**Université Claude Bernard - Lyon 1** **29 juin 2022**
Préparation à l'agrégation interne J. Melleray

---

**Dérivation, formules de Taylor, développements limités**

---

## 1.1 Dérivées

Commençons par revoir, sous forme d'exercices guidés, des propriétés classiques des fonctions dérivées. Je prévois de ne pas traiter la plus grande partie (la totalité ?) de ces exercices au tableau : préparez vos questions si nécessaire !

### Définition 1.1

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et $x \in I$. On dit que $f$ est *dérivable* en $x$ si $\lim\limits_{y \to x} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ existe ; dans ce cas on note cette limite $f'(x)$.
On dit que $f$ est dérivable sur $I$ si elle est dérivable en $x$ pour tout $x \in I$.

Notons que, dans la limite ci-dessus, on suppose implicitement que $y \in I$ ; ainsi, si $I = [a, b]$, quand on regarde si $f$ est dérivable en $a$ on ne regarde que des $y \geq a$, tandis que pour la dérivée en $b$ on ne regarde que des $y \leq b$. Cela permet aussi de parler de dérivée à droite ou à gauche en un point.
Une autre façon de reformuler la définition de la dérivée : $f$ est dérivable en $x$ de dérivée $l$ si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon \colon I \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $y \in I$ on ait

$$f(y) = f(x) + l(y - x) + (x - y)\varepsilon(y) \text{ et } \lim_{y \to x} \varepsilon(y) = 0 \ .$$

En particulier, $f(y)$ tend vers $f(x)$ quand $y$ tend vers $x$ : si $f$ est dérivable en $x$ alors elle est nécessairement continue en $x$. La réciproque est fausse : par exemple $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en $0$. Cela dit, elle y admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche, ce n'est donc pas un exemple très convaincant ; en fait, il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui n'ont pas de dérivée à droite, ni à gauche, en tout point de $\mathbb{R}$.

### Exercice 1.2

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $g_n \colon x \mapsto x^n$ (définie sur $\mathbb{R}$ tout entier). Montrer que :

1. Si $n > 0$ alors $g_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $g_n'(x) = nx^{n-1}$.
2. Si $n < 0$ alors $g_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $g_n'(x) = nx^{n-1}$.

Il faut savoir démontrer les formules classiques sur la dérivation d'un produit ou d'une composée.

### Exercice 1.3

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $x \in I$. Montrer que $fg$ est dérivable, et que

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \ .$$

Par conséquent, si $f$ et $g$ sont dérivables sur $I$ alors $fg$ l'est aussi et $(fg)' = f'g + fg'$.

**Exercice 1.4**
Soit $I, J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $g\colon J \to \mathbb{R}$ telle que $g(J) \subseteq J$. Si $x \in J$ est tel que $g$ est dérivable en $x$ et $f$ est dérivable en $g(x)$, alors $f \circ g$ est dérivable en $x$ et on a

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \ .$$

**Exercice 1.5**
Énoncer et démontrer un théorème sur la dérivabilité d'un quotient de deux fonctions.

Parfois, pour décider si une fonction est dérivable en un point, on est obligé de revenir à la définition : considérons par exemple le cas de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Notons que cette fonction est continue en $0$ : comme $\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ pour tout $x > 0$, on a bien

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0) \ .$$

Manifestement, $f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$ et sa dérivée en un point $x \neq 0$ est égale à $f'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Notons que $f'(x)$ n'a pas de limite quand $x$ tend vers $0^+$ (pourquoi ?). Cela ne signifie pas, a priori, que $f$ n'est pas dérivable en $0$ ! Pour décider si elle est dérivable, on forme le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \ .$$

On conclut que $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend vers $0$ quand $x$ tend vers $0$ : $f$ est bien dérivable en $0$, et $f'(0) = 0$. Mais $f'$ n'est pas continue en $0$. Il est important de connaître un exemple de fonction dérivée qui n'est pas continue, comme celui qu'on vient de voir.

## 1.2 Théorème de Rolle et des accroissements finis.

**Exercice 1.6**
Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x$ un extremum local de $f$. Si $f$ est dérivable en $x$ alors on doit avoir $f'(x) = 0$.

Notons par contre que la condition $f'(x) = 0$ n'est pas suffisante pour conclure que $x$ est un extremum local de $f$ ! Par exemple, si on considère la fonction $f\colon x \mapsto x^3$, alors $f'(0) = 0$ mais $0$ n'est pas un extremum local de $f$. Les développements limités, qu'on va revoir plus bas, sont utiles pour étudier le comportement local d'une fonction en un point où $f'(x) = 0$.

