

Feuille d'exercices n° 3 : théorème d'Ascoli, espaces de Hilbert.

Exercice 1.

1. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$. On suppose que $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et qu'il existe une constante M telle que $\|f'_n\|_\infty \leq M$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
Montrer qu'il existe une sous-suite de $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui converge uniformément.
2. Soit F l'ensemble des fonctions 1-lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ telles que $f(0) = f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $f \in F$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = \sup \left\{ \int_0^1 g(t) dt : g \in F \right\}$.

Exercice 2. Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue à support compact différente de la fonction nulle. Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$ on pose $f_n(x) = f(x + n)$. Montrer que :

1. La famille $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est équicontinue.
2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$ $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ est relativement compact.
3. La suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ n'admet pas de sous-suite convergente dans $(C_b(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 3. Dans cet exercice on note $H = (L^2([0, 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_2)$. Pour $f \in H$ et $x \in [0, 1]$ on pose

$$T(f)(x) = \int_0^x f(u) du$$

1. Montrer que $T: H \rightarrow H$ est bien définie, continue, et que l'image de T est contenue dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$.
2. On note B la boule unité fermée de H . Montrer que $T(B)$ est relativement compact dans H (on pourra commencer par essayer de montrer que $T(B)$ est relativement compact dans $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$).

Exercice 4. *Identité du parallélogramme et ses conséquences.*

Soit H un espace de Hilbert.

1. Montrer l'égalité suivante, dite *identité du parallélogramme* (pourquoi?), valable pour $x, y \in H$:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

2. (a) Soit $x, y \in H$. Montrer que pour $z \in H$ on a $(\|z - x\| = \|z - y\| = \frac{\|x - y\|}{2}) \Leftrightarrow (z = \frac{x + y}{2})$.
(b) Soit $f: H \rightarrow H$ une isométrie telle que $f(0) = 0$. Montrer que f est $\mathbf{R}$ -linéaire.
3. Montrer que H est *strictement convexe*, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in H \quad (\|x\| \leq 1 \text{ et } \|y\| \leq 1 \text{ et } \|x - y\| \geq \delta) \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \varepsilon$$

Donnez un exemple d'espace de Banach qui n'est pas strictement convexe.

Exercice 5. *Autour du théorème de projection sur un convexe fermé.*

Soit H un espace de Hilbert réel.

1. Soit $a < b$ deux réels. Dans l'espace de Hilbert $H = L^2([0, 1], \mathbf{R})$, on considère le sous-ensemble

$$C = \{f \in L^2([0, 1]) : a \leq f \leq b \text{ presque partout}\}.$$

Vérifier que C est convexe et fermé, et déterminer $P_C(g)$ pour $g \in H$.

2. Supposons que H admette une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$, et posons $F = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) e_n : n \in \mathbf{N} \right\}$.
Montrer que F est fermé. Est-ce que 0 admet une projection sur F ?
3. Soit $E \neq H$ un sous-espace vectoriel dense de H (pouvez-vous donner un exemple?), et $z \in H \setminus E$.
On définit

$$F = \{e \in E : \langle e, z \rangle = 0\}.$$

- (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel fermé de E , et que $F \neq E$.
- (b) Soit $e \in E \setminus F$. Montrer que e n'admet pas de projection orthogonale sur F .

Indication. Commencer par montrer que F est dense dans $(\mathbf{R}z)^\perp$.

Exercice 6. Soit E, F deux sous-espaces vectoriels fermés d'un espace de Hilbert H .

Montrer que $(E + F)^\perp = E^\perp \cap F^\perp$ et que $(E \cap F)^\perp = \overline{E^\perp + F^\perp}$.

Exercice 7.

Soit H un espace de Hilbert réel et $P: H \rightarrow H$ une application linéaire continue non nulle telle que $P^2 = P$. Soit E l'image de P . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. P est la projection orthogonale sur E .
2. $\|P\| = 1$.
3. $\forall x \in H \quad \langle P(x), x \rangle \leq \|x\|^2$.
(pour la dernière implication, considérer $\langle P(x + ty), x + ty \rangle$ où $x \in \text{Im}(P)$, $y \in \text{Im}(P)^\perp$)

Exercice 8.

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1])$ muni du produit scalaire de $L^2([0, 1])$, et de la norme associée. Pour $a \in]0, 1[$ on note F_a l'ensemble des éléments de E qui sont nuls sur $[0, a]$.

1. Montrer que F_a est fermé dans E et déterminer $F_a^\perp$.
2. Montrer que $F_a \oplus F_a^\perp \neq E$.
3. Expliquer.

Exercice 9. Soit H, H' deux espaces de Hilbert séparables, de dimension infinie. Montrer qu'il existe une isométrie linéaire T de H sur H' .

Indication. Exploiter le fait que H et H' admettent chacun une base hilbertienne dénombrable.

Exercice 10. *Opérateur adjoint.*

Soit H un espace de Hilbert réel et $T: H \rightarrow H$ une application linéaire continue. On rappelle que l'adjoint de T , noté T^* , est l'unique élément de $\mathcal{L}(H, H)$ tel que, pour tout $x, y \in H$, on ait $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$.

1. Montrer que $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y \rangle| : x, y \in H, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$.
2. Montrer que $\|T^*\| = \|T\|$ et que $(T^*)^* = T$.
3. Soit $P: H \rightarrow H$ un projecteur. Montrer que $\text{Im}(P)$ est fermé, puis que P est la projection orthogonale sur $\text{Im}(P)$ si, et seulement si, $P^* = P$ (on dit alors que P est *autoadjoint*).
4. Montrer que $\ker(T) = \text{Im}(T^*)^\perp$ et $\overline{\text{Im}(T)} = \ker(T^*)^\perp$.
5. On suppose que $T = T^*$. Montrer que

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\}.$$

6. On suppose à nouveau que $T^* = T$.
(a) On dit que T est *positif* si $\langle T(x), x \rangle \geq 0$ pour tout x . Montrer que dans ce cas on a

$$\forall x, y \in H \quad \langle T(x), y \rangle^2 \leq \langle T(x), x \rangle \langle T(y), y \rangle$$

puis que $\ker(T) = \{x \in H : \langle T(x), x \rangle = 0\}$.

- (b) Montrer que s'il existe $x_0 \in H$ tel que $\|x_0\| = 1$ et $\langle T(x_0), x_0 \rangle = \|T\|$ alors x_0 est un vecteur propre de T pour la valeur propre $\|T\|$.

Indication. Commencer par établir que $\|T\|\text{Id} - T$ est autoadjoint positif.

- (c) Montrer que si H est de dimension finie alors T est diagonalisable dans une base orthonormale (on a ainsi retrouvé le théorème spectral).

7. Soit $H = L^2([0, 1])$, et T défini par

$$\forall f \in H \quad \forall t \in [0, 1] \quad T(f)(t) = tf(t).$$

Montrer que T est continu, autoadjoint et n'admet pas de valeur propre.