*Université Claude Bernard Lyon 1 - 2008/2009*

**Préparation Capes - Algèbre et Géométrie**

**- Normes, produits scalaires, espaces euclidiens -**

---

## - Produits scalaires - Normes vectorielles - Normes matricielles - -

**Exercice 1.** Parmi les applications $\langle\, ,\, \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes, lesquelles définissent un produit scalaire

**i)** $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$,
**ii)** $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$,
**iii)** $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$,
**iv)** $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_3^2y_3^2$,

où $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 2.** Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ une matrice carrée réelle symétrique. Montrer que l'application $\langle\, ,\, \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\langle X, Y \rangle = X^\top \mathbf{A} Y$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $a > 0$, $c > 0$ et $ac - b^2 > 0$.

**Exercice 3.** Soit $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des matrices réelles d'ordre $n, m \geqslant 1$.

1. Montrer que l'application $\langle\, ,\, \rangle : \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \mathrm{trace}(\mathbf{A}^\top \mathbf{B})$$

est un produit scalaire sur $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. La *norme de Frobenius* de $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est la norme associée à ce produit scalaire :

$$||\mathbf{A}||_F = \sqrt{\mathrm{trace}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})}.$$

2. Montrer que

$$||\mathbf{A}||_F^2 = \sum_{i,j} (a_i^j)^2 = \sum_i ||\mathbf{A}_i^*||_2^2 = \sum_j ||\mathbf{A}_*^j||_2^2,$$

où $||\mathbf{x}||_2$ désigne la norme euclidienne d'un vecteur $\mathbf{x}$ définie par $||\mathbf{x}||_2 = \sqrt{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}$.

3. Montrer que $||\mathbf{A}\mathbf{x}||_2 \leqslant ||\mathbf{A}||_F ||\mathbf{x}||_2$, pour tous $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. En déduire que, pour toutes matrices compatibles $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, on a

$$||\mathbf{A}\mathbf{B}||_F \leqslant ||\mathbf{A}||_F \, ||\mathbf{B}||_F.$$

4. Calculer la norme de Frobenius des matrices suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Exercice 4.** Soit $||\ ||$ une norme sur un espace vectoriel réel $E$.

1. Montrer que l'application $\mathbf{x} \longmapsto ||\mathbf{x}||$ dépend continuement de son argument dans le sens suivant :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \text{tel que} \quad |x_i - y_i| < \delta, \forall i = 1..n \ \Rightarrow |\ ||x|| - ||y||\ | < \epsilon.$$

2. Montrer que l'application $\lambda \longrightarrow ||\lambda \mathbf{x} + \mathbf{y}||$ est continue sur $\mathbb{R}$, pour tous vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de $E$.

**Exercice 5.** Soit $E$ un espace euclidien de produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$. Montrer que pour tous vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ de $E$, on a les inégalités

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leqslant ||\mathbf{x}||\, ||\mathbf{y}||,$$
$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leqslant ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||,$$
$$|\ ||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}||\ | \leqslant ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||.$$

Montrer que la première inégalité est une égalité si et seulement si les vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont colinéaires.

**Exercice 6.** Soit $|| \, ||$ une norme sur un espace vectoriel réel $E$. Montrer qu'il existe un produit scalaire $\langle \, , \, \rangle$ sur $E$ tel que, pour tout $\mathbf{x} \in E$, $||\mathbf{x}||^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$, si et seulement si l'*égalité du parallélogramme*

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 + ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2 = 2(||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2),$$

est vérifiée pour tous vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ de $E$.

**Exercice 7.** On définit la 2-*norme matricielle* par

$$||\mathbf{A}||_2 = \sup_{||\mathbf{x}||_2 = 1} ||\mathbf{A}\mathbf{x}||_2,$$

pour tout $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que $|| \, ||_2$ définit bien une norme sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.
2. Donner une inteprétation géométrique de cette norme.
3. Montrer que si $\mathbf{A}$ est inversible, on a

$$||\mathbf{A}^{-1}||_2 = \frac{1}{\inf\limits_{||\mathbf{x}||_2 = 1} ||\mathbf{A}\mathbf{x}||_2}.$$

4. Montrer que $||\mathbf{A}\mathbf{x}||_2 \leqslant ||\mathbf{A}||_2 \, ||\mathbf{x}||_2$, pour toute matrice $\mathbf{A}$ et vecteur $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$.
5. En déduire l'inégalité, pour toutes matrices compatibles $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$,

$$||\mathbf{A}\mathbf{B}||_2 \leqslant ||\mathbf{A}||_2 \, ||\mathbf{B}||_2.$$

**Exercice 8.**

1. La norme matricielle de Frobenius satisfait-elle l'égalité du parallélogramme ?
2. La 2-norme matricielle est-elle associée à un produit scalaire ?

