
Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1.

Soit (X, d) un espace métrique, et $A \subset X$. Montrer que A est relativement compact dans X si, et seulement si, de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite qui converge dans X .

Exercice 2. Divers résultats liés à la compacité

1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle bornée. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.
2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie tel que $F \neq E$.
 - (a) Soit $x \in E$. Justifier que $x \in F$ si et seulement si $d(x, F) = 0$.
 - (b) Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $y \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - y\|$.
 - (c) Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $d(u, F) = 1$.
3. Soit $d \in \mathbf{N}^*$. Soit $f: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$. Montrer que f admet un minimum.
4. Soit $d \in \mathbf{N}^*$. Soit $f: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} 0$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbf{R}^d$.

Exercice 3. Théorème de Riesz

Dans cet exercice on fixe un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$. On propose deux preuves du résultat suivant : si $B_f(0, 1)$ est compacte alors X est de dimension finie.

1. *Première preuve.* On suppose que X n'est pas de dimension finie.
 - (a) En utilisant le résultat montré à la question 2.(c) de l'exercice 2, construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de X tels que $\|x_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, et $\|x_n - x_m\| \geq 1$ pour tout $n \neq m \in \mathbf{N}$.
 - (b) Montrer que la boule unité fermée de $(X, \|\cdot\|)$ n'est pas compacte.
2. *Deuxième preuve.* On suppose que $B_f(0, 1)$ est compacte.
 - (a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbf{N}^*$ et $x_1, \dots, x_N \in X$ tels que $B_f(0, 1) \subset \bigcup_{j=1}^N B\left(x_j, \frac{1}{2}\right)$.
On note $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_N)$.
 - (b) Soit $y \in B_f(0, 1)$. Construire une suite $(y_k)_{k \in \mathbf{N}}$ d'éléments de F telle que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\|y - y_k\| \leq \frac{1}{2^k}$.
 - (c) Montrer que $X = F$.
3. On suppose qu'il existe $a \in X$ et $r > 0$ tels que $B_f(a, r)$ soit compacte. Montrer que X est de dimension finie.
4. Montrer que si X est de dimension infinie alors les compacts de X sont d'intérieur vide.

Exercice 4. Soit (X, d) un espace métrique.

On dit que X est *précompact* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbf{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in X$ tels que $X = \bigcup_{j=1}^n B(x_j, \varepsilon)$.

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. (X, d) est compact.
2. (X, d) est à la fois complet et précompact.

Indication. Montrer que dans un espace précompact toute suite admet une sous-suite de Cauchy.

Exercice 5. Montrer que tout espace métrique compact est séparable.

Indication. Utiliser la précompacité.

Exercice 6. Théorème de Dini.

Soit (X, d) un espace métrique compact, et $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues de X dans $\mathbf{R}$. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement vers 0, et que pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers 0.

Indication. Vous pouvez essayer deux types de preuves :

1. Considérer, à $\varepsilon > 0$ fixé, les ouverts $U_n = \{x \in X : f_n(x) < \varepsilon\}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ (ou les fermés $F_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \varepsilon\}$).
2. Justifier et utiliser que pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n atteint son maximum en un point x_n , que la suite $(x_n)_n$ est dans le compact X ...

Exercice 7. Soit X, Y deux espaces métriques et $f: X \rightarrow Y$ une fonction.

1. *Préliminaire.* Montrer que si $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de X qui converge vers $x \in X$ alors $K = \{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{x\}$ est compact dans X .
2. Montrer que f est continue si, et seulement si, la restriction $f|_K$ est continue pour tout compact $K \subseteq X$.
3. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de fonctions continues qui converge vers f uniformément sur les compacts. Montrer que f est continue.

Exercice 8. Autour du théorème de Weierstrass

1. L'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est-il dense dans $\mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$?
2. Soit $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et paire (resp. impaire). Montrer qu'il existe une suite de fonctions polynomiales paires (resp. impaires) qui converge uniformément vers f sur $[-1, 1]$.
3. Montrer que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace des fonctions continues et 2π -périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Exercice 9. Théorème de Stone–Weierstrass

Dans cet exercice, on fixe un espace métrique compact (X, d) , ainsi qu'un sous-espace vectoriel $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ avec les propriétés suivantes :

- Pour tout $f, g \in \mathcal{A}$ leur produit fg appartient aussi à $\mathcal{A}$.
- Les fonctions constantes appartiennent à $\mathcal{A}$.
- Pour tout $x \neq y \in X$, il existe $f \in \mathcal{A}$ tel que $f(x) \neq f(y)$.

