
Feuille d'exercices n° 3 : compléments

Exercice 1. *Espaces de Hilbert : de* **C** *vers* **R**.
Soit H un espace de Hilbert complexe ; on le voit comme un **R**-espace vectoriel, et on le munit de la forme bilinéaire $b\colon (x,y) \mapsto \mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)$.

1. Montrer que $\widetilde{H} = (H,b)$ est un espace de Hilbert réel.
2. Donner une formule permettant de retrouver le produit scalaire de H à partir de b.
3. Comment produire une base orthonormée de $\widetilde{H}$ à partir d'une base orthonormée de H ?

Exercice 2. *Espaces de Hilbert : de* **R** *vers* **C**.
Soit H un espace de Hilbert réel ; on considère l'espace $\tilde{H} = H \times H$, et on le munit d'une structure de **C**-espace vectoriel en convenant que $i(a,b) = (-b,a)$ (et en étendant les opérations pour respecter les axiomes des **C**-espaces vectoriels). On définit une forme sesquilinéaire b sur $\tilde{H}$ en posant

$$b((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \langle x_1,x_2\rangle + \langle y_1,y_2\rangle + i\langle y_1,x_2\rangle - i\langle x_1,y_2\rangle$$

Montrer que $(\tilde{H},b)$ est un espace de Hilbert complexe.
Comment produire une base orthonormée de $\tilde{H}$ à partir d'une base orthonormée de H ?

Exercice 3. *Une réciproque de l'identité du parallélogramme.*

1. Soit $(X,\|\cdot\|)$ un espace de Banach réel tel que l'identité (**??**) soit satisfaite pour tous x,y dans X. Montrer que X est un espace de Hilbert (c'est-à-dire que la norme de X provient d'un produit scalaire).
   Indication. Considérer la fonction $B : (x,y) \mapsto \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$ et montrer que $B(x,y) = B(y,x)$, $B(x,-y) = -B(x,y)$ et $B(x+y,z) = B(x,z) + B(y,z)$ — pour ce dernier point appliquer (**??**) à (x,y), $(x+z,y+z)$ et $(x+y+z,z)$.
2. Montrer le même résultat pour un espace de Banach complexe.

Exercice 4. *Théorème ergodique de von Neumann.*
Soit $T : H \to H$ une application linéaire vérifiant $|||T||| \leqslant 1$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $S_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k$. On veut montrer que pour tout $x \in H$,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = P(x)$$

où P désigne le projecteur orthogonal sur le sous-espace $\ker(\mathrm{Id} - T)$.

1. Montrer que $\ker(\mathrm{Id}-T) = \ker(\mathrm{Id}-T^*)$, et en déduire que $H = \ker(\mathrm{Id}-T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-T)}$.
2. Montrer que $S_n(x)$ tend vers 0 pour $x \in \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-T)}$.
3. Conclure.
4. Est-il vrai que $\lim_{n\to\infty} |||S_n - P||| = 0$?

Application. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction mesurable bornée 2π-périodique et $\alpha \in \mathbf{R}\backslash 2\pi\mathbf{Q}$. Déterminer la limite dans $L^2([0,2\pi])$ de la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x+k\alpha).$$

<u>Exercice 5.</u> *Une preuve hilbertienne d'un théorème de P. Neumann.*
Dans cet exercice, on considère un groupe Γ agissant sur $\mathbf{N}$ (par permutations). On suppose que pour tout $x \in \mathbf{N}$ sa Γ-orbite est infinie ; on fixe A, B deux parties finies de $\mathbf{N}$, et on souhaite prouver qu'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma(A) \cap B = \varnothing$. On travaille dans $\ell^2(\mathbf{N})$; on note $(e_i)_{i \in \mathbf{N}}$ la base hilbertienne usuelle de H définie par $e_i(j) = \delta_{ij}$, et pour $F \subset \mathbf{N}$ on note χ_F sa fonction caractéristique.

1. Montrer que pour tout $\gamma \in \Gamma$ il existe une unique isométrie linéaire de H, notée I_γ, telle que $I_\gamma(e_j) = e_{\gamma(j)}$, et que l'application $\gamma \mapsto I_\gamma$ est un morphisme de groupes.
2. Déterminer l'ensemble des vecteurs de $\ell^2(\mathbf{N})$ qui sont fixés par toutes les isométries I_γ.
3. Soit $\gamma \in \Gamma$. Montrer que $\gamma(A) \cap B \neq \varnothing$ si, et seulement si, $\langle I_\gamma(\chi_A), \chi_B \rangle \geqslant 1$.
4. On considère $X = \{I_\gamma(\chi_A) \colon \gamma \in \Gamma\}$, et Y l'adhérence de l'enveloppe convexe de X.
   (a) Montrer que Y est convexe et Γ-invariant.
   (b) Montrer que Y admet un unique vecteur v de norme minimale, et que $\gamma \cdot v = v$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.
5. Conclure.