**Exercice 1.7 (Théorème de Rolle)**
Soit $a < b$ deux réels, et $f$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
(On pourra essayer de justifier, puis d'utiliser, le fait que, si $f$ n'est pas constante sur $[a, b]$, alors elle doit admettre un extremum local dans $]a, b[$)

**Exercice 1.8 (Égalité des accroissements finis)**
Soit $a < b$ deux réels, et $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \ .$$

(Appliquer le théorème de Rolle à la fonction $g$ définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$)

Notons que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est le coefficient directeur de la droite reliant $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$ (qu'on appelle une *corde* entre deux points du graphe de $f$) tandis que $f'(c)$ est le coefficient directeur de la tangente en $c$. Le théorème des accroissements finis nous dit donc que, étant donné une corde reliant deux points sur le graphe de $f$, on peut trouver quelque part entre ces deux points une tangente au graphe qui est parallèle à la corde en question.
Une application fondamentale de l'égalité des accroissements finis est de nous donner un lien entre signe de la dérivée et sens de variation de la fonction, qui justifie l'utilisation de la dérivée pour dresser des tableaux de variations.

**Exercice 1.9**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors $f$ est croissante sur $I$ si, et seulement si, on a $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ ; et $f$ est décroissante sur $I$ si, et seulement si, on a $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$. De plus, si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ alors $f$ est strictement croissante, et si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ alors $f$ est strictement décroissante.

On voit aussi que si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$ alors $f$ est constante ; et, pour conclure que $f$ est strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$, l'égalité des accroissements finis nous dit qu'il suffit de vérifier que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in ]a, b[$.
Citons une autre conséquence fréquemment utilisée de l'égalité des accroissements finis.

**Exercice 1.10**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si de plus $x \in I$ est tel que $f$ est dérivable sur $I \setminus \{x\}$, et $\displaystyle\lim_{y \to x, y \neq x} f'(y) = l$ existe dans $\mathbb{R}$, alors $f$ est dérivable en $x$ et $f'(x) = l$.

Attention : l'énoncé précédent ne se démontre *pas* en faisant un prolongement par continuité de $f'$ en $x$ !
Souvent, pour étudier des fonctions et calculer des limites, on a besoin d'établir des inégalités. L'égalité des accroissements finis (et sa généralisation, la *formule de Taylor-Lagrange*, qu'on va revoir plus bas) nous fournit une méthode utile.

**Exercice 1.11 (Inégalité des accroissements finis)**
Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et $f$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Si $k = \sup_{c \in ]a,b[} |f'(c)| < +\infty$, alors pour tout $x, y \in [a, b]$ on a $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

**Exercice 1.12**
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|\sin(x)| \leq x$.

Notons que les fonctions dérivées partagent des propriétés des fonctions continues, même si elles ne le sont pas nécessairement (plus haut dans ces notes on a vu un exemple de fonction dérivée dont la dérivée n'était pas une fonction continue).

**Exercice 1.13 (Théorème de Darboux)**
Montrer que les fonctions dérivées satisfont la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires : si $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $I$, alors $f'(I)$ est un intervalle.
(commencer par traiter le cas où il existe $a < b \in I$ tels que $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$ et montrer qu'alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$)

En particulier, si une dérivée ne s'annule pas, elle ne peut pas changer de signe, et la fonction étudiée est strictement monotone. Comme on a vu qu'il existe des fonctions dérivées non continues, le théorème de Darboux nous montre qu'il existe des fonctions non continues qui satisfont la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires.

## 1.3 Comparaison de fonctions

**Définition 1.14**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0$ un point adhérent à $I$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ est *négligeable devant $g$ en $x_0$* si :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in I \ |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \ .$$

On note alors $f = o_{x_0}(g)$.

Quand $x_0$ est clairement précisé, on note simplement $f = o(g)$. Remarquons que, si $g$ ne s'annule pas, alors dire que $f$ est négligeable devant $g$ revient à dire que le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers $0$ quand $x$ tend vers $x_0$. En particulier, la notation $f = o_{x_0}(1)$ signifie simplement que $f(x)$ tend vers $0$ quand $x$ tend vers $x_0$ ! La notation $f = o(g)$ est délicate à manipuler et il faut faire très attention au début ; par exemple, si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$ en $x_0$ alors on a encore $f_1 + f_2 = o(g)$ ! En $0$, on a par exemple $x^2 = x^3 + o(1)$, mais aussi $x^2 = o(1)$, etc.

**Exercice 1.15**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Montrer que $f$ est dérivable en $x_0$, et $f'(x_0) = l$, si et seulement si on peut écrire $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)l + o_{x_0}(x - x_0)$.

**Définition 1.16**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0$ un point adhérent à $I$ et $f, g \colon I \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ est *dominée par* $g$ en $x_0$, et on note $f = O_{x_0}(g)$, si

$$\exists M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M|g(x)|\ .$$

Quand $g$ ne s'annule pas sur $I$, $f = O(g)$ revient à dire que $f/g$ est bornée au voisinage de $x_0$.

