Sujet de stage de recherche - master deuxième année

(CO)HOMOLOGIE DES ALGÈBRES PLAXIQUES PAR RÉÉCRITURE

Encadrement. Stéphane Gaussent, Philippe Malbos, Institut Camille Jordan.

Mots clés. Bases de Gröbner, monoïdes plaxiques, résolutions libres, invariants (co)homologiques.

Lieu du stage. Institut Camille Jordan, UMR CNRS 5208, Université Claude Bernard Lyon 1, bâtiment Braconnier, 43 boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex.

Résumé du sujet de stage. Les notions de monoïde plaxique et d'algèbre plaxique sont à la frontière de la combinatoire algébrique et de la théorie des représentations. L'objectif de ce stage est de comprendre des méthodes de calcul de résolutions libres d'algèbres plaxiques à partir de présentation de ces algèbres par des bases de Gröbner associatives. L'étude portera sur les algèbres plaxiques de type A, mais pourra éventuellement aborder d'autres types classiques. Ce travail repose sur la compréhension de la structure d'algèbre plaxique, ses présentations par des systèmes de réécritures convergents finis, et la construction de résolutions libres d'algèbres à partir d'une présentation de leur idéal des relations par une base de Gröbner.

Description détaillé du sujet. En 1981, l'introduction de l'algèbre plaxique par Lascoux et Schützenberger, [LS81], leur a permis, en particulier, de donner la première démonstration rigoureuse de la règle de Littlewood-Richardson qui décrit la décomposition du produit tensoriel de deux représentations irréductibles du groupe général linéaire. Depuis, de nombreux travaux ont montré l'intérêt de ces structures en théorie des représentations, notamment en lien avec la théorie des bases cristallines de Kashiwara (Leclerc, Lecouvey, Littelmann, Thibon...) et la théorie des chemins de Littelmann, [Lit96], pour les représentations des algèbres de Lie semi-simples.

Plus récemment, les structures plaxiques ont été étudiées par des méthodes de réécriture pour en déduire des propriétés de décidabilité et d'automaticité, [CGM15, CGM19], des présentations cohérentes, [HM17, HM19], ou en calculer la cohomologie, [Lop14].

Cet apport des méthodes de réécriture s'inscrit dans un cadre plus large. Depuis les années 80, plusieurs résultats (Anick [Ani86], Squier [Squ87], Kobayashi [Kob90], Brown [Bro92], Dotsenko [DK13], etc.) ont révélé l'intérêt de méthodes issues de la réécriture pour la résolution de problèmes de décision algébriques et la construction d'invariants homologiques. L'étude combinatoire des groupes, de structures monoïdales, comme les monoïdes, petites catégories, pros, ou cartésiennes, comme les théories de Lawvere, ou encore linéaires avec les algèbres associatives et les opérades, se fonde sur des présentations par générateurs et relations possédant de « bonnes » propriétés calculatoires (finitude, confluence, terminaison). En particulier, les présentations convergentes, i.e., confluentes et terminantes, et les bases de Gröbner pour les structures linéaires, permettent de calculer des formes normales et, ainsi, d'aborder des problèmes de décision par des méthodes de réécriture. Plus généralement, plusieurs méthodes algorithmiques de calcul de résolutions abéliennes libres à partir de présentations convergentes ou de bases de Gröbner ont été développées permettant de calculer explicitement des invariants homologiques.

Le principe de calcul de ces résolutions à partir d'une présentation convergente de l'algèbre, consiste à décrire, successivement, les générateurs, les relations, les paires critiques et, pour tout entier $n \geq 2$, les chevauchements de n paires critiques. La résolution décrit alors, pour tout n, le calcul des mots qui peuvent se réécrire de n façons différentes. De plus, l'idée est d'obtenir des données minimales qui décrivent ces situations, en généralisant le principe selon lequel les paires critiques décrivent tous les mots qui peuvent être réécrits de deux façons différentes, d'où la volonté de calculer des résolutions de la plus petite taille possible (voire minimales). Ce type de résolution fournit ainsi un compromis entre la bar résolution et les résolutions minimales. La bar résolution est facile à construire, car associée à une présentation de l'algèbre comprenant tous les éléments de l'algèbre pour générateurs et la table de multiplication pour relations. Cependant, cette résolution reste difficile à utiliser en pratique. Par ailleurs, à l'autre extrême, les résolutions minimales sont difficiles à expliciter en général.

