Feuille d'exercices n° 4 : Théorème de Hahn–Banach

Exercice 1.
Soit X un espace de Banach, B_X sa boule unité fermée et B_{X^*} la boule unité fermée de X^*. À l'aide du théorème de Hahn–Banach, démontrer les formules suivantes, pour $x_0 \in X$ et $f_0 \in X^*$:

$$\|x_0\|_X = \sup_{f \in B_{X^*}} |f(x_0)|, \quad \|f_0\|_{X^*} = \sup_{x \in B_X} |f_0(x)|.$$

Les bornes supérieures sont-elles atteintes ?

Exercice 2. Soit X un espace vectoriel normé, $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre d'éléments de X et $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue f telle que $f(x_i) = c_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Exercice 3. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue $T\colon (L^\infty([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbf{R}, |\cdot|)$ de norme 1 et telle que pour toute $f \in C([0,1], \mathbf{R})$ on ait $T(f) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé. On note E^* son dual topologique.

1. Montrer que si E est de dimension infinie alors E^* aussi.
2. Montrer que si E^* est séparable alors E est séparable.

Exercice 5.

1. Pour $x \in \ell^\infty$ on pose $p(x) = \limsup\limits_{n \to +\infty} x(n)$.
   Montrer que p est positivement homogène, sous-additive et que $p(x) \le \|x\|_\infty$ pour tout $x \in \ell^\infty$.
2. On considère le sous-espace c de ℓ^∞ formé par toutes les suites réelles convergentes.
   À l'aide d'une extension d'une forme linéaire bien choisie sur c, montrer qu'il existe une application linéaire continue $L\colon \ell^\infty \to \mathbf{R}$ telle que, pour tout $u \in \ell^\infty$, on ait $\liminf(u_n) \le L(u) \le \limsup(u_n)$.
3. Calculer la norme de L et montrer que $L(u) \ge 0$ pour tout suite u bornée et à valeurs positives.
4. On considère $\Phi\colon \ell^1 \to (\ell^\infty)^*$ définie par $\Phi(v)(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Rappeler pourquoi Φ est bien définie et continue.
5. Existe-t-il $v \in \ell^1$ tel que $L = \Phi(v)$?

Exercice 6. Soit F et K deux convexes non vides disjoints de $\mathbf{R}^n$, avec F fermé et K compact. Montrer (sans utiliser le théorème de Hahn–Banach) que l'on peut séparer F et K au sens strict par un hyperplan.

Exercice 7.

1. Donner un exemple, dans $\mathbf{R}^2$, de deux convexes fermés disjoints non vides ne pouvant pas être séparés au sens strict par un hyperplan.
2. Donner un exemple, en dimension infinie, de deux convexes disjoints non vides ne pouvant pas être séparés au sens large par un hyperplan fermé. Peut-on avoir un tel exemple en dimension finie ?
3. Donner un exemple, en dimension infinie, de deux convexes disjoints non vides ne pouvant pas être séparés au sens large par un hyperplan. **Indication :** *dans l'espace vectoriel des suites réelles à support fini, soit K l'ensemble des suites dont le dernier terme non nul est positif. Montrer que K est un convexe qui ne peut pas être séparé de $\{0\}$ par un hyperplan.*

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel . On fixe des formes linéaires $f_1, \dots, f_n$ et f telles que pour tout $x \in E$ on ait : $(\forall i \in \{1, \dots, n\}\ f_i(x) = 0) \Rightarrow f(x) = 0$.

1. Montrer que $\{(f(x), f_1(x), \dots, f_n(x))\colon x \in E\}$ est un fermé de $\mathbf{R}^{n+1}$ qui ne contient pas $(1, 0, \dots, 0)$.
2. Montrer qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ tels que $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$.

Exercice 9. Montrer le résultat suivant, à l'aide du théorème de séparation de Hahn–Banach : dans un espace vectoriel normé, un hyperplan est soit fermé soit dense.
Toujours à l'aide du théorème de séparation de Hahn–Banach, Montrer que si f est une forme linéaire non identiquement nulle, l'hyperplan $\ker(f)$ est fermé si et seulement si f est continue.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel normé, et K un compact convexe non vide de E. On fixe une famille d'applications affines continues $(f_i)_{i \in I}$ telles que $f_i(K) \subseteq K$ pour tout $i \in I$, et $f_i(f_j(x)) = f_j(f_i(x))$ pour tout $x \in K$ et tout $i, j \in I$. On souhaite montrer qu'il existe $x \in X$ tel que $f_i(x) = x$ pour tout $i \in I$.

1. On note $\Delta = \{(x, x) \colon x \in K\}$ et $\Gamma = \{(x, f(x)) \colon x \in K\}$.
   (a) Montrer que Δ et Γ sont des convexes compacts de $E \times E$ (on munit $E \times E$ d'une norme produit).
   (b) Montrer que si $\Phi \colon E \times E \to \mathbf{R}$ est une forme linéaire continue sur $E \times E$ alors il existe $\varphi_1, \varphi_2 \in E^*$ telles que l'on ait $\Phi(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$ pour tout $x, y \in E$.
2. On commence par le cas d'une seule fonction : on fixe une fonction affine $f \colon K \to K$ et on souhaite montrer que f admet un point fixe. On raisonne par l'absurde et l'on suppose que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in K$.
   (a) Montrer qu'il existe $\varphi_1, \varphi_2 \in E^*$ et deux réels $\alpha < \beta$ tels que $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) \leq \alpha < \beta \leq \varphi_1(y) + \varphi_2(f(y))$ pour tout $x, y \in K$.
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in K$ on a $\varphi_2(f^n(x)) - \varphi_2(x) \geq n(\beta - \alpha)$, et conclure.
3. Montrer le résultat dans le cas général (c'est le *théorème de Kakutani–Markov*).