**Exercice 9.** Définissons pour tout $p \geqslant 1$ et tout vecteur $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ de $\mathbb{C}^n$

$$||\mathbf{x}||_p = \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

1. Considérons la fonction réelle $f$ définie par

$$f(t) = (1 - \lambda) + \lambda t - t^{\lambda},$$

où $\lambda \in ]0, 1[$. En étudiant les variations de $f$, établir l'inégalité

$$x^{\lambda} y^{1-\lambda} \leqslant \lambda x + (1 - \lambda) y,$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$.

2. En déduire l'inégalité dite de *Hölder* : pour tous réels $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{1/q}.$$

3. Montrer que, pour tous vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de $E$, on a :

$$|\mathbf{x}^* \mathbf{y}| \leqslant ||\mathbf{x}||_p \, ||\mathbf{y}||_q.$$

4. Déduire de l'inégalité précédente que, pour tous vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ de $\mathbb{C}^n$, on a l'inégalité dite de *Minkowski* :

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}||_p \leqslant ||\mathbf{x}||_p + ||\mathbf{y}||_p.$$

5. Montrer que $|| \, ||_p$ définit une norme sur $\mathbb{C}^n$.
6. On pose $||\mathbf{x}||_\infty = \lim\limits_{p \to \infty} ||\mathbf{x}||_p$. Justifier que $||\mathbf{x}||_\infty = \sup\limits_i |x_i|$.
7. Calculer $||\mathbf{x}||_1$, $||\mathbf{x}||_2$ et $||\mathbf{x}||_\infty$, pour $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 + i \\ 1 - i \\ 1 \\ i \end{bmatrix}$.

## - Espaces vectoriels normés -

**Exercice 10.**

1. Montrer que dans un espace vectoriel normé de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.
2. Montrer que toute application linéaire sur un espace vectoriel normé de dimension finie est continue.
3. Ce resultat reste-t-il vrai en dimension infinie ?

**Exercice 11.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1. Montrer que, pour tout endomorphisme continue $u$ sur $E$, la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} u^n$$

converge. Sa somme est appelée l'*exponentielle* de $u$ et est notée $e^u$.

2. Montrer que, pour tous endomorphismes continues $u$ et $v$ de $E$ tels que $uv = vu$, on a les relations :

$$e^{u+v} = e^u e^v = e^v e^u.$$

**Exercice 12.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $u$ un endomorphisme de $E$ vérifiant

$$(u - \mathrm{id}_E)^2 (u - 2\mathrm{id}_E) = 0.$$

1. Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}\ (u - \mathrm{id}_E)^2 \oplus \mathrm{Ker}\ (u - 2\mathrm{id}_E).$$

Notons $\pi_1$ la projection sur Ker $(u - 2\mathrm{id}_E)$ parallèlement à Ker $(u - \mathrm{id}_E)^2$ et $\pi_2$ la projection sur Ker $(u - \mathrm{id}_E)^2$ parallèlement à Ker $(u - 2\mathrm{id}_E)$.

2. Établir les relations suivantes

$$e^u \pi_1 = e^2 \pi_1, \qquad e^u \pi_2 = eu\pi_2.$$

3. Exprimer en fonction de $u$ les projections $\pi_1$ et $\pi_2$.
4. En déduire une expression de $e^u$ en fonction de $u$.

