Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2023-2024**
M1 - Mathématiques générales | UE : Analyse Fonctionnelle 1

Feuille d'exercices n° 4 : rappels sur le produit de convolution

---

Pour $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbf{R}^d)$ (avec $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$) et $x \in \mathbf{R}^d$ on souhaite poser

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}^d} f(t)g(x-t)dt$$

Notons, grâce au théorème de changement de variable, que $f * g(x)$ est défini si et seulement si $g * f(x)$ est défini, et qu'alors on a l'égalité $f * g(x) = g * f(x)$. De plus, l'inégalité de Hölder assure que $f * g$ est définie partout dès lors que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et qu'alors on a $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.
On a même mieux, avec l'inégalité de Young pour la convolution que vous avez mentionnée en cours : si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ alors $f * g$ est définie presque partout, appartient à $L^r(\mathbf{R}^d)$ et $\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.
On va revoir rapidement comment établir quelques propriétés fondamentales de la convolution (sans présupposer de connaissance particulière à ce sujet, en particulier on n'utilisera pas l'inégalité de Young qu'on va retrouver dans les cas particuliers $p = 1, +\infty$). On ne consacrera qu'une séance de TD à cette feuille d'exercices, dont les résultats sont à connaître (sauf celui de l'exercice 7, qui donne un exemple d'application des propriétés de régularisation de la convolution).

Exercice 1. Soit $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$. On fixe $x \in \mathbf{R}^d$ et on note $f_x(t) = f(t-x)$.
Montrer que $x \mapsto f_x$ est uniformément continue de $(\mathbf{R}^d, |\cdot|)$ dans $(L^p(\mathbf{R}^d), \|\cdot\|_p)$.
(on commencera par traiter le cas où f est continue à support compact)

Exercice 2. Dans cet exercice on suppose que $p, q \in [1, +\infty]$ sont des exposants conjugués, i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
On fixe $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbf{R}^d)$.

1. À l'aide du résultat de l'exercice précédent, montrer que $f * g$ est uniformément continue.
2. On suppose que $p, q < +\infty$. En approchant f et g par des fonctions continues à support compact, montrer que $f * g$ tend vers 0 quand $\|x\| \to +\infty$.
3. Si $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ et $g \in L^\infty(\mathbf{R}^d)$, est-il toujours vrai que $f * g(x)$ tend vers 0 quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$?

Exercice 3. Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbf{R}^d)$ avec $1 \leqslant p < +\infty$.

1. Montrer que si $p = 1$ alors $f * g \in L^1(\mathbf{R}^d)$ et $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$.

On suppose maintenant $1 < p < +\infty$ et on note q l'exposant conjugué de p.

2. En écrivant, pour $t \in \mathbf{R}^d$, $|f(t)| = |f(t)|^{\frac{1}{p}} |f(t)|^{\frac{1}{q}}$, montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^d$ on a

$$\int_{\mathbf{R}^d} |f(t)g(x-t)|dt \leqslant \left(\int_{\mathbf{R}^d} |f(t)||g(x-t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_1^{\frac{1}{q}}$$

3. Montrer que $\int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\mathbf{R}^d} |f(t)g(x-t)|dt \right)^p dx \leqslant \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \|f\|_1 \|g\|_p^p$.
4. Conclure que $f * g$ est définie presque partout, appartient à $L^p(\mathbf{R}^d)$ et $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p$.

Exercice 4. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \left]n, n + \frac{1}{n^3}\right[$ on pose $f(x) = n$; pour $n \in -\mathbf{N}^*$ et $x \in \left]n + \frac{1}{n^3}, n\right[$ on pose $f(x) = n$; et ailleurs on pose $f(x) = 0$. Montrer que $f \in L^1(\mathbf{R})$ mais $f * f(0)$ n'est pas défini.
(Pourtant $f * f$ est définie presque partout, et appartient à $L^1(\mathbf{R})$, d'après le résultat de l'exercice précédent)

Exercice 5. On dit qu'une suite de fonctions intégrables $k_n\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ est une *unité approchée* pour la convolution si :

(i) $\forall n \in \mathbf{N} \quad \int_{\mathbf{R}^d} k_n(t)dt = 1$.

(ii) $M = \sup\{\|k_n\|_1 \colon n \in \mathbf{N}\} < +\infty$.

