Préparation Capes - Algèbre et Géométrie

- Quelques révisions d'algèbre linéaire -

- Espaces et sous-espaces -

Exercice 1.

1. Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ suivants, lesquels forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

$$\{\mathbf{x} \mid x_i \geqslant 0\}, \quad \{\mathbf{x} \mid x_1 = 0\}, \quad \{\mathbf{x} \mid x_1 x_2 = 0\}, \quad \{\mathbf{x} \mid x_1 + \ldots + x_n = 0\},$$

$$\{\mathbf{x} \mid x_1 + \ldots + x_n = 1\}, \quad \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{A} \neq \mathbf{0},\ \mathbf{b} \neq \mathbf{0}\}.$$

2. Même question avec les sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivants

$$\{\text{matrices symétriques}\}, \quad \{\text{matrices inversibles}\}, \quad \{\text{matrices non inversibles}\},$$

$$\{\mathbf{A} \mid \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{B}\}, \quad \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\}, \quad \{\mathbf{A} \mid \mathrm{trace}(\mathbf{A}) = 0\}.$$

Exercice 2. Quels sous-ensembles suivants engendrent $\mathbb{R}^3$

$$\{(1,0,0),(0,1,0)\}, \quad \{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\},$$

$$\{(2,1,2),(2,3,5),(0,1,3)\}, \quad \{(2,1,2),(2,3,5),(0,2,3)\}.$$

Exercice 3. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que $F+G$ et $F \cap G$ sont des sous-espaces de E.
2. Montrer que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace en général. Montrer qu'il en est ainsi si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
3. Montrer que $\mathrm{Vect}(F \cup G) = F + G$.
4. On suppose que F et G sont de dimension finie. Montrer que $F+G$ et $F \cap G$ sont de dimension finie et établir la relation :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Exercice 4. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ une famille de fonctions de E. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$\mathbf{W}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}.$$

Montrer que s'il existe un réel x_0 tel que $\mathbf{W}(x_0)$ soit inversible, alors la famille $\mathcal{F}$ est libre.

2. Étudier l'indépendance linéaire des familles suivantes

$$\{t \mapsto t^n \mid n = 0, \ldots, k\}, \quad \{t \mapsto \sin t, t \mapsto \cos t, t \mapsto t \sin t\},$$

$$\{t \mapsto t^n e^t \mid n = 0, \ldots, k\}, \quad \{t \mapsto \sin(nt) \mid n \in \mathbb{N}^*\}, \quad \{t \mapsto |t-a| \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

- Le rang -

Exercice 5. Déterminer le rang des matrices suivantes

$$\begin{bmatrix} j & 1 & j^2 \\ 1 & j^2 & j \\ j^2 & j & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & t_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & t_{n-1} \\ t_1 & \ldots & t_{n-1} & t_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 1 & a \\ a & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 6.

1. Montrer que toute matrice de rang r de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est équivalente à la matrice $\begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
2. Montrer qu'une matrice et sa transposée ont le même rang.
3. Soient $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$, montrer que

$$\mathrm{rang}(\mathbf{AB}) \leqslant \inf(\mathrm{rang}(\mathbf{A}), \mathrm{rang}(\mathbf{B})).$$

4. Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, montrer que

$$\mathrm{rang}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leqslant \mathrm{rang}(\mathbf{A}) + \mathrm{rang}(\mathbf{B}).$$

5. Exprimer le rang de la matrice par blocs $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$ en fonction des rangs de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$.

Exercice 7.

1. Montrer que $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement s'il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^m$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$, tels que $\mathbf{A} = \mathbf{x}\mathbf{y}^\top$.
2. Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de rang r. Montrer qu'il existe deux matrices $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{m,r}(\mathbb{K})$ et $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{K})$ de rangs r telles que $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$.

- Déterminants -

Exercice 8. Montrer que si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}(\mathrm{Com}\mathbf{A})^\top,$$

où Com$\mathbf{A}$ désigne la matrice des cofacteurs de la matrice $\mathbf{A}$.

Exercice 9. Soit E l'espace vectoriel des fonctions sur un intervalle réel I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que deux fonctions f et g de E sont linéairement indépendantes si et seulement s'il existe $x_0, x_1 \in I$ tels que

$$f(x_0)g(x_1) - f(x_1)g(x_0) \neq 0.$$

2. Étudier l'indépendance linéaire des familles suivantes

$$\{t \mapsto \cos t, t \mapsto \sin t\}, \quad \{t \mapsto e^{at}, t \mapsto te^{at}\}, \ a \in \mathbb{R}.$$

Exercice 10. Montrer que l'aire du triangle de sommets (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est

$$\left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} \right|.$$

Exercice 11.

1. Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}).$$

2. Montrer que, pour toutes matrices carrées $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$, on a

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{D}).$$

3. Calculer $\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ lorsque $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbf{A}$ est inversible.