**Exercice 13.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie.

1. Établir, pour tout endomorphisme diagonalisable $u$ de $E$, la relation

$$\cos^2 u + \sin^2 u = \mathrm{id}_E.$$

2. Déterminer les endomorphismes $\cos u$ et $\sin u$, où $u$ est l'endomrophisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{bmatrix} -\pi/2 & \pi/2 \\ \pi/2 & -\pi/2 \end{bmatrix}.$$

## - Orthogonalité -

**Exercice 14.** Soit $F$ un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien $E$, engendré par la famille $(\mathbf{u}_i)_{i=1..p}$. Montrer que

$$F^\perp = \bigcap_{i=1..p} (\mathbb{R}\mathbf{u}_i)^\perp.$$

**Exercice 15.** Montrer que tout sous-espace vectoriel d'un espace euclidien possède un supplémentaire.

**Exercice 16.** Soit $E$ un espace euclidien. Montrer que le noyau de toute forme linéaire non nulle sur $E$ est un hyperplan et qu'inversement tout hyperplan est le noyau d'une telle forme sur $E$.

**Exercice 17.** Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien $E$. Montrer que

$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp, \qquad (F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp.$$

**Exercice 18.** En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt construire, pour chaque matrice suivante, une base orthonormée du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs colonnes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Exercice 19.**

1. En considérant l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, montrer que tout matrice $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR},$$

où $\mathbf{Q} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{R} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire supérieure. Cette décomposition est appelé *décomposition de Householder* ou encore *décomposition QR*.

2. Calculer la décomposition QR des matrices de l'exercice 18.
3. Montrer que la décomposition $QR$ de $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est unique.

**Exercice 20.** Soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[-1, 1]$.

1. Montrer que l'application $\langle\, ,\, \rangle : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$

munit $\mathcal{C}$ d'une structure d'espace euclidien.

2. Soit $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ engendré par les fonctions suivantes :

$$x \mapsto 1, \quad x \mapsto x, \quad x \mapsto x^2.$$

Construire une base orthonormée $(p_0, p_1, p_2)$ de $\mathcal{F}$ en donnant une matrice de passage. Les polynômes $p_n$ de degré $n$ obtenus sont les trois premiers *polynômes de Legendre.*

3. Montrer que pour $n = 0, 1, 2$, les polynômes $p_n$ satisfont l'équation différentielle

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0.$$

## - Projections et symétries orthogonales -

**Exercice 21.** Soient $(E, \langle\, ,\, \rangle)$ un espace euclidien et $\pi$ un *projecteur* de $E$, i.e., un endomorphisme de $E$ vérifiant $\pi^2 = \pi$.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

   **i)** les sous-espaces Ker $\pi$ et Im $\pi$ sont orthogonaux,
   **ii)** pour tous vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de $E$,

$$\langle \pi(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \pi(\mathbf{y}) \rangle,$$

   **iii)** pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de $E$,

$$||\pi(\mathbf{x})|| \leqslant ||\mathbf{x}||.$$

Un projecteur $\pi$ satisfaisant l'une de ces conditions est dit *orthogonal.*

2. Montrer qu'une matrice $\mathbf{P}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'un projecteur orthogonal dans une base orthonormée de $E$ si et seulement si

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}, \quad \text{et} \quad \mathbf{P}^\top = \mathbf{P}.$$

**Exercice 22.** Soient $(E, \langle\, ,\, \rangle)$ un espace euclidien et $\sigma$ une *symétrie* de $E$, i.e., un automorphisme de $E$ vérifiant $\sigma^2 = \mathrm{id}_E$.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalents :

   **i)** les sous-espaces propres $E_1$ et $E_{-1}$ sont orthogonaux,
   **ii)** pour tous vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de $E$,

$$\langle \sigma(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \sigma(\mathbf{y}) \rangle,$$

**iii)** pour tous vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de $E$,

$$\langle \sigma(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,$$

**iv)** pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de $E$,

$$||\sigma(\mathbf{x})|| = ||\mathbf{x}||.$$

Une symétrie satisfaisant l'une de ces conditions est dite *orthogonale.*

2. Montrer qu'une matrice $\mathbf{S}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'une symétrie orthogonale dans une base orthonormée de $E$ si et seulement si

$$\mathbf{S}^2 = \mathbf{1}, \quad \text{et} \quad \mathbf{S}^\top = \mathbf{S}.$$