**Définition 1.17**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0$ un point adhérent à $I$ et $f, g \colon I \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ est *équivalente à* $g$ en $x_0$, et on note $f \sim_{x_0} g$, s'il existe $\delta > 0$ et une fonction $h \colon I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ telle que $h(x)$ tend vers $1$ lorsque $x$ tend vers $x_0$, et $f(x) = h(x)g(x)$ pour tout $x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Quand $g$ ne s'annule pas, dire que $f \sim_{x_0} g$ revient à dire que $\dfrac{f}{g}(x)$ tend vers $1$ quand $x$ tend vers $x_0$ (et c'est comme ça qu'il faut y penser).

**Exercice 1.18**
Montrer que $f \sim_{x_0} g$ si et seulement si $g \sim_{x_0} f$. Montrer que $f \sim_{x_0} g$ si et seulement si $g = f + o_{x_0}(f)$.

Les équivalents sont particulièrement utiles pour calculer des limites : si $l$ est un réel **non nul**, alors dire que $f \sim_{x_0} l$ revient à dire que $f(x)$ tend vers $l$ quand $x$ tend vers $x_0$. Pourquoi distinguer le cas où $l$ est nul ? Parce que, si $f \sim_{x_0} 0$, alors la définition d'un équivalent impose qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f = 0$ sur $I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, ce qui est bien sur différent de dire que $f$ tend vers $0$ !
La nature multiplicative, et non additive, de la définition des équivalents présente quelques périls : si on peut sans danger multiplier des équivalents, on ne peut en général pas les ajouter (ni les soustraire). Voyons un exemple : soit $f(x) = x$ et $g(x) = -x + x^2$, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$. En $0$, on a $f(x) \sim x$ et $g(x) \sim -x \sim -f(x)$ ; mais puisque $f(x) + g(x) = x^2$, on n'a pas $f(x) + g(x) \sim 0$ !
De la même façon, on ne peut pas composer des équivalents sans faire un minimum attention. Dans le même esprit que ci-dessus, considérons les fonctions $f, g \colon ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$. Alors en $0$ on a $f(x) \sim g(x)$ ; pourtant, $e^{g(x)}$ et $e^{f(x)}$ ne sont pas équivalentes, puisque $e^{g(x)} = e^{1/x} e^{f(x)}$ et $e^{1/x}$ ne tend pas vers $1$ quand $x$ tend vers $0^+$.
On pourrait énoncer un théorème selon lequel on peut composer des équivalents quand les fonctions équivalentes sont "à gauche" de la composition ; mais ce théorème n'est pas très utile en pratique et on préférera composer des développements limités.
Notons que toutes ces définitions ($o$, $O$, $\sim$) auraient aussi un sens en $\pm\infty$ ; c'est un bon exercice d'écrire les définitions correspondantes.

## 1.4 Les formules de Taylor

On a vu que, si $f$ est dérivable en $x_0$, alors on peut écrire $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x) + o(x - x_0)$. Autrement dit, la fonction affine $x \mapsto f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ est une approximation de $f$ en $x_0$ avec une erreur au plus de l'ordre de $x - x_0$. Il est très utile de pouvoir approcher $f$ en $x_0$ avec une meilleure précision par des fonctions polynomiales, et c'est ce que permettent les formules de Taylor.
La première formule de Taylor est celle qui a les hypothèses les plus faibles (et la conclusion aussi la plus faible).

**Théorème 1.19 (Formule de Taylor–Young)**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $f$ une fonction $n-1$ fois dérivable sur $I$ et telle que $f^{(n)}(x_0)$ existe. Alors on a

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \ .$$

En notation plus condensée :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \ .$$

On dira un peu plus bas que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$ est le *développement limité* de $f$ en $x_0$ à l'ordre $n$ (dans ce cas particulier, le développement limité est obtenu en calculant le *polynôme de Taylor* de $f$ à l'ordre $n$), et $f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ est le reste du développement limité ; la formule de Taylor-Young nous permet simplement de dire que le reste du développement limité à l'ordre $n$ est un $o((x-x_0)^n)$.
On ne va pas donner ici la preuve de la formule de Taylor-Young ; pour $n=1$ c'est une simple reformulation de la dérivabilité de $f$ en $x_0$, comme on a déjà eu plusieurs fois l'occasion de le remarquer. La difficulté principale de la preuve est le cas $n=2$, une fois ce cas établi on peut raisonner par récurrence en appliquant la formule de Taylor-Young à l'ordre $n-1$ à $f'$ puis en intégrant (et là on utilise que $f'$ est continue au voisinage de $x$, ce qui n'est pas une conséquence des hypothèses de Taylor–Young dans le cas $n=2$)
Sans insister trop, notons ici une subtilité : admettre un développement limité à l'ordre $1$ en $x_0$ revient, par définition, à être dérivable en $x_0$ ; et la formule de Taylor–Young nous garantit que si $f$ est $n$ fois dérivable en $x_0$ alors elle admet un développement limité à l'ordre $n$ en $x_0$. Mais la réciproque est fausse pour $n \geq 2$ : avoir un développement limité à l'ordre $n$ en $x_0$ ne garantit pas que $f$ soit $n$ fois dérivable en $x_0$, ni même $2$ fois dérivable, comme le montre l'exemple ci-dessous.

