mathbf{Ax}| \leqslant |\mathbf{A}|\,|\mathbf{x}|$.

d) Montrer qu'une matrice strictement positive ne peut être nilpotente.

e) Montrer que si $\mathbf{A} > 0$, alors $\rho(\mathbf{A}) > 0$. [*On pourra procéder par l'absurde en supposant que* 0 *est la seule valeur propre de* $\mathbf{A}$.]

f) Montrer que si $\mathbf{A} > 0$, alors $\rho(\frac{1}{\rho(\mathbf{A})}\mathbf{A}) = 1$.

Dans la suite de cette partie, quitte à la normaliser par $\rho(\mathbf{A})$, on pourra sans perte de généralité, supposer que $\mathbf{A}$ est une matrice strictement positive de rayon spectral $\rho(\mathbf{A}) = 1$.

2. Soit λ une valeur propre de $\mathbf{A}$ de module 1.

a) Montrer que si $\mathbf{x}$ est un vecteur propre associé à λ, alors $|\mathbf{x}| \leqslant \mathbf{A}|\mathbf{x}|$.

b) Montrer que si $\mathbf{A}|\mathbf{x}| \neq |\mathbf{x}|$, alors il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que

$$\mathbf{A}^2|\mathbf{x}| - \mathbf{A}|\mathbf{x}| > \epsilon\mathbf{A}|\mathbf{x}|.$$

On pose $\mathbf{B} = \frac{1}{1+\epsilon}\mathbf{A}$. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a $\mathbf{B}^k\mathbf{A}|\mathbf{x}| > \mathbf{A}|\mathbf{x}|$.

c) Calculer $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{B}^k$.

d) En déduire que 1 est valeur propre de $\mathbf{A}$.

e) Montrer qu'il existe un vecteur propre de $\mathbf{A}$ strictement positif associé à la valeur propre 1.

f) Montrer que la valeur propre 1 de $\mathbf{A}$ est dominante.

3.

a) Soit $\mathbf{C}$ une matrice strictement positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{C} \leqslant \mathbf{A}$. Montrer que $\rho(\mathbf{C}) \leqslant \rho(\mathbf{A})$. [*Montrer que la fonction f définie sur la partie $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ et $||\mathbf{x}||_1 = 1\}$ de $\mathbb{R}^n$ et à valeur dans $\mathbb{R}^+$ définie par $f(\mathbf{x}) = \max\{t \in \mathbb{R}^+ \mid t\mathbf{x} \leqslant \mathbf{A}\mathbf{x}\}$ est bornée.*]

b) Montrer que la valeur propre 1 de $\mathbf{A}$ est simple. [*On pourra considérer le polynôme dérivée $P'_{\mathbf{A}}(X)$ du polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ et montrer que $P'_{\mathbf{A}}(\rho(\mathbf{A}))$ est non nul.*]

c) En déduire qu'il existe un unique vecteur propre strictement positif $\mathbf{p}$ associé à la valeur propre 1 tel que $||\mathbf{p}||_1 = 1$.

d) Montrer que les seuls vecteurs propres positifs de $\mathbf{A}$ sont les multiples positifs du vecteur $\mathbf{p}$.

Dans cette partie, nous avons montré le **théorème de Perron** :

> *Soit $\mathbf{A} > 0$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\rho(\mathbf{A})$ est une valeur propre simple dominante de $\mathbf{A}$, associée à un vecteur propre strictement positif. De plus $\rho(\mathbf{A}) > 0$.*
>
> *L'unique vecteur propre strictement positif $\mathbf{p}$ associé à la valeur propre $\rho(\mathbf{A})$ tel que $||\mathbf{p}||_1 = 1$, est appelé le **vecteur de Perron** de $\mathbf{A}$.*

4. Déterminer le rayon spectral et le vecteur de Perron de la matrice réelle suivante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix},$$

où $0 < a < 1$, $0 < b < 1$.

Partie III : matrices positives

Dans cette partie, on montre que le théorème de Perron ne se généralise pas aux matrices positives. Malgrès cela, nous montrons que le rayon spectral reste valeur propre de ces matrices.

1. On cherche des matrices positives contre-exemples au théorème de Perron.

a) Construire une matrice positive non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de rayon spectral nul.

b) Construire une matrice positive de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont le rayon spectral est une valeur propre simple non dominante.