**Exercice 23.** Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Soient $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $\pi_F$ la projection orthogonale sur $F$. On définit la distance d'un vecteur $\mathbf{x}$ de $E$ à $F$ en posant :

$$d(\mathbf{x}, F) = ||\mathbf{x} - \pi_F(\mathbf{x})||.$$

1. Montrer que deux vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ de $E$ sont orthogonaux si et seulement si

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2.$$

2. En déduire que

$$||\mathbf{x}||^2 = d(\mathbf{x}, F)^2 + ||\pi_F(\mathbf{x})||^2.$$

3. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de $F$. Notons $\pi_i$ la projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R}e_i$. Montrer que

$$\pi_F = \pi_1 + \ldots + \pi_p.$$

4. En déduire que

$$d(\mathbf{x}, F)^2 = ||\mathbf{x}||^2 - \sum_{i=1}^{p} \langle \mathbf{x}, e_i \rangle^2.$$

**Exercice 24.** Soit $\mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

1. Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour le produit scalaire défini par

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

2. Calculer la distance de $X^3$ au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.

**Exercice 25.** Soient $E$ un espace vectoriel euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée de $E$. Déterminer les caractéristiques géométriques des projections ou symétries orthogonales représentées dans la base $\mathcal{B}$ par les matrices

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Exercice 26.** Soit $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des matrices carrées réelles d'ordre $n$, muni du produit scalaire

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \mathrm{trace}(\mathbf{A}^\top \mathbf{B}).$$

Soit $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques.

1. Déterminer le sous-espace orthogonal de $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, pour ce produit scalaire.
2. Calculer la distance d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ au sous-espace $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.
3. Calculer la distance de la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & \epsilon & 0 \\ \epsilon' & 1 & \delta \\ 0 & \delta' & 1 \end{bmatrix}$$

au sous-espace $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$.

## - Adjoint d'un endomorphisme -

**Exercice 27.** Soient $E$ un espace euclidien de dimension $n$ et $\varphi$ un endomorphisme de $E$.

1. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme $\varphi^*$ de $E$ vérifiant, pour tous vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ de $E$,

$$\langle \mathbf{x}, \varphi(\mathbf{y})\rangle = \langle \varphi^*(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle.$$

L'endomorphisme $\varphi^*$ est appelé l'*adjoint* de $\varphi$.

2. Montrer que dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $E$, on a :

$$[\varphi^*]_{\mathcal{B}} = [\varphi]_{\mathcal{B}}^{\top}.$$

3. Établir les relations suivantes, dans lesquelles $\varphi$ et $\psi$ sont des endomorphismes de $E$ et $\lambda$ un réel :

$$(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*, \quad (\lambda\varphi)^* = \lambda\varphi^*,$$
$$(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*, \quad \mathrm{id}_E^* = \mathrm{id}_E, \quad \varphi^{**} = \varphi.$$

4. Montrer que $\varphi$ est inversible si et seulement si $\varphi^*$ est inversible et que dans ce cas

$$(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*.$$

**Exercice 28.** Soient $E$ un espace euclidien et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Montrer que si un endomorphisme $\varphi$ de $E$ laisse stable le sous-espace $F$, alors $\varphi^*$ laisse stable le sous-espace $F^{\perp}$.

**Exercice 29.** Soit $E$ un espace euclidien et soit $\varphi$ un endomorphisme de $E$. Montrer que

$$\mathrm{Ker}\ \varphi^* = (\mathrm{Im}\ \varphi)^{\perp}, \qquad \mathrm{Im}\ \varphi^* = (\mathrm{Ker}\ \varphi)^{\perp}.$$

**Exercice 30.** Un endomorphisme $\varphi$ d'un espace euclidien $E$ est dit *autoadjoint* si $\varphi^* = \varphi$.

1. Montrer que tout endomorphisme autoadjoint est diagonalisable et que ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.
2. Montrer que pour toute matrice symétrique $\mathbf{A}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $\mathbf{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $\mathbf{P}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{P}$ soit diagonale.

**Exercice 31.** Un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien $E$ est dit *défini positif* si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

1. Montrer que, pour tout endomorphisme autoadjoint $\varphi$ de $E$ défini positif, il existe un unique endomorphisme autoadjoint défini positif $\rho$ tel que $\varphi = \rho^2$. L'endomorphisme $\rho$ est appelé la *racine carrée positive* de $\varphi$.
2. Montrer que, pour tout endomorphisme inversible $u$ de $E$, l'endomorphisme $u^* \circ u$ est autoadjoint défini positif.
3. Montrer que tout endomorphisme inversible $u$ de $E$ se décompose de façon unique en $u = v \circ \rho$, où $v$ est orthogonal et $\rho$ est autoadjoint défini positif. Cette décomposition est appellée la *décomposition polaire* de $u$.