**Exercice 1.20**
On fixe $n \geq 2$, et on définit

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\dfrac{1}{x^n}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que $f$ admet un développement limité à l'ordre $n-1$ en $0$, mais n'est pas $2$ fois dérivable en $0$ (on pourra essayer de prouver que $f'$ n'est même pas continue en $0$).

Avec des hypothèses plus fortes sur $f$, on peut avoir une estimation plus précise du reste.

**Théorème 1.21 (Formule de Taylor–Lagrange)**
Soit $a < b$ deux réels, $n \geq 0$, et $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et telle que $f^{(n)}$ soit dérivable sur $]a,b[$ . Alors pour tout $x, x_0 \in [a,b]$ il existe $c \in ]x_0, x[$ tel que l'on ait

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \ .$$

*Démonstration.* Notons que pour $n = 0$ on obtient exactement l'égalité des accroissements finis, et on sait donc déjà que la formule de Taylor-Lagrange est vraie à l'ordre $0$. Pour montrer qu'elle est vraie à un ordre $n > 0$, on va utiliser le théorème de Rolle ; soit donc $f$, $n > 0$, $x_0$ et $x$ comme dans l'énoncé et considérons la fonction auxiliaire $\varphi$ définie sur le segment $[x_0, x]$ par

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \lambda \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} ,$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est choisi de telle façon que $\varphi(x_0) = 0$. On a aussi $\varphi(x) = 0$ par définition de $\varphi$, de plus les hypothèses sur $f$ assurent que $\varphi$ est dérivable sur $]x_0, x[$ et continue sur $[x_0, x]$. On peut donc lui appliquer le théorème de Rolle pour conclure qu'il existe $c \in ]x_0, x[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Cette égalité est équivalente à

$$-\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x-c)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{(k-1)!}(x-c)^{k-1} + \lambda \frac{(x-c)^n}{n!} = 0 .$$

En décalant les indices dans la deuxième somme, ceci revient à

$$-\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x-c)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x-c)^k + \lambda \frac{(x-c)^n}{n!} = 0 .$$

Après simplification, on est donc arrivé à $\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n = \lambda \frac{(x-c)^n}{n!}$, autrement dit $\lambda = f^{(n+1)}(c)$ (notons qu'ici on utilise le fait que $c \neq x$ !). En revenant à la définition de $\lambda$ et au fait que $\varphi(x_0) = 0$ on a obtenu

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k - f^{(n+1)}(c) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 0 ,$$

et on a donc bien démontré la formule de Taylor-Lagrange. □

Et si on renforce encore les hypothèses sur $f$, on obtient même une formule explicite pour le reste.

**Théorème 1.22 (Formule de Taylor avec reste intégral)**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $I$. Alors pour tout $x, x_0 \in I$ on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt .$$

Cette formule est la plus facile à démontrer des trois, une fois qu'on sait manipuler des intégrales sur un segment (en particulier, le théorème fondamental de l'analyse et la formule d'intégration par parties) ; comme on n'a pas encore revu les propriétés de l'intégrale je laisse la preuve de côté.

## 1.5 Développements limités

**Définition 1.23**
Soit $n \in \mathbb{N}$, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ admet un *développement limité* à l'ordre $n$ en $x_0$ s'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(x) = P(x-x_0) + o_{x_0}((x-x_0)^n)$.
On dit alors que $P$ est la *partie régulière* du développement limité, tandis que $f - P$ est appelé le *reste*.

La formule de Taylor-Young nous permet d'assurer que, si $f$ est $n$ fois dérivable en $x_0$, alors $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en $x_0$, et que la partie régulière de ce développement limité est

$$f(x_0) + f'(x_0)X + \frac{f^{(3)}(x_0)}{2}X^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}X^n \ .$$

En particulier, quand $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et qu'on sait calculer la suite des dérivées successives $f^{(n)}(0)$, alors on peut donner les développements limités de $f$ à tout ordre en $0$. On reviendra plus tard sur les calculs pratiques de développements limités et leurs applications, pour l'instant on va développer un peu leurs propriétés théoriques (qui nous permettront de simplifier certains calculs).

**Théorème 1.24**
La partie régulière d'un développement limité est unique. Plus précisément, si $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ sont tels que $P(x-x_0) - Q(x-x_0) = o_{x_0}((x-x_0)^n)$ pour un certain $x_0$ de $\mathbb{R}$, alors $P = Q$.