L'objectif de l'exercice est de démontrer que $\mathcal{A}$ est dense dans $(\mathcal{C}(X, \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

1. *Première étape.* $\overline{\mathcal{A}}$ est stable par passage à la valeur absolue.
 - (a) Montrer que si $f \in \mathcal{A}$ alors $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$.
 - (b) En déduire que si $f \in \overline{\mathcal{A}}$ alors $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$.
 - (c) Montrer que si $f, g \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ on a $\max(f, g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$; donner une formule analogue pour $\min(f, g)$.
 - (d) Montrer que si $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$ alors $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ appartiennent à $\overline{\mathcal{A}}$.
2. *Deuxième étape.* Soit $x_1 \neq x_2 \in X$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x_1) = \alpha_1$ et $f(x_2) = \alpha_2$.
3. *Troisième étape.* On fixe $g \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ et $\varepsilon > 0$.
 - (a) Soit $x \in X$. Pour tout $y \in X$ on fixe $f_y \in \mathcal{A}$ telle que $f_y(x) = g(x)$ et $f_y(y) = g(y)$.
Montrer, à l'aide de la propriété de Borel–Lebesgue, qu'il existe $y_1, \dots, y_n \in X$ tels que pour tout $z \in X$ il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $f_{y_i}(z) > g(z) - \varepsilon$.
Indication. Considérer les ouverts $U_y = \{z : f_y(z) > g(z) - \varepsilon\}$.
On pose $h_x = \max(f_{y_1}, \dots, f_{y_n})$.
 - (b) Montrer que $h_x \in \overline{\mathcal{A}}$, $h_x(x) = g(x)$ et que pour tout $z \in X$ on a $h_x(z) > g(z) - \varepsilon$.
 - (c) En utilisant une idée similaire à celle qui nous a permis de construire les h_x , montrer qu'il existe $h \in \overline{\mathcal{A}}$ telle que pour tout $x \in X$ on ait $g(x) - \varepsilon < h(x) < g(x) + \varepsilon$.

Exercice 10.

1. Soit $\mathbf{D}$ le disque unité fermé de $\mathbf{C}$. Les fonctions polynomiales sont-elles denses dans $\mathcal{C}(\mathbf{D}, \mathbf{C})$?
2. Énoncer et démontrer un analogue du théorème de Stone–Weierstrass, valide pour des fonctions définies sur $\mathbf{D}$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$.

Exercice 11. Prolongement des fonctions continues sur un compact

Soit (X, d) un espace métrique et $K \subset X$ une partie compacte non vide. On note $\mathcal{C}_b(X)$ l'espace des fonctions continues bornées sur X , à valeurs réelles, muni de $\|\cdot\|_\infty$. On note $\mathcal{C}(K)$ l'espace des fonctions continues sur K , à valeurs réelles, qu'on munit également de $\|\cdot\|_\infty$.

On considère l'application $\Phi: \mathcal{C}_b(X) \rightarrow \mathcal{C}(K)$ qui à $f \in \mathcal{C}_b(X)$ associe sa restriction à K .

1. Montrer que Φ est continue et déterminer sa norme subordonnée.
2. Soit $f \in \mathcal{C}_b(X)$. Montrer qu'il existe $\tilde{f} \in \mathcal{C}_b(X)$ telle que $\Phi(\tilde{f}) = \Phi(f)$ et $\|\tilde{f}\|_\infty = \|\Phi(f)\|_\infty$.
Indication. On pourra utiliser une fonction de "troncature" : $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(t) = 1$ si $|t| \geq 1$, $g(t) = |t|$ sinon.
3. Montrer que pour tout $x \in X$, $y \mapsto \min(d(x, y), 1)$ est un élément de $\mathcal{C}_b(X)$.
4. À l'aide du théorème de Stone–Weierstrass, démontrer que $\text{Im}(\Phi)$ est dense dans $\mathcal{C}(K)$.
5. Montrer que $(\text{Im}(\Phi), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.
Indication. Considérer une série absolument convergente $\sum_n \Phi(f_n)$ dans $\text{Im}(\Phi)$; justifier et exploiter le fait que $\sum_n \tilde{f}_n$ est aussi absolument convergente.
6. Montrer que toute $f \in \mathcal{C}(K)$ admet un prolongement continu $g \in \mathcal{C}_b(X)$ tel que $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$.

Exercice 12.

1. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$. On suppose que $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et qu'il existe une constante M telle que $\|f'_n\|_\infty \leq M$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
Montrer qu'il existe une sous-suite de $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui converge uniformément.
2. Soit $w: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Soit F l'ensemble des fonctions 1-lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ telles que $f(0) = f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $f \in F$ telle que

$$\int_0^1 f(t)w(t) dt = \sup \left\{ \int_0^1 g(t)w(t) dt : g \in F \right\}.$$

Exercice 13. Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue à support compact différente de la fonction nulle.

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$ on pose $f_n(x) = f(x + n)$. Montrer que :

1. La famille $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est uniformément équicontinue.
2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$ $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ est relativement compact.
3. La suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ n'admet pas de sous-suite convergente dans $(\mathcal{C}_b(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.