Ce stage de recherche a pour finalité la construction explicite de résolutions des algèbres plaxiques en type A à partir d'une base de Gröbner de son idéal des relations. Il s'agira notamment de comprendre les constructions de résolutions données par Lopatkin dans [Lop14] et de Lebed dans [Leb16]. Certaines des questions suivantes pourront être également abordées dans le cadre de ce stage :

1 - expliciter les chaînes de la résolution en termes de tableaux et les opérateurs bords et l'homotopie contractante en termes d'insertion de Schendsted,

2 - étudier le cas des algèbres plaxiques de type B_n, C_n, D_n ou G_2,

3 - donner une interprétation en termes de réécriture de la réduction de Morse discrète utilisée dans [Skö06] pour réduire la résolution Bar à la résolution d'Anick,

4 - comprendre cette réduction de Morse dans le cas plaxique,

5 - implémenter la résolution d'Anick, ainsi que les méthodes de calcul d'invariants homologiques de ces algèbres que l'on peut obtenir à partir de cette résolution : séries de Hilbert et de Poincaré, nombres de Betti.

Références bibliographiques.

[Ani86] David J. Anick. On the homology of associative algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 296(2) :641–659, 1986.

[Bro92] Kenneth S. Brown. The geometry of rewriting systems : a proof of the Anick-Groves-Squier theorem. In *Algorithms and classification in combinatorial group theory (Berkeley, CA, 1989)*, volume 23 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 137–163. Springer, New York, 1992.

[CGM15] Alan J. Cain, Robert D. Gray, and António Malheiro. Finite Gröbner–Shirshov bases for Plactic algebras and biautomatic structures for Plactic monoids. *J. Algebra*, 423 :37–53, 2015.

[CGM19] Alan J. Cain, Robert D. Gray, and António Malheiro. Crystal monoids & crystal bases : rewriting systems and biautomatic structures for plactic monoids of types A_n, B_n, C_n, D_n, and G_2. *J. Combin. Theory Ser. A*, 162 :406–466, 2019.

[DK13] Vladimir Dotsenko and Anton Khoroshkin. Quillen homology for operads via Gröbner bases. *Doc. Math.*, 18 :707–747, 2013.

[HM17] Nohra Hage and Philippe Malbos. Knuth's coherent presentations of plactic monoids of type A. *Algebr. Represent. Theory*, 20(5) :1259–1288, 2017.

[HM19] Nohra Hage and Philippe Malbos. Coherence of monoids by insertions and Chinese syzygies. preprint, arXiv :1901.09879, February 2019.

[Kob90] Yuji Kobayashi. Complete rewriting systems and homology of monoid algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 65(3) :263–275, 1990.

[Leb16] Victoria Lebed. Plactic monoids : a braided approach. *arXiv e-prints*, page arXiv :1612.05768, Dec 2016.

[Lit96] Peter Littelmann. A plactic algebra for semisimple Lie algebras. *Adv. Math.*, 124(2) :312–331, 1996.

[Lop14] V. Lopatkin. Cohomology Rings of Plactic Monoid Algebra via Gröbner-Shirshov Basis. *ArXiv e-prints*, November 2014.

[LS81] Alain Lascoux and Marcel-P. Schützenberger. Le monoïde plaxique. In *Noncommutative structures in algebra and geometric combinatorics (Naples, 1978)*, volume 109 of *Quad. "Ricerca Sci."*, pages 129–156. CNR, Rome, 1981.

[Skö06] Emil Sköldberg. Morse theory from an algebraic viewpoint. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358(1) :115–129, 2006.

[Squ87] Craig C. Squier. Word problems and a homological finiteness condition for monoids. *J. Pure Appl. Algebra*, 49(1-2) :201–217, 1987.