*Démonstration.* Il suffit de traiter le cas où $x_0 = 0$. Ecrivons $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, et $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$. Alors on a bien sûr

$$P(X) - Q(X) = \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k) X^k \ .$$

Si un des termes $c_k = a_k - b_k$ est différent de $0$, alors on prend le plus petit $k$ tel que cela arrive (appelons-le $k_0$) et on a

$$P(X) - Q(X) = c_{k_0} x^{k_0} \left(1 + \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{c_k}{c_{k_0}} X^{k-k_0}\right) \ .$$

En particulier, on voit que dans ce cas on a $P(x) - Q(x) \sim_0 c_{k_0} x^{k_0}$, et donc $P(x) - Q(x)$ n'est pas négligeable devant $x^n$. Par conséquent, si jamais $P(x) - Q(x) = o_0(x^n)$ alors on doit avoir $P = Q$. $\square$

On voit ainsi que si $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en $x_0$, de partie régulière $P$, alors pour tout $k \leq n$ la partie régulière du développement limité de $f$ en $x_0$ à l'ordre $k$ est obtenue en enlevant de $P$ ses termes de degré $\geq k+1$.

**Théorème 1.25**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $n$ un entier, $x_0 \in I$ et $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ des fonctions admettant des développements limités à l'ordre $n$ en $x_0$ de parties régulières $P, Q$ respectivement. Alors :

1. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en $x_0$, de partie régulière $\lambda P + \mu Q$.
2. $fg$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en $x_0$, de partie régulière obtenue en ne retenant que les termes de degré $\leq n$ du polynôme $P.Q$.

Il est très important que, dans l'énoncé ci-dessus, les développements limités de $f$ et de $g$ sont calculés **au même ordre** !
La démonstration est sans surprise et on se l'épargne ici ; il faut bien comprendre que, pour tout $m > n$, on a $x^m = o(x^n)$ (en $0$)
On peut aussi composer des développements limités, mais bien sûr il faut faire attention aux points où on compose !

**Théorème 1.26**
Soit $I, J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in I$, $g \colon I \to J$ et $f \colon J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $g$ ait un développement limité à l'ordre $n$ en $x_0$ (de partie régulière $Q$) et $f$ ait un développement limité à l'ordre $n$ en $g(x_0)$ (de partie régulière $P$). Alors $f \circ g$ a un développement limité à l'ordre $n$ en $x_0$, dont la partie régulière est le polynôme obtenu en enlevant à $P \circ (Q - Q(0))$ tous ses termes de degré $> n$.

Encore une fois, on ne compose les développements limités que s'ils ont été calculés au même ordre pour $f$ et pour $g$.

*Démonstration.* Si $n = 0$ il s'agit de montrer que $f \circ g$ est continue en $x_0$, ce qu'on sait déjà. Sinon, puisque $g$ admet un développement limité à l'ordre $n \geq 1$ en $x_0$ on a en particulier $g(x) - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$, ce dont on tire que $o_{x_0}((g(x) - g(x_0))^n) = o_{x_0}((x - x_0)^n)$ . De plus, on voit en développant que

$$P(Q(x - x_0) - Q(0) + o((x - x_0)^n)) = P(Q(x - x_0) - Q(0)) + o_{x_0}((x - x_0)^n) \ .$$

Enfin, on a par définition d'un développement limité que $Q(0) = g(x_0)$. Une fois ces informations rassemblées, il nous suffit d'écrire

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= P(g(x) - g(x_0)) + o_{x_0}((g(x) - g(x_0))^n) \\ &= P\left(Q(x - x_0) - Q(0) + o_{x_0}((x - x_0)^n)\right) + o((x - x_0)^n) \\ &= P(Q(x - x_0) - Q(0)) + o_{x_0}((x - x_0)^n) \end{aligned}$$

En notant $R$ le polynôme obtenu en ne retenant que les termes de degré $\leq n$ de $P \circ (Q - Q(0)$, on vient d'arriver à

$$f(g(x)) = R(x - x_0) + o_{x_0}((x - x_0)^n)$$

□

On ne compose presque toujours que des développements limités avec $Q(0) = 0$ et il s'agit simplement de calculer une composée ; l'énoncé du théorème ci-dessus est un peu pénible mais si l'on se force à toujours calculer des développements limités en $0$ (quitte à translater les variables) alors ça ne pose aucun problème en pratique.
Les deux résultats précédents nous disent que les développements limités sont plus faciles à manipuler que les équivalents : comme les équivalents, on peut les multiplier, mais contrairement aux équivalents on peut aussi les ajouter et les composer. La proposition suivante nous dit qu'on peut aussi les intégrer !

**Théorème 1.27**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in I$ et $f$ une fonction dérivable sur $I$ telle que $f'$ soit continue et ait un développement limité à l'ordre $n$ en $x_0$, de partie régulière $P$. Alors $f$ a un développement limité à l'ordre $n + 1$ en $x_0$, dont la partie régulière est la primitive $Q$ de $P$ telle que $Q(0) = f(x_0)$.