Exercice 12. Une matrice de type Vandermonde d'ordre $n \geqslant 2$ est une matrice réelle de la forme

$$\mathbf{V}_n = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de $\mathbf{V}_n$.
2. Montrer que si l'équation

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1} = 0,$$

avec $n \geqslant 2$ et $a_i \in \mathbb{R}$ possède au moins n solutions, alors on a $a_i = 0$ pour tout i.

- Systèmes linéaires -

Exercice 13. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants

$$\left| \begin{array}{ll} x+y & =4 \\ 3y+4z & =1 \\ 2x+2y & =8 \end{array} \right., \quad \left| \begin{array}{ll} x+y & =3 \\ -x+5y+6z & =2 \\ 2x+3y+z & =9 \end{array} \right., \quad \left| \begin{array}{ll} ax+y+z & =b \\ x+ay+z & =c \end{array} \right., \quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 14. Expliquer pourquoi un système linéaire ne peut jamais avoir exactement deux solutions et que s'il possède plus d'une solution, alors il en possède une infinité.

Exercice 15. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. Existe-t-il des matrices $\mathbf{B}$ telles que $\mathbf{BA}$ soit une matrice identité ?

Exercice 16. Montrer que $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$, avec $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $\mathbf{D} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, est inversible si et seulement si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ sont inversibles.

Exercice 17. Inverser la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercice 18. Soient F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$(1,-1,2,3),\ (1,1,2,0),\ (3,-1,6,-6),$$

et G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$(0,2,0,-3),\ (1,0,1,0).$$

Déterminer les dimensions des sous-espaces F, G, $F \cap G$ et $F + G$.

- Applications linéaires -

Exercice 19. Soient $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$ deux applications linéaires. Montrer que $v \circ u = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} u \subseteq \operatorname{Ker} v$.

Exercice 20. Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant $u \circ v = v \circ u$ et $u + v = \mathrm{id}_E$. Montrer que

$$\operatorname{Ker}(u \circ v) = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker} v.$$

Exercice 21. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E.
1. Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$ si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$.
2. Montrer que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$ si et seulement si $u^2 = 0$ et $\dim E = 2.\operatorname{rang} u$.

Exercice 22. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que

$$E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u \quad \text{si et seulement si} \quad \text{Ker } u = \text{Ker } u^2 \text{ et } \text{Im } u = \text{Im } u^2.$$

On considère les deux suites de sous-espaces vectoriels

$$(\text{Ker } u^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (\text{Im } u^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

2. Montrer que pour tout n, on a

$$\text{Ker } u^n \subseteq \text{Ker } u^{n+1}, \qquad \text{Im } u^{n+1} \subseteq \text{Im } u^n.$$

3. Montrer que s'il existe un entier N tel que $\text{Ker } u^N = \text{Ker } u^{N+1}$, alors la première suite est stationnaire :

$$\text{Ker } u^n = \text{Ker } u^N, \text{ pour tout } n \geqslant N.$$

4. Montrer que s'il existe un entier N tel que $\text{Im } u^N = \text{Im } u^{N+1}$, alors la seconde suite est stationnaire :

$$\text{Im } u^n = \text{Im } u^N, \text{ pour tout } n \geqslant N.$$

5. Pour tout entier $n > 0$, démontrer les équivalences suivantes

$$\text{Ker } u^n = \text{Ker } u^{n+1} \quad \text{si et seulement si} \quad \text{Ker } u^n \cap \text{Im } u^n = \{0\}.$$

$$\text{Im } u^n = \text{Im } u^{n+1} \quad \text{si et seulement si} \quad E = \text{Ker } u^n + \text{Im } u^n.$$

6. Est-ce que les deux suites sont stationnaires lorsque E est de dimension finie ?
7. Construire des exemples en dimension infinie qui illustrent qu'une seule des deux suites peut-être stationnaire, que les deux peuvent être stationnaire ou qu'aucune n'est stationnaire.

- Dualité -

Exercice 23. Montrer que tout hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Exercice 24.

1. Vérifier que l'application trace : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire.
2. Montrer que pour toute matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $\Gamma_{\mathbf{A}} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ définie par

$$\Gamma_{\mathbf{A}}(\mathbf{M}) = \text{trace}(\mathbf{AM})$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3. Montrer que pour toute forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice $\mathbf{A}$ telle que $\varphi = \Gamma_{\mathbf{A}}$.
4. Montrer que pour tout forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\varphi(\mathbf{MN}) = \varphi(\mathbf{NM})$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi(\mathbf{M}) = \lambda\text{trace}(\mathbf{M})$, pour tout $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 25. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace de E. L'annulateur de F est l'ensemble

$$F^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \varphi(x) = 0 \text{ pour tout } x \in F\}.$$