## - Groupe orthogonal -

**Exercice 32.** Soit $\varphi$ un endomorphisme d'un espace euclidien $E$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

**i)** pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, $\langle \varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$,
**ii)** pour tout $\mathbf{x} \in E$, $||\varphi(\mathbf{x})|| = ||\mathbf{x}||$,
**iii)** $\varphi$ envoie une base orthonormée de $E$ sur une base orthonormée de $E$,
**iv)** la matrice de $\varphi$ dans une base orthonormée est orthogonale,
**v)** $\varphi$ est l'inverse de son adjoint.

Lorsque $\varphi$ satisfait l'une de ces conditions, ont dit que $\varphi$ est une *transformation orthogonale* de $E$.

**Exercice 33.**

1. Montrer que l'ensemble des transformations orthogonales d'un espace euclidien $E$ forme un groupe. Il est appelé *groupe orthogonal* de $E$, on le note $\mathrm{O}(E)$.

2. Un automorphisme orthogonal de $E$ de déterminant égal à 1 est appelé une *rotation* de $E$. Montrer que l'ensemble des rotations, muni de la composition, forme un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$, appelé *groupe spécial orthogonal* et noté $\mathrm{SO}(E)$.

3. Montrer que les transformations orthogonales de $E$ de déterminant $-1$ ne forment pas un groupe. On note $\mathrm{O}^-(E)$ leur ensemble.

4. Montrer que toute symétrie orthogonale par rapport à une droite dans un espace euclidien de dimension impaire est une rotation. Que se passe-t-il en dimension paire ?

**Exercice 34.** Soit $E$ un espace euclidien. Considérons deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de $E$ de même norme. Soit $P$ l'hyperplan $\mathrm{Vect}(\mathbf{x}-\mathbf{y})^\perp$. Calculer $\sigma(\mathbf{x})$, où $\sigma$ est la réflexion d'hyperplan $P$.

**Exercice 35.** Déterminer les transformations orthogonales d'un espace euclidien de dimension 1.

**Exercice 36.** Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n$ supérieure ou égale à 1. Montrer que le groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$ est engendré par les réflexions.

**Exercice 37.** Soient $E$ un espace euclidien et $\varphi \in \mathrm{O}(E)$.

1. Montrer que si $\varphi$ laisse stable un sous-espace vectoriel $F$ de $E$, alors $\varphi$ laisse le sous-espace $F^\perp$ stable.
2. Montrer que la restriction de $\varphi$ à $F^\perp$ est un automorphisme orthogonal de $F^\perp$.

## - Transformations orthogonales en dimension 2 et 3 -

**Exercice 38.** Soit $E$ un espace euclidien de dimension 2.

1. Montrer que $\varphi \in \mathrm{O}^-(E)$ si et seulement si $\varphi$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.
2. Montrer que $\varphi \in \mathrm{SO}(E)$ si et seulement si $\varphi$ est l'identité de $E$ ou le sous-espace propre

$$E_1 = \{\mathbf{x} \in E \mid \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}$$

est réduit à $\{0\}$.

3. Montrer que tout rotation de $E$ se décompose en le produit de deux symétries orthogonales par rapport à une droite, dont l'une de ces droites peut être choisie de façon arbitraire.

4. Montrer que $\mathrm{SO}(E)$ est commutatif.

**Exercice 39.** Soit $\varphi$ un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien $E$ de dimension 3. Notons $E_1$ son sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

1. Montrer que $\varphi$ est une réflexion si et seulement si $E_1$ est un plan.
2. Montrer que $\varphi$ est une rotation si et seulement si $\varphi$ est l'identité de $E$ ou si $E_1$ est une droite.
3. Montrer que $\varphi \in \mathrm{O}^-(E)$ si et seulement si $\varphi$ se décompose en le produit d'une réflexion par rapport à un plan $P$ et d'une rotation d'axe orthogonal à $P$.