On s'épargne de nouveau la preuve (qui nécessite d'intégrer un reste, comme dans la preuve de la formule de Taylor-Young).
Par contre, *on ne peut pas en général dériver un développement limité* : il peut arriver que $f$ ait un développement limité à l'ordre $n$ en $0$, mais que $f'$ n'ait pas de développement limité à l'ordre $n - 1$ en $0$... Pouvez-vous donner un exemple de ce phénomène, en utilisant un des exercices précédents ?

## 1.6 Les développements limités classiques

Ci-dessous on ne va écrire que dans développements limités en $0$ (et on écrira $o(x^n)$ au lieu de $o_0(x^n)$) ; en général si on calcule un développement limité de $f$ en $x_0 \neq 0$ il est souvent plus pratique de poser $x = x_0 + h$ et de se ramener à un développement limité de $h \mapsto f(x_0 + h)$ en $0$.
Puisque on a $\exp'(x) = \exp(x)$, on a immédiatement $\exp^{(n)}(0) = 1$, et la formule de Taylor-Young nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \ .$$

Pour les fonctions trigonométriques, c'est à peine plus difficile : on a $\sin'(x) = \cos(x)$, et $\cos'(x) = -\sin(x)$, ce dont on déduit les formules

$$\forall n \in \mathbb{N} \sin^{(2n)}(0) = 0 \text{ et } \sin^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \ .$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \cos^{(2n)}(0) = (-1)^n \text{ et } \cos^{(2n+1)}(0) = 0 \ .$$

La formule de Taylor-Young nous donne alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \ ;$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n}) \ ;$$

On voit ci-dessus que, dans le développement limité de $\cos$, n'apparaissent que des termes pairs, et dans celui de $\sin$ que des termes impairs. La raison en est explicitée dans la proposition suivante.

**Théorème 1.28**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ centré en $0$, et $f \colon I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité à l'ordre $n$ en $0$, de partie régulière $P$. Si $f$ est paire, alors tous les coefficients de degré impair de $P$ sont nuls ; et si $f$ est impaire alors tous les coefficients de degré pair de $P$ sont nuls.

*Démonstration.* C'est une conséquence de l'unicité de la partie régulière d'un développement limité. De l'égalité $f(x) = P(x) + o(x^n)$ on déduit que $f(-x) = P(-x) + o((-x)^n) = P(-x) + o(x^n)$. Si $f(x) = f(-x)$, alors $P(X)$ et $P(-X)$ sont donc tous les deux des parties régulières du développement limité de $f$ à l'ordre $n$ en $0$, d'où $P(X) = P(-X)$, et $P$ n'a que de coefficients de degré pair. De même si $f(x) = -f(-x)$ on déduit que $P(X) = -P(-X)$ et $P$ n'a que des coefficients d'ordre impair. □

Continuons notre liste de développements limités ; par la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique, on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} + o(x^n) \ .$$

Autrement dit, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \frac{1}{1 - x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \ .$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \frac{1}{1 + x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) \ .$$

En intégrant, on obtient

$$-\ln(1-x) = \ln(1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}) \ , \text{ et donc}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \ .$$

De même,

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n)$$

De même, à partir de $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$, on obtient en intégrant que

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \ .$$

Voyons une dernière formule à connaître : pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on vérifie par récurrence que, pour $n \geq 1$, la dérivée $n$-ième de $f_\alpha \colon x \mapsto (1+x)^\alpha$ est égale à $\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n-1)(1+x)^{\alpha-n}$. En particulier, pour $n \geq 1$ on a $f_\alpha^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n-1)$, et la formule de Taylor-Young nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \ldots + \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n-1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n) \ .$$

Récapitulons tous les développements que nous venons d'obtenir :

- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$ .
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$ .
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ .
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$ .
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$ .
- $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$ .
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha.x + \ldots + \alpha.(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ (valable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$).

Les résultats ci-dessus ont été obtenus à partir de la formule de Taylor-Young ; **en général, c'est une mauvaise idée de calculer un développement limité à l'ordre $n$ en calculant $n$ dérivées successives de $f$, car c'est beaucoup trop lourd en calcul**.
On préférera si possible déduire les développements limités à partir des développements classiques ci-dessus (à connaître ou à savoir retrouver très vite) et les méthodes de calcul : produit, composition, intégration... Pour les développements limités des quotients, on peut soit raisonner par composition comme on va le voir ci-dessous, soit appliquer la méthode des *divisions par puissances croissantes* qu'on va aussi se contenter d'illustrer sur des exemples.

## 1.7 Exemples de calculs de développements limités

Commençons par utiliser trois méthodes différentes pour calculer le développement limité de $\tan$ en $0$ à l'ordre $5$.

