Feuille d'exercices n° 9 : Distributions

Exercice 1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k^{(k)}$ définit-elle une distribution sur $\mathbf{R}$? (plus difficile : une distribution tempérée ?)

Exercice 2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, admettant un nombre fini de discontinuités $x_1, \ldots, x_n$. On note u_f la distribution associée à f.

Montrer que $(u_f)' = u_{f'} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i^+) - f(x_i^-)\right) \delta_{x_i}$.

Exercice 3. Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$, d'intégrale non nulle. Montrer que l'ensemble des primitives de f (au sens des distributions) est l'ensemble des fonctions de la forme $G * f$, où G est une primitive de δ_0.

Exercice 4.

1. Résoudre dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ et dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ les équations différentielles suivantes :
$$u' = 0\,, \quad u' + u = 0\,, \quad u' + u = \delta_0$$
2. Pour $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$, décrire l'espace des solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ d'une équation de la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k u^{(k)} = f$ (avec $a_0, \ldots, a_k \in \mathbf{C}$).

Exercice 5.

1. Trouver une solution h de $y'' + y = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ (on pourra essayer de s'inspirer de la méthode de variation de la constante).
2. On considère l'équation $u'' + u = f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Montrer que $h * f$ est solution de cette équation si on suppose que $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ ou que $f \in L^1(\mathbf{R})$.

Exercice 6. *Issu de l'examen final de 2023*
Le but de cet exercice est d'étudier l'équation
$$x^2 u = 1 \tag{$*$}$$
d'inconnue u appartenant à $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$.
On rappelle que la transformée de Fourier de $\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$ est égale à $-\imath\pi$ fois la fonction signe.

1. Montrer que la solution générale de l'équation $v'' = 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ est donnée par $v(x) = Ax + B$ avec $A, B \in \mathbf{C}$ des constantes arbitraires.
2. Calculer les transformées de Fourier de δ_0 et δ_0'.
3. En déduire la solution générale de l'équation homogène $x^2 w = 0$, $w \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$.
4. Montrer que pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ la limite $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}$ existe.

   On note cette limite $\langle \mathrm{Pf}\,\dfrac{1}{x^2}, \varphi \rangle$. Montrer que $\mathrm{Pf}\,\dfrac{1}{x^2} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$.
5. Montrer que $\mathrm{Pf}\,\dfrac{1}{x^2} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ est une solution de $(*)$ et en déduire toutes les solutions de $(*)$.
6. Montrer que, au sens des distributions, $\left(\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}\right)' = -\mathrm{Pf}\,\dfrac{1}{x^2}$.
7. Calculer la transformée de Fourier de $\mathrm{Pf}\,\dfrac{1}{x^2}$.