Feuille d'exercices n° 5 : Transformée de Fourier

Pour $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ et $\xi \in \mathbf{R}^n$ on note $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\imath x\cdot\xi} f(x)\,dx$. On note $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbf{R}^n)$, et on rappelle que pour tout $f \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap L^2(\mathbf{R}^n)$ on a $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$.

Exercice 1. Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \in \mathbf{R}^n$ on pose $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.
   Montrer que $f_\varepsilon \in L^1(\mathbf{R}^n)$, que pour tout ξ on a $\widehat{f_\varepsilon}(\xi) = \hat{f}(\varepsilon\xi)$ et $|\widehat{f_\varepsilon}(\xi)| \leqslant \|f\|_1$.
2. Soit $h \in \mathbf{R}^n$. Pour $x \in \mathbf{R}^n$ on note $\tau_h f(x) = f(x-h)$.
   Montrer que $\tau_h f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ et que pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$ on a $\widehat{\tau_h f}(\xi) = e^{-\imath h\cdot\xi}\hat{f}(\xi)$.
3. Montrer que $\bar{f} \in L^1(\mathbf{R}^n)$ et que pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$ on a $\hat{\bar{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$
4. Pour $x \in \mathbf{R}^n$ on note $\check{f}(x) = f(-x)$.
   Montrer que $\check{f} \in L^1(\mathbf{R}^n)$ et que pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$ on a $\hat{\check{f}}(\xi) = \check{\hat{f}}(\xi)$.

Exercice 2.

1. Soit f la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,1]$. Montrer que $f \in L^1(\mathbf{R})$ mais $\hat{f} \notin L^1(\mathbf{R})$.
2. Montrer que si f et $\hat{f}$ appartiennent à $L^1(\mathbf{R})$ alors f est continue et bornée.

Exercice 3. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ intégrable, à support compact et dont la transformée de Fourier est également à support compact. Montrer que f est la fonction nulle.
(Indication : considérer $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par $F(z) = \int_{\mathbf{R}} e^{-\imath tz} f(t)dt$)

Exercice 4.

1. Soit $a \leqslant b \in \mathbf{R}$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction indicatrice $\chi_{[a,b]}$.
2. À l'aide de ce résultat, retrouver le fait que la transformée de Fourier de toute fonction de $L^1(\mathbf{R})$ tend vers 0 à l'infini.
3. Déduire du résultat de la première question la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbf{R}} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$.
4. On note $f\colon x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$. Déterminer $\mathcal{F}(f)$.

Exercice 5. Calculer les transformées de Fourier de $f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définies par $f(x) = e^{-|x|}$ et $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 6. On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad -y''(x) + y(x) = e^{-2|x|} \tag{E}$$

1. Montrer que si f est solution de cette équation et f, f' appartiennent à $L^1(\mathbf{R})$ alors pour tout ξ on a
$$\hat{f}(\xi) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{1+\xi^2} - \frac{1}{4+\xi^2}\right)$$
2. Déterminer toutes les solutions de (E).

Exercice 7. Déterminer les fonctions $f \in L^1(\mathbf{R})$ telles que $\int_{\mathbf{R}} f(x-t)f(t)dt = \frac{1}{x^2+1}$ pour presque tout $x \in \mathbf{R}$
.

Exercice 8. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $\underbrace{f * \ldots * f}_{n \text{ fois}}$.

Exercice 9.

1. En utilisant la transformée de Fourier, montrer qu'il n'existe pas de $g \in L^1(\mathbf{R}^d)$ telle que pour tout $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ on ait $f * g = f$.
2. Déterminer toutes les fonctions $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ telles que $f * f = f$.
3. Résoudre $f * f = f$ dans $L^2(\mathbf{R})$.
4. Existe-t-il $f, g \in L^1(\mathbf{R}^d)$ telles que $f * g = 0$ mais f et g sont non nulles ?

Exercice 10. On garde les notations du premier exercice, et on note $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbf{R}^n)$. Montrer que pour tout $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ on a $\mathcal{F}^*(f) = \widetilde{\mathcal{F}(f)}$.

Exercice 11. Soit $f \in L^2(\mathbf{R})$. Pour $x, y \in \mathbf{R}$ on pose $f_x(y) = f(y-x)$ et on note $V = \mathrm{Vect}(\{f_x : x \in \mathbf{R}\})$. Montrer que V est dense dans $L^2(\mathbf{R})$ si, et seulement si, $\mathcal{F}(f) \neq 0$ presque partout.

Exercice 12. Soit $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ telle que $f^{(12)} + f^{(8)} + f = g$. Que pensez-vous du cas général d'une équation différentielle $\sum_{i=0}^n a_i f^{(i)} = g$?

Exercice 13. *L'équation de la chaleur pour une barre infinie.*
On fixe une fonction $h \in L^1(\mathbf{R})$, et on cherche à résoudre l'*équation de la chaleur* d'inconnue u et de condition initiale h :

$$\begin{cases} \forall (t,x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0, \cdot) = h \text{ dans } L^1(\mathbf{R}) \end{cases}$$

On cherche une solution u à cette équation telle que $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial u}{\partial x^2}$ existent et soient continues sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$.

1. On commence par supposer que u est une solution, aussi régulière que nécessaire pour que les calculs suivants aient un sens. Pour $t \geqslant 0$ on note $v(t, \xi)$ la transformée de Fourier de $x \mapsto u(t,x)$.
   (a) Montrer que pour tout ξ fixé on a
   $$\forall t > 0 \quad \frac{\partial v}{\partial t}(t, \xi) = -\xi^2 v(t, \xi) \quad \text{et} \quad v(0, \xi) = \hat{h}(\xi) \,.$$
   (b) En déduire (sous des hypothèses de régularité à préciser) que
   $$\forall (t,x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \quad u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbf{R}} h(y) e^{-(x-y)^2/4t}\, dy$$
2. Montrer qu'il existe une solution u de l'équation de la chaleur sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ de condition initiale h telle que
   $$\lim_{t \to 0^+} \|u(t, \cdot) - h\|_1 = 0 \,.$$
   (On pourra commencer par reconnaître un produit de convolution dans la formule de la question précédente puis exploiter les propriétés du produit de convolution)