(iii) Pour tout $\delta > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \int_{\|x\|\geqslant\delta} |k_n(t)|dt = 0$

1. Montrer que si $\varphi\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ est à support compact et telle que $\int_{\mathbf{R}^d} \varphi(t)dt = 1$ alors la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $\varphi_n\colon x \mapsto n^d\varphi(nx)$ est une unité approchée pour la convolution.

On fixe $p \in [1,+\infty[$ et une unité approchée pour la convolution $(k_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On souhaite montrer que pour tout $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$ on a $f * k_n \to f$ dans $L^p(\mathbf{R}^d)$. On note q l'exposant conjugué de p.

2. On supppose que f est continue, bornée et $f(0) = 0$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{R}^d} |k_n(t)f(t)|dt = 0$.
3. On considère une fonction continue, bornée $g\colon R^d \to \mathbf{C}$. Fixons $x \in \mathbf{R}^d$ et posons
$$f(t) = g(x-t) - g(x)$$
En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que $\lim_{n\to+\infty} g * k_n(x) - g(x) = 0$.
4. En utilisant (pour $t \in \mathbf{R}^d$) l'égalité $|k_n(t)| = |k_n(t)|^{\frac{1}{p}}|k_n(t)|^{\frac{1}{q}}$, montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^d$ et tout $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$ on a
$$|f * k_n(x) - f(x)| \leqslant M^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbf{R}^d} |f(x-t) - f(x)|^p |k_n(t)|dt \right)$$
5. Conclure, à l'aide du théorème de Fubini–Tonelli et du résultat du premier exercice de cette feuille.

Exercice 6. Soit $p \in [1,+\infty[$ et $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$. Soit $\varphi\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact contenu dans $B_f(0,M)$.
Soit $y \in \mathbf{R}^d$; pour tout x appartenant à la boule de centre 0 et de rayon $M + \|y\| + 1$ on pose $g(x) = f(x)$, et ailleurs on pose $g(x) = 0$.

1. Montrer que $g \in L^1(\mathbf{R}^d)$ et que pour tout $x \in \mathbf{R}^d$ tel que $\|y - x\| \leqslant 1$ on a $g * \varphi(x) = f * \varphi(x)$.
2. Montrer que $g * \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que tout $x \in \mathbf{R}^d$ et tout $i \in \{1,\dots,d\}$ on a
$$\frac{\partial(g * \varphi)}{\partial x_i}(x) = g * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$$
3. Montrer que $f * \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ que pour tout $x \in \mathbf{R}^d$ et tout $i \in \{1,\dots,d\}$ on a
$$\frac{\partial(f * \varphi)}{\partial x_i}(x) = f * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$$
4. En utilisant l'existence d'une unité approchée pour la convolution formée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, montrer que l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact est dense dans $L^p(\mathbf{R}^d)$.

Exercice 7. Pour $A \subseteq \mathbf{R}^d$ on note χ_A la fonction caractéristique de A.

1. Soit A, B deux parties bornées de $\mathbf{R}^d$. Montrer que $\chi_A * \chi_B$ est continue et à support compact.
2. Soit A une partie de $\mathbf{R}^d$ telle que $\lambda_d(A) > 0$ (où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$). On note $A - A = \{x \in \mathbf{R}^d \colon \exists a_1, a_2 \in A\ x = a_1 - a_2\}$.
En considérant $\chi_A * \chi_{-A}$, montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout x on ait $\|x\| \leqslant \varepsilon \Rightarrow x \in A - A$.
(Se ramener au cas où A est compact en utilisant que $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) \colon K \text{ compact } \subseteq A\}$).

Soit $d, n \in \mathbf{N}^*$. On considère $\varphi\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^n$ telle que pour tout $x, y \in \mathbf{R}^d$ on ait $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. On suppose que φ est mesurable (toujours en munissant $\mathbf{R}^d$ de la mesure de Lebesgue).
Soit V un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbf{R}^n$.

3. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert W de 0 tel que $W - W \subseteq V$.
4. Montrer que $\lambda_d(\varphi^{-1}(W)) > 0$.
5. Montrer que $\varphi^{-1}(V)$ contient un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbf{R}^d$.
6. Montrer que φ est continue (commencer par montrer que φ est continue en 0).
7. Montrer que φ est une application linéaire de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}^n$.

En particulier, les seules applications mesurables $\varphi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ pour tout $x, y \in \mathbf{R}$ sont de la forme $x \mapsto \alpha x$, où $\alpha \in \mathbf{R}$.