2. Soit $\mathbf{A}$ une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'objectif est de montrer que $\rho(\mathbf{A})$ est une valeur propre de $\mathbf{A}$. Pour tout entier $k \geqslant 1$, considérons la matrice strictement positive

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A} + \frac{1}{k}\mathbf{E}.$$

On note $\mathbf{p}_k$ le vecteur de Perron de $\mathbf{A}_k$.

a) Montrer que $(\rho(\mathbf{A}_k))_{k\geqslant 1}$ est une suite décroissante.

b) Montrer que la suite $(\rho(\mathbf{A}_k))_{k\geqslant 1}$ converge. Montrer que sa limite, notée ρ, vérifie $\rho \geqslant \rho(\mathbf{A})$.

c) Montrer que de la suite $(\mathbf{p}_k)_{k\geqslant 1}$ dans $\mathbb{R}^n$ admet une sous-suite convergente vers un vecteur positif $\tilde{\mathbf{p}}$ tel que

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{p}} = \rho\tilde{\mathbf{p}}.$$

d) En déduire que $\rho(\mathbf{A})$ est valeur propre de $\mathbf{A}$ et qu'il existe un vecteur propre positif associé.

Partie IV : matrices irréductibles

Nous avons vu que le rayon spectral d'une matrice positive n'est pas dominant en général. De plus, le rayon spectral d'une matrice positive peut ne pas être simple, comme l'illustre la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

L'objectif de cette partie est de comprendre sous quelle hypothèse, le théorème de Perron peut être généralisé aux matrices positives.

1. Une matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **réductible** s'il existe une partition de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ en deux sous-ensembles

$$I = \{i_1, \ldots, i_s\}, \quad J = \{j_1, \ldots, j_t\}, \quad s + t = n,\ s, t > 0,$$

tels que, pour tout $(i, j) \in I \times J$, $\mathbf{A}_i^j = 0$. Sinon elle est dite **irréductible**.

a) Montrer qu'une matrice $\mathbf{A}$ est réductible si et seulement s'il existe une matrice de permutation $\mathbf{P}$ telle que

$$\mathbf{P}^\top\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{B}$ et $\mathbf{D}$ sont deux matrices carrées.

b) Montrer que la matrice suivante est réductible :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Montrer que si $\mathbf{A}$ est une matrice positive irréductible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$(\mathbf{1}_n + \mathbf{A})^{n-1} > 0.$$

2. Soit $\mathbf{A}$ une matrice positive irréductibe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Soit $\mathbf{B} = (\mathbf{1}_n + \mathbf{A})^{n-1}$. Montrer que les valeurs propres de $\mathbf{B}$ sont toutes de la forme $(1 + \lambda)^{n-1}$, où λ est valeur propre de $\mathbf{A}$.

b) En déduire que $\rho(\mathbf{B}) = (1+\rho(\mathbf{A}))^{n-1}$.

c) En déduire que $\rho(\mathbf{A})$ est une valeur propre simple de $\mathbf{A}$.

d) Montrer que $\rho(\mathbf{A})$ possède un unique vecteur propre strictement positif $\mathbf{p}$ tel que $||\mathbf{p}||_1 = 1$.

e) Montrer que les seuls vecteurs propres positifs de $\mathbf{A}$ sont les multiples positifs du vecteur $\mathbf{p}$.

Dans cette partie, nous avons montré la première partie du **théorème de Perron-Frobenius** :

> *Soit* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice positive irréductible. Alors* $\rho(\mathbf{A})$ *est une valeur propre simple de* $\mathbf{A}$*, associée à un vecteur propre strictement positif. De plus,* $\rho(\mathbf{A}) > 0$*.*
>
> *L'unique vecteur propre strictement positif* $\mathbf{p}$ *associé à la valeur propre* $\rho(\mathbf{A})$ *tel que* $||\mathbf{p}||_1 = 1$*, est appelé le* ***vecteur de Perron*** *de* $\mathbf{A}$*.*

Partie V : matrices primitives

L'irréductibilité d'une matrice positive ne garantit pas que son rayon spectral soit une valeur propre dominante. L'objectif de cette partie est de comprendre sous quelle hypothèse le rayon spectral d'une matrice positive irréductible est une valeur propre dominante.

1. Une matrice positive $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **primitive** s'il existe existe un entier $m \geqslant 1$ tel que $\mathbf{A}^m$ est strictement positive.

a) Montrer qu'une matrice positive primitive est irréductible. [*On pourra procéder par l'absurde en supposant la réductibilité.*]

b) Montrer que les valeurs propres de $\mathbf{A}^m$ sont toutes de la forme λ^m, où λ est une valeur propre de $\mathbf{A}$.

c) Montrer la deuxième partie du **théorème de Perron-Frobenius** : [*Supposer que* $\mathbf{A}$ *possède plusieurs valeurs propre de module maximal et appliquer le théorème de Perron à la matrice* $\mathbf{A}^m$*.*]

> *Soit* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice positive primitive. Alors* $\rho(\mathbf{A})$ *est une valeur propre simple dominante de* $\mathbf{A}$*, associée à un vecteur propre strictement positif. De plus,* $\rho(\mathbf{A}) > 0$*.*

d) Montrer que si $\mathbf{A}$ est une matrice positive primitive, alors

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{\mathbf{A}}{\rho(\mathbf{A})}\right)^k = \mathbf{\Pi},$$

où $\mathbf{\Pi}$ est le projecteur spectral de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre $\rho(\mathbf{A})$.

