Sujet de stage - 2015

RÉSOLUTION DE SYSTÈMES POLYNOMIAUX ET PROBLÈMES NON-LINÉAIRES À SYMÉTRIES

Encadrement.

- Philippe Malbos, `malbos@math.univ-lyon1.fr`, Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon, `http://math.univ-lyon1.fr`.

- Fabrice Thouverez, `fabrice.thouverez@ec-lyon.fr`, Laboratoire de tribologie et de dynamique des systèmes, École Centrale de Lyon, `http://ltds.ec-lyon.fr`.

—"—

Sujet.

Ce stage s'inscrit dans un projet de recherche qui vise à développer des méthodes de calcul de solutions exhaustives de systèmes intervant dans l'étude de structures non-linéaires possédant des symétries, [GMT14].

La recherche exhaustive des solutions de systèmes non-linéaires trouve un grand nombre d'applications dans le secteur industriel et pour des applications très variées concernant les matériaux, les vibrations, la thermique... L'enjeu est important car les problèmes non-linéaires sont devenus omniprésents dans la recherche des solutions optimales pour le concepteur, à la fois d'un point de vue du coût énergétique, mais aussi vis-à-vis de la sécurité.

La réponse périodique non-linéaire des structures peut être approchée au travers d'une analyse spectrale qui permet de transformer le problème différentiel en un problème algébrique non-linéaire. Le problème consiste alors à se doter d'une approche analytique ou numérique permettant d'extraire l'ensemble des solutions de ce système. Plusieurs outils sont envisageables qui vont des approches de types homotopies (linéaire, polyhédrale) à des techniques algébriques utilisant les bases de Gröbner.

Les bases de Gröbner permettent de généraliser les algorithmes de divisions polynomiales pour des systèmes à plusieurs indéterminées. En particulier, elles permettent de résoudre des systèmes polynomiaux par élimination progressive des indéterminées. Cette méthode généralise à une situation non-linéaire la méthode d'élimination de Gauss pour les systèmes linéaires.

Cette approche par élimination permet d'obtenir de façon exhaustive les solutions d'un système. Cependant, sa mise en place dans le cadre de systèmes d'assez grande taille et pour des ordres élevés de non-linéarités présente encore des difficultés. Pour franchir cet écueil, un premier axe de recherche pourra être la prise en compte des groupes de symétries propres aux structures envisagées (symétrie de révolution comme les disques ou les cylindres, symétrie cyclique : comme les hélices, les roues aubagées...) en utilisant la méthode développée dans [CGK09]. En effet, les premiers travaux réalisés, jusqu'à maintenant, ont permis de montrer l'efficacité de la prise en compte de ces groupes de symétries dont la mise en place reste une difficulté et devra être adaptée aux différents problèmes traités.

L'objectif de ce stage est de se familiariser avec cette problématique de recherche par la lecture de références introductives aux méthodes mathématiques utilisées [CLO07, Chapitres 1-4], [EM07] ainsi qu'à la problématique des systèmes à symétrie de révolution ou de type cyclique.

Il existe un grand nombre de structures possédant des propriétés de symétrie géométrique comme les cylindres, les disques, les sphères très utilisés en construction mécanique. Si ces éléments possèdent des caractéristiques non-linéaires liées à des frottements ou des grands déplacements (effets non-linéaires géométriques) leurs analyses vibratoires nécessiteront des outils non-linéaires à même de fournir l'ensemble des états vibratoires atteignables.

Un autre type de symétrie, nous intéresse plus particulièrement est celle de type cyclique, [Tho79, Wil79, VO85]. Il s'agit d'une caractéristique géométrique qui se répète de façon identique dans la structure. L'exemple type est l'hélice (la pale se répète) ou encore la roue aubagée (compresseur ou turbine). Ces propriétés de répétabilité pourront être utilisées pour réduire l'espace des solutions. Afin de pouvoir être à même de déterminer l'ensemble de ces solutions la première étape sera de transformer les équations différentielles de la dynamique en un système algébrique non-linéaire via une approche de type Galerkin ou encore appelé méthode d'équilibrage harmonique, [GT12]. Cette étape correspond à la recherche des solutions uniquement de nature périodique. Une fois le système établi, il s'agira au final de déterminer l'ensemble des solutions de système, [SGT11].

—"—

References.

[CGK09] Robert M. Corless, Karin Gatermann, and Ilias S. Kotsireas. Using symmetries in the eigenvalue method for polynomial systems. *J. Symbolic Comput.*, 44(11):1536–1550, 2009.

[CLO07] David Cox, John Little, and Donal O'Shea. *Ideals, varieties, and algorithms*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, third edition, 2007. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.

[EM07] Mohamed Elkadi and Bernard Mourrain. *Introduction à la résolution des systèmes polynomiaux*, volume 59 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer, Berlin, 2007.

[GMT14] Aurelien Grolet, Philippe Malbos, and Fabrice Thouverez. Eigenvalue method with symmetry and vibration analysis of cyclic structures. In *Computer algebra in scientific computing. 16th international workshop, CASC 2014, Warsaw, Poland, September 8–12, 2014. Proceedings*, pages 121–137. Berlin: Springer, 2014.

[GT12] Aurelien Grolet and Fabrice Thouverez. Free and forced vibration analysis of a nonlinear system with cyclic sy mmetry: Application to a simplified model. *Journal of Sound and Vibration*, 331(12):2911 – 2928, 2012.

[SGT11] E. Sarrouy, A. Grolet, and F. Thouverez. Global and bifurcation analysis of a structure with cyclic symmetry. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46(5):727 – 737, 2011.

[Tho79] D. L. Thomas. Dynamics of rotationally periodic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14(1):81–102, 1979.

[VO85] R. Valid and R. Ohayon. Théorie et calcul statique et dynamique des structures à symétries cycliques. *La recherche aérospatiale*, 4:251–263, 1985.

[Wil79] S. J. Wildheim. Excitation of Rotationally Periodic Structures. *Journal of Applied Mechanics*, 46:878–882, 1979.