**Exercice 40.** Soit $\rho$ une rotation d'axe $D$ d'un espace euclidien de dimension 3. Montrer qu'il existe deux droites orthogonales à $D$ telles que $\rho$ se décompose en le produit des deux demi-tours d'axes ces deux droites.

**Exercice 41.** Soit $\rho$ une rotation d'axe $D$ d'un espace euclidien de dimension 3. Montrer que $\rho$ se décompose en le produit de deux reflexions par rapport à des plans passant par $D$, dont l'un peut être choisi de façon arbitraire.

**Exercice 42.** Dans un espace euclidien de dimension 3, montrer que la composée de deux reflexions $\sigma_P$ et $\sigma_{P'}$ par rapport à des plans $P$ et $P'$ distincts est une rotation d'axe $P \cap P'$.

**Exercice 43.** On se place dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, rapporté à sa base canonique orthonormée directe $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$. Soient $\mathbf{u}$ un vecteur unitaire et $\rho$ la rotation d'axe la droite $D$ portée par $\mathbf{u}$ et d'angle $\theta$ modulo $2\pi$ avec une orientation de $D^\perp$ compatible avec celle de $D$.

1. Montrer que

$$\mathrm{trace}(\rho) = 2\cos(\theta) + 1.$$

2. Montrer que le produit mixte $[\mathbf{u}, \mathbf{x}, \rho(\mathbf{x})]$ et $\sin(\theta)$ sont de même signe pour tout vecteur $\mathbf{x}$ non colinéaire à $\mathbf{u}$.

3. Montrer que les matrices suivantes représentent des rotations. Déterminer leur axe et une mesure de leur angle. Décomposer chaque matrice en le produit de deux matrices de réflexions.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Exercice 44.** Déterminer la nature géométrique des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ représentés dans la base canaonique par les matrices

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Exercice 45.** Soient $E$ l'espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $B = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ une base orthonormée directe de $E$.

1. Soient $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ trois vecteurs de $E$ et $|\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}|_B$ la matrice de la famille $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ exprimée dans la base $B$. Montrer que, pour toute autre base orthonormée directe $B'$, on a

$$\det|\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}|_B = \det|\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}|_{B'}.$$

2. Montrer qu'il existe un unique vecteur de $E$, noté $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$, vérifiant, pour tout vecteur $\mathbf{z}$,

$$\langle \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \det|\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}|_B.$$

3. Montrer que si les vecteurs $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ sont exprimés dans une base orthonormée, alors

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ est orthogonal à $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ et que $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = 0$ si et seulement si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont colinéaires.

5. Montrer que, pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de $E$, l'application $u_{\mathbf{x}} : E \longrightarrow E$, définie par $u_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$, est un endomorphisme de $E$.

6. Déterminer le noyau et l'image de $u_{\mathbf{x}}$. Écrire la matrice de $u_{\mathbf{x}}$ dans la base $B$.

7. On suppose que $\mathbf{x}$ est un vecteur unitaire. Soit $P$ le plan orthogonal à la droite $D$ portée par $\mathbf{x}$ et orienté relativement à $D$. Soit $\rho$ la rotation d'axe $D$ et d'angle $\theta$. Montrer que, pour tout vecteur $\mathbf{y}$ de $P$,

$$\rho(\mathbf{y}) = \cos\theta\, \mathbf{y} + \sin\theta\, \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}.$$

En déduire que si $\pi_D$ et $\pi_P$ désignent les projections orthogonales sur $D$ et $P$ on a

$$\rho = \pi_D + \cos\theta \pi_P + \sin\theta u_{\mathbf{x}}.$$

8. Montrer que si $\mathbf{x}$ est représenté par le vecteur colonne $X = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ dans la base $B$, alors la matrice de la projection orthogonale $\pi_D$ dans la base $B$ est $X\,{}^tX$.

9. En déduire que la matrice de la rotation $\rho$ dans la base $B$ est :

$$[\rho]_B = \cos\theta\, \mathbf{1}_3 + (1 - \cos\theta)\, X\,{}^tX + \sin\theta\, [\pi_{\mathbf{x}}]_B.$$

10. Écrire la matrice de la rotation d'axe $\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ dans la base $B$.