2. On peut calculer le projecteur $\mathbf{\Pi}$ en terme de vecteurs de Perron.

a) Montrer que si $\mathbf{A}$ est positive irréductible, alors $\mathbf{A}^\top$ est positive et irréductible et que de plus, $\rho(\mathbf{A}^\top) = \rho(\mathbf{A})$ et $\rho(\mathbf{A}^\top)$ est une valeur propre simple de $\mathbf{A}^\top$.

b) Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{\mathbf{A}}{\rho(\mathbf{A})}\right)^k = \frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^\top}{\mathbf{q}^\top\mathbf{p}},$$

où $\mathbf{p}$ est le vecteur de Perron de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{q}$ est le vecteur de Perron de $\mathbf{A}^\top$.

3. Calculer $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{A}^k$, où $\mathbf{A}$ est la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix},$$

où $0 < a < 1$, $0 < b < 1$.

Partie VI : marche aléatoire sur un graphe

Cette partie présente une application du théorème de Perron-Frobenius à l'étude des chaînes de Markov. Une **chaîne de Markov** est un processus aléatoire «sans mémoire», dans lequel la prédiction du futur à partir du présent ne dépend pas du passé. Formellement, on peut définir une chaîne de Markov en temps discret comme une suite de variables aléatoires $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$ prenant leurs valeurs dans un même ensemble d'états et vérifiant, pour tout entier k,

$$P(X_{k+1} = e \mid X_0, X_1, \ldots, X_k) = P(X_{k+1} = e \mid X_k),$$

où e est un état quelconque du processus. Autrement dit, l'état de l'événement à l'instant $k+1$ dépend uniquement de l'état de l'événement à l'instant k et non pas des états aux instants précédents. Lorsque qu'il existe un nombre fini d'états, numérotés de 1 à n, on peut représenter la chaîne de Markov par une **matrice de transition** $\mathbf{P}(k)$, dont le coefficient $(\mathbf{P}(k))_i^j$ est défini par

$$\mathbf{P}_i^j(k) = P(X_{k+1} = j \mid X_k = i),$$

exprimant la probabilité que le processus se trouve dans l'état j à l'instant $k+1$, alors qu'il était dans l'état i à l'instant k. Dans la suite, on s'intéressera à des processus dont la matrice de transition est constante, i.e., indépendante du temps. La probabilité $\mathbf{P}_i^j$ de passer de l'état i à l'état j est indépendante du temps.

Une **distribution de probabilité** est un vecteur $\mathbf{x}$ positif de $\mathbb{R}^n$ tel que $||\mathbf{x}||_1 = 1$. La distribution de probabilité à la k-ième étape du processus de la chaîne de Markov est defini par

$$\mathbf{p}^\top(k) = [p_1(k) \ \ldots \ p_n(k)],$$

où $p_i(k) = P(X_k = i)$ est la probabilité d'être dans l'état i après la k-ième étape. La distribution de probabilité initiale est $\mathbf{p}^\top(0)$. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on a

$$\mathbf{p}^\top(k) = \mathbf{p}^\top(0)\mathbf{P}^k.$$

Le coefficient $(\mathbf{P}^k)_i^j$ représente ainsi la probabilité de passer de l'état i à l'état j en exactement k étapes. Une distribution de probabilité est dite **invariante** si $\mathbf{p} = \mathbf{p}\mathbf{P}$. Une distribution invariante représente l'état d'équilibre du système.

1. L'irréductibilité d'une matrice est liée à la connexité du graphe associé.

a) Représenter graphiquement le graphe adjacence des matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Montrer que si le graphe $\mathcal{G}_{\mathbf{A}}$ d'une matrice positive $\mathbf{A}$ est fortement connexe, alors $\mathbf{A}$ est irréductible.

c) Montrer qu'en général une matrice irréductible n'est pas primitive.

2. Soit $\mathbf{P}$ une matrice stochastique irréductible.

a) Montrer que $\rho(\mathbf{P}) = 1$.

b) Montrer que le vecteur de Perron de $\mathbf{P}$ est $\frac{1}{n}\mathbf{e}$.

c) Montrer que si $\mathbf{P}$ est primitive alors $\lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}^k$ existe et

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}^k = \mathbf{e}\mathbf{q}^\top,$$

où $\mathbf{q}$ est le vecteur de Perron de $\mathbf{P}^\top$.

d) Montrer que si $\mathbf{P}$ est primitive, il existe une unique distribution de probabilité invariante.

3. Montrer que les chaînes de Markov dont la matrice de transition est la matrices stochastiques associées aux graphes suivants possèdent une distribution de probabilité invariante que l'on calculera.