
Feuille d'exercices n° 5 : Un peu de topologie

Exercice 1. Soit X un ensemble, (Y, τ_Y) un espace topologique et $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions de X dans Y . On définit une famille $\tau_{\mathcal{F}}$ de parties de X en décrétant que $O \in \tau_{\mathcal{F}}$ si, et seulement si, pour tout $x \in O$ il existe un sous-ensemble fini I de $\mathcal{F}$ et des ouverts $(U_f)_{f \in I}$ de (Y, τ_Y) tels que

$$x \in \{x' \in X : \forall f \in I, f(x') \in U_f\} \subseteq O$$

1. Montrer que $\tau_{\mathcal{F}}$ est une topologie sur X . On l'appelle la *topologie engendrée par la famille de fonctions $\mathcal{F}$* .
2. Montrer que chaque $f \in \mathcal{F}$ est continue de $(X, \tau_{\mathcal{F}})$ vers (Y, τ_Y) .
3. Soit σ une topologie sur X telle que chaque $f \in \mathcal{F}$ soit continue de (X, σ) dans (Y, τ_Y) . Montrer que σ contient $\tau_{\mathcal{F}}$.
4. Montrer qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X converge vers x dans $(X, \tau_{\mathcal{F}})$ si, et seulement si, $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $f(x)$ dans (Y, τ_Y) pour tout $f \in \mathcal{F}$.
5. Soit (Z, τ_Z) un autre espace topologique. Montrer que $g : (Z, \tau_Z) \rightarrow (X, \tau_{\mathcal{F}})$ est continue si, et seulement si, $f \circ g : (Z, \tau_Z) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ est continue pour tout $f \in \mathcal{F}$.
6. Expliquer pourquoi les topologies produits peuvent être vues comme des topologies engendrées par une famille de fonctions et expliciter une base d'ouverts pour une topologie produit.

Exercice 2.

1. Soit I un ensemble infini non dénombrable. Montrer que la topologie produit sur $\{0, 1\}^I$, sur $[0, 1]^I$ ou sur $\mathbf{R}^I$, n'est pas métrisable.
Indication : dans un espace topologique métrisable, tout point admet une base dénombrable de voisinages (pourquoi ?) ; montrer que cette propriété est en défaut.
2. Dans le cas où $I = [0, 1]$ montrer que $\mathbf{R}^I$, muni de la topologie produit, est séparable. Cette topologie admet-elle une base dénombrable d'ouverts ?
Indication : Pour $n \in \mathbf{N}^$, considérer les fonctions à valeurs dans $\mathbf{Q}$ et constantes sur chaque $[i/n, i + 1/n[$.*
3. Pour $x \in [0, 1]$ on note χ_x la fonction caractéristique de $\{x\}$. Montrer que $\{\chi_x : x \in [0, 1]\}$, muni de la topologie induite par $\mathbf{R}^{[0, 1]}$, est discret. Est-il séparable ? En déduire une nouvelle preuve du fait que $\mathbf{R}^{[0, 1]}$ n'est pas métrisable.

Exercice 3.

Montrer que, dans un espace vectoriel topologique, l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

Exercice 4. Soit X un espace vectoriel topologique.

1. Montrer que X est séparé (on rappelle que par convention dans notre cours $\{0\}$ est fermé dans X).
2. Montrer qu'une forme linéaire $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ est continue si, et seulement si, f est continue en 0.

Exercice 5.

Soit X l'espace des fonctions mesurables $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ telles que $\int_0^1 |f(t)|^{1/2} dt < +\infty$, quotienté par la relation d'équivalence donnée par l'égalité presque partout.

1. Montrer que X est un espace vectoriel.
2. Montrer que l'on définit une distance sur X par la formule $d(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|^{1/2} dt$, et que la topologie associée fait de X un espace vectoriel topologique.
3. Montrer que les seuls ouverts convexes de X sont $\emptyset$ et X . (**Indication.** Montrer que l'enveloppe convexe d'une boule ouverte $B(x, r)$ contient la boule ouverte $B(x, \sqrt{2}r)$).
En déduire que toute forme linéaire continue sur X est nulle.