

Feuille d'exercices n° 3 : Théorie de la mesure et un peu d'axiome du choix

**Exercice 1.** On rappelle le résultat suivant vu en cours : soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré fini,  $p \in [1, +\infty[$  et  $q$  son exposant conjugué. On considère l'application  $g \mapsto \ell_g$  de  $L^q(\mu)$  dans  $L^p(\mu)^*$  définie par  $\ell_g(f) = \int_{\Omega} fg d\mu$ . Alors l'application  $g \mapsto \ell_g$  est une isométrie linéaire surjective.

On suppose maintenant que  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  est un espace mesuré  $\sigma$ -fini avec  $\mu(\Omega) = +\infty$  et on souhaite étendre le résultat du cours à ce contexte.

1. Montrer qu'il existe  $I \subseteq \mathbf{N}$  et des parties mesurables  $(A_n)_{n \in I}$  telles que  $\bigsqcup_{n \in I} A_n = \Omega$  et  $0 < \mu(A_n) < +\infty$  pour tout  $n \in I$ .
2. On définit  $w = \sum_{n \in I} \frac{\mathbf{1}_{A_n}}{2^n \mu(A_n)}$ . Montrer que  $w \in L^1(\mu)$  et que  $w$  est à valeurs strictement positives.  
On définit une mesure  $\nu$  en posant  $\nu(A) = \int_A w d\mu$ . C'est une mesure finie.
3. On considère  $\Theta: L^p(\mu) \rightarrow L^p(\nu)$  définie par  $\Theta(f) = w^{-\frac{1}{p}} f$ .  
Montrer que  $\Theta$  est bien définie, et est une isométrie linéaire surjective de  $L^p(\mu)$  sur  $L^p(\nu)$ .
4. Conclure.

**Exercice 2.** Soit  $\mu, \nu$  deux mesures finies sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  telles que  $\mu \geq \nu$ . Montrer qu'il existe une mesure  $\lambda$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  telle que  $\mu = \nu + \lambda$ .

**Exercice 3.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace mesurable, et  $\mu_1, \mu_2$  deux mesures finies sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Montrer qu'il existe deux mesures étrangères  $\nu_1, \nu_2$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  telles que  $\mu_1 - \mu_2 = \nu_1 - \nu_2$ .  
(On dit que  $\nu_1, \nu_2$  sont étrangères s'il existe une partie mesurable  $E$  telle que  $\nu_1(A) = \nu_1(A \cap E)$  et  $\nu_2(A) = \nu_2(A \setminus E)$  pour toute partie mesurable  $A$ )

**Exercice 4.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espace de probabilité. On fixe une  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{F}'$  contenue dans  $\mathcal{F}$ . Étant donnée une variable aléatoire  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ , une espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $\mathcal{F}'$  est une variable aléatoire  $Y$  sur  $(\Omega, \mathcal{F}')$  telle que

$$\forall A \in \mathcal{F}' \quad \int_A Y d\mu = \int_A X d\mu$$

1. On suppose que  $Y$  est une espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $\mathcal{F}'$ .
  - (a) Montrer que  $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}', \mu)$ .
  - (b) Montrer que si  $Z$  est une autre espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $\mathcal{F}'$ , alors  $Y = Z$   $\mu$ -pp.
2. On souhaite maintenant montrer l'existence d'une espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $\mathcal{F}'$ .
  - (a) On suppose que  $X$  est à valeurs positives. En considérant  $\nu$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}')$  par  $\nu(A) = \int_A X d\mu$ , montrer à l'aide du théorème de Radon-Nikodym que  $X$  admet une espérance conditionnelle.
  - (b) Conclure dans le cas général.

Parlons maintenant un peu d'axiome du choix ; si  $X$  est un ensemble, une fonction de choix sur  $X$  est une fonction  $f: \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X$  telle que pour toute partie non vide  $A$  de  $X$  on ait  $f(A) \in A$ . L'axiome du choix est l'énoncé suivant : tout ensemble admet une fonction de choix.

**Exercice 5.**

1. À l'aide de l'axiome du choix, construire un sous-ensemble  $A$  de  $[0, 1]$  avec la propriété suivante : pour tout  $y \in \mathbf{R}$ , il existe un unique  $a \in A$  tel que  $y \in A + \mathbf{Q}$ .
2. Montrer que  $A$  n'est pas mesurable pour la mesure de Lebesgue (indication : raisonner par l'absurde, et distinguer selon que la mesure de  $A$  est nulle ou non).

**Exercice 6.** Montrer que l'axiome du choix est équivalent aux énoncés suivants :

1. Soit  $I$  un ensemble et  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'ensembles non vides. Alors  $\prod_{i \in I} X_i$  est non vide.
2. Soit  $X, Y$  deux ensembles et  $f: X \rightarrow Y$  une surjection. Alors il existe  $g: Y \rightarrow X$  telle que pour tout  $y \in Y$  on ait  $f(g(y)) = y$ .

On dit qu'un ensemble partiellement ordonné  $(X, \leq)$  est *inductif* si pour tout sous-ensemble  $Y \subseteq X$  totalement ordonné par  $\leq$  il existe  $x \in X$  tel que  $y \leq x$  pour tout  $y \in Y$ . Le *lemme de Zorn* est l'énoncé suivant : tout ensemble partiellement ordonné inductif admet un élément maximal (i.e.  $x \in X$  tel que  $(x \leq y) \Rightarrow (x = y)$ ).

**Exercice 7.** Montrer que si le lemme de Zorn est vrai alors l'axiome du choix est vrai aussi.

La réciproque est vraie : si l'axiome du choix est vrai il en va de même du lemme de Zorn. On l'admet ici. L'axiome du choix, ou des variantes plus faibles (en particulier l'axiome du choix dépendant) est fréquemment utilisé sans mention particulière. On suppose dans la suite de la feuille (et durant tout le semestre!) que l'axiome du choix est vrai.

**Exercice 8.** Soit  $X, Y$  deux ensembles. Montrer que  $X$  s'injecte dans  $Y$  ou  $Y$  s'injecte dans  $X$ .  
(Cet énoncé est lui aussi équivalent à l'axiome du choix...)

Ce résultat est à mettre en relation avec le théorème suivant (dont la preuve n'utilise pas l'axiome du choix).

**Exercice 9. Théorème de Cantor–Schröder–Bernstein.**

Soit  $X, Y$  deux ensembles et  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$  deux injections. Montrer qu'il existe une bijection  $h: X \rightarrow Y$ .

**Exercice 10.**

1. Montrer que  $\mathbf{R}$  est en bijection avec  $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ .
2. Montrer que  $\mathbf{R}, \mathbf{R}^n$  (pour  $n \in \mathbf{N}^*$ ) et  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  sont en bijection.

**Exercice 11.** Soit  $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$  une famille d'ensembles tels que chaque  $X_i$  soit en bijection avec  $\mathbf{R}$ . Montrer que  $\bigcup_i X_i$  est en bijection avec  $\mathbf{R}$ .

**Exercice 12.** À l'aide du lemme de Zorn, montrer que tout espace vectoriel (sur un corps quelconque) admet une base.

**Exercice 13.**

1. Soit  $B$  une base de  $\mathbf{R}$  en tant que  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel. Montrer que  $\mathbf{R}$  et  $B$  sont en bijection.
2. Montrer que  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{R}^2$  sont isomorphes en tant que  $\mathbf{Q}$ -espaces vectoriels.