*Première méthode* : la division selon les puissances croissantes, qui ressemble à une division euclidienne, sauf qu'on fait en sorte d'éliminer successivement les termes de plus bas degré.
On commence par écrire

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} \; .$$

Puis on utilise la méthode de division par les puissances croissantes :

$$\begin{array}{cccccccc|l}
 & x & - & \frac{x^3}{6} & + & \frac{x^5}{120} & + & o(x^5) & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \\ \cline{9-9}
- & x & + & \frac{x^3}{2} & - & \frac{x^5}{24} & + & o(x^5) & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 \\ \cline{1-8}
 & & & \frac{x^3}{3} & - & \frac{x^5}{30} & + & o(x^5) & \\
 & & - & \frac{x^3}{3} & + & \frac{x^5}{6} & + & o(x^5) & \\ \cline{3-8}
 & & & & & \frac{2}{15}x^5 & + & o(x^5) &
\end{array}$$

On a donc obtenu la relation

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) = (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24})(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5) + o(x^5) \; ,$$

qui nous donne finalement $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

*Deuxième méthode* : par composition, en utilisant le développement limité de $\dfrac{1}{1-u}$ (ci-dessous, les termes en gris clair sont ceux qu'on aurait pu se passer d'écrire, puisqu'ils font apparaître des termes de degré $> 5$).

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} \\
&= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}}{1 - (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24})} + o(x^5) \\
&= (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120})(1 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}) + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24})^2 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24})^3 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24})^4 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24})^5) + o(x^5) \\
&= (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120})(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}) + o(x^5) \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \; .
\end{aligned}$$

(Note : dans la dernière ligne, on n'a de nouveau pas fait apparaître les termes de degré $> 5$, puisque ce sont tous des $o(x^5)$)

*Troisième méthode* : en utilisant une équation différentielle. On a $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$. En écrivant le développement de $\tan'$ en $0$ à l'ordre $4$ sous la forme $a + bx^2 + cx^4 + o(x^4)$ (il n'y pas de termes d'ordre impair : $\tan$ est impaire, donc $\tan'$ est paire), le fait que $\tan(0) = 0$ et le théorème d'intégration des développements limités nous donnent que le développement limité de $\tan$ en $0$ à l'ordre $5$ est de la forme $a\tan(x) = x + b\dfrac{x^3}{3} + c\dfrac{x^5}{5} + o(x^5)$.
La formule $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ nous donne alors (par composition) :

$$a + bx^2 + cx^4 + o(x^4) = 1 + (ax + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^5}{5})^2 + o(x^4) \ .$$

Autrement dit, on a

$$a + bx^2 + cx^4 + o(x^4) = 1 + a^2x^2 + \frac{2ab}{3}x^4 + \frac{b^2}{9}x^6 + o(x^4)$$

Le théorème d'unicité des développements limités nous permet d'identifier les deux développements terme à terme : ceci donne $a = 1$, $b = a^2 = 1$, et $c = \dfrac{2ab}{3} = \dfrac{2}{3}$. En reportant cela dans la formule donnant le développement de $\tan$ à l'ordre $5$ en $0$ en fonction de $a, b, c$, on obtient de nouveau $\tan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

Voyons brièvement deux autres exemples. Si l'on veut calculer le développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{1 - \sin(x)}$ à l'ordre $3$ en $0$, on peut utiliser la méthode de composition (en évitant de faire intervenir dans le calcul des termes de trop haut degré, comme on l'a fait pour la tangente) :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\sin(x)} &= \frac{1}{1 - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\
&= 1 + (x - \frac{x^3}{6}) + x^2 + x^3 + o(x^3) \\
&= 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3) \ .
\end{aligned}$$

A la deuxième ligne ci-dessus, on n'a pas pris la peine d'écrire les « $\dfrac{x^3}{6}$ » quand on a composé après l'ordre $2$ : dans le développement, ils auraient contribué des termes négligeables devant $x^3$. C'est un bon exercice d'essayer de retrouver ce résultat en utilisant la méthode de division par puissances croissantes...
De même, calculons le développement limité à l'ordre $2$ en $0$ de $\sqrt{\cos(x)}$ :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\cos(x)} &= \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \\
&= 1 + \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2}) + o(x^2) \\
&= 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2) \ .
\end{aligned}$$

Attention, on ne calcule pas des développements limités seulement en $0$ ! Par exemple, essayons de développer $x \mapsto e^x$ à l'ordre $3$ en $1$. On écrit $x = 1 + h$, et on se ramène à développer $h \mapsto 1 + h$ à l'ordre $3$ en $0$, ce qui nous amène au calcul suivant :

$$\begin{aligned}
e^{1+h} &= e.e^h \\
&= e(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o(h^3)) \ .
\end{aligned}$$

En revenant à la relation $h = x - 1$, on a obtenu le développement limité $e^x = e(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6}) + o((x-1)^3)$.