1. Vérifier que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E^*.
2. Soit $\{e_1, \ldots, e_p\}$ une base de F, montrer que

$$F^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \varphi(e_1) = \ldots = \varphi(e_p) = 0\}.$$

3. Pour un espace E de dimension finie, établir la relation

$$\dim E = \dim F + \dim F^\perp.$$

4. Montrer que si G est un autre sous-espace de E :

$$(F^\perp)^\perp = F; \qquad \text{si } G \subset F \text{ alors } F^\perp \subset G^\perp;$$

$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp;\ (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

Exercice 26. On considère la matrice réelle

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a^2 & a^2 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & a^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de $\mathbf{A} - (1-a)\mathbf{1}_4$. En déduire que $1-a$ est valeur propre de $\mathbf{A}$.
2. La matrice $\mathbf{A}$ est-elle diagonalisable lorsque $a = 0$?
3. On suppose a non nul. La matrice $\mathbf{A}$ est-elle diagonalisable ? Déterminer son polynôme caractéristique et son polynôme minimal.

Exercice 27. Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisable, le cas échéant construire une base de diagonalisation de l'endomorphisme associé.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),$$

$$\begin{bmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & -n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & -n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}), \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & & \\ 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R}).$$

Exercice 28. On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geqslant 2$, la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme minimal de $\mathbf{A}$, puis diagonaliser $\mathbf{A}$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b pour que $\mathbf{A}$ soit inversible. Dans le cas où $\mathbf{A}$ est inversible, calculer son inverse.
3. Calculer la matrice $\mathbf{A}^k$, pour tout entier k, et la matrice $e^{\mathbf{A}}$.

Exercice 29. L'endomorphime u du $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n, défini par

$$u(P) = (X^2-1)P'' + 3XP',$$

est-il diagonalisable ?

Exercice 30. Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = 1$. Montrer que

$$\mathbf{A} \text{ est diagonalisable si et seulement si } \mathrm{trace}(\mathbf{A}) \neq 0.$$

Exercice 31. Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel vérifiant $u \circ v = v \circ u$.

1. Montrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.
2. Montrer que u et v sont diagonalisables si et seulement s'il existe une base commune de diagonalisation.

Exercice 32. Soient E un espace vectoriel complexe de dimension finie et $\mathcal{I}$ un sous-ensemble irréductible d'endomorphismes de E, i.e., les seuls sous-espaces de E stables par tous les éléments de $\mathcal{I}$ sont $\{0\}$ et E.

1. Montrer que les seuls endomorphismes de E qui commutent avec les éléments de $\mathcal{I}$ sont les homothéties.
2. Ce résultat reste-t-il vrai lorsque E est un espace vectoriel réel ?

Exercice 33. On se donne un polynôme quelconque p

$$p = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \ldots - a_1 X - a_0,$$

où $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{K}$. La matrice compagnon du polynôme p est la matrice

$$\mathbf{C}(p) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de $\mathbf{C}(p)$ est $(-1)^n p$.
2. Sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, montrer que le polynôme p est annulateur de $\mathbf{C}(p)$.
3. En déduire que p est le polynôme minimal de $\mathbf{C}(p)$.

Exercice 34. Soient v un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On se donne un vecteur non nul x de E. Notons k le plus grand entier tel que la famille $\mathcal{F}_x = (x, v(x), \ldots, v^k(x))$ soit libre.

1. Montrer que le sous-espace $E_x = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}_x)$ est stable par v.
2. Par construction, la famille $\mathcal{F}_x$ forme une base de E_x. Montrer que la matrice dans cette base de la restriction de v au sous-espace E_x est une matrice compagnon.
3. Quel est le polynôme associé à cette matrice compagnon ?
4. En déduire que le polynôme caractéristique de v vérifie $p_v(x) = 0$.
5. En déduire une preuve du théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 35. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Un endomorphisme u de E est dit cyclique s'il existe un vecteur x de E tel que la famille $\mathcal{B}_x = (x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.

1. Montrer que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_x$ est une matrice compagnon.
2. Montrer qu'un endomorphisme cyclique possède une unique matrice compagon.
3. Montrer qu'un endomorphisme cyclique de E est diagonalisable si et seulement s'il possède n valeurs propres distinctes.

- Topologie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ -

Exercice 36. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. En déduire que pour toutes matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les polynômes caractéristiques de $\mathbf{AB}$ et $\mathbf{BA}$ sont égaux.
3. Montrer que le centre du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ se réduit aux homothéties non nulles.

Exercice 37.

1. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Ce résultat reste-t-il valable pour les matrices réelles ?
3. En utilisant le résultat du 1. montrer le théorème de Cayley-Hamilton pour les matrices complexes.
4. Montrer l'équivalence

$$\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ est diagonalisable} \quad \text{si et seulement si} \quad \{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \,|\, \mathbf{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\} \text{ est fermé.}$$