## 1.8 Quelques exercices issus des archives de la préparation

### 1.8.1 Mise en jambes

| | |
|---|---|
| $1 + x + 3x^2$, ordre $4$ en $0$, | $1 + x + 3x^2$, ordre $4$ en $1$, |
| $\ln(x)$, ordre $2$ en $0$, | $\ln(x)$, ordre $2$ en $1$, |
| $\ln(1+x).\cos(x)$, ordre $4$ en $0$, | $(e^{x^2} - 1)x\sin(x)$, ordre $7$ en $0$, |
| $\ln(\cos(x))$, ordre $5$ en $0$, | $\cos(\sqrt{1+x})$, ordre $1$ en $0$, |
| $(1 + \mathrm{ch}(x))^{-1}$, ordre $4$ en $0$, | $\sin(x)$, ordre $5$ en $\pi/6$, |
| $\tan(x)$, ordre $5$ en $0$, | $\tan^2(x)$, ordre $5$ en $0$. |

### 1.8.2 Un rien plus dur

| | |
|---|---|
| $\sqrt{\tan(x)}$, ordre $3$ en $\pi/4$, | $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}}$, ordre $2$ en $0$, |
| $\frac{\ln(1+x)}{1+2x}$, ordre $4$ en $0$, | $\tan^3(x).((\cos x)^{x^2} - 1)$, ordre $10$ en $0$, |
| $(\tan(x))^{\cos(2x)}$, ordre $4$ en $\pi/4$, | $\ln(\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}))$, ordre $8$ en $0$, |
| $\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\cos(x)}$, ordre $5$ en $0$, | $(\sin(x))^x$, ordre $4$ en $\pi/2$, |
| $\frac{x}{e^x - 1}$, ordre $4$ en $0$, | $\sqrt{x(e^x - 1)}$, ordre $3$ en $0$, |
| $\frac{x^2 - x}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}$, ordre $2$ en $1$, | $\tan(\sin(x)) - \sin(\tan(x))$, ordre $7$ en $0$, |
| $\frac{e^{\sqrt{1+\sin(x)}} - e}{\tan(x)}$, ordre $3$ en $0$, | $\frac{1}{\tan(x)} - \frac{1}{x}$, ordre $5$ en $0$. |

### 1.8.3 Calcul de limites

| | |
|---|---|
| $\frac{\sqrt{1+2x+3x^2} - \sqrt[3]{1+3x+2x^2}}{x^2}$ en $0$, | $(1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$ en $0$, |
| $\frac{x^a - a^x}{x - a}$ en $a$, | $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\ln(x) - \ln(a)}$ en $a$, |
| $\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ en $0$, | $\frac{1}{1 - \cos(x)} - \frac{1}{1 - \cos(\pi x)}$ en $0$, |
| $\frac{x^x - x}{1 - x + \ln(x)}$ en $1$, | $\frac{e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)}}{\sin(x) - \tan(x)}$ en $0$, |
| $(2^x + 3^x - 12)^{\tan\frac{\pi x}{4}}$ en $2$, | $\frac{\sin(x)}{x}$ en $0$. |

### 1.8.4 Encore des limites, mais en $+\infty$

| | |
|---|---|
| $x^{\frac{x+1}{x}} - (x-1)^{\frac{x}{x-1}}$ | $\frac{x^{1515} + \sqrt{x}e^x - 1789\ln(x)}{(\sqrt{x^3 + x^2} - \sqrt{x^3})\mathrm{ch}(x)}$ |
| $\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$ | $\left(\frac{2^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}} + 5^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x$ |

### 1.8.5 Équivalent pour une suite récurrente

On fixe un réel $u_0 \in ]0, \pi[$, et on pose : $u_{n+1} = \sin u_n$.

1. Montrer que la suite $u_n$ est à valeurs dans $[0, 1]$, décroissante et donc convergente. Quelle est sa limite ?

   On voudrait calculer un équivalent de $u_n$.
2. Déterminer un réel $\alpha > 0$ tel que $(\sin(x))^{-\alpha} - x^{-\alpha}$ possède une limite $\ell$ finie et non nulle lorsque $x$ tend vers $0$. Calculer $\ell$.
3. On pose $w_n = u_n^{-\alpha}$. Vérifier que la suite $(w_{n+1} - w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$.
4. Déterminer un équivalent de $w_n$ au voisinage de l'infini. (On ((re)démontrera et on) appliquera le théorème de Cesàro : si $\lim_{n\to\infty} z_n = \ell$, alors $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} z_n = \ell$.)
5. Déterminer un équivalent de $u_n$ au voisinage de l'infini.

Pour pousser cette idée plus loin, on peut regarder l'exercice d'Analystan où cette suite est étudiée plus en détail (on vient de traiter les deux premières questions).

### 1.8.6 Irrationnalité de $\cos(1)$

1. Écrire la formule de Taylor-Lagrange entre $0$ et $1$ pour la fonction cosinus à l'ordre $2n + 1$ (pour $n$ entier naturel quelconque).

   On suppose que $\cos 1$ est rationnel, disons $\cos 1 = p/q$ avec $p$ et $q$ entiers non nuls. On choisit $n$ de sorte que $2n + 2 \geq q$.
2. Démontrer que le cosinus qui apparaît dans la formule de Taylor précédente est un entier.
3. Conclure que $\cos(1